Université de Nantes **Année 2006-2007**
Faculté des Sciences et des Techniques
Département de Mathématiques

S3M0200-Géométrie euclidienne
Contrôle continu du 28 novembre 2006
Durée 1h20

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel $< \cdot , \cdot >$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Calculer $\det f$. Que peut-on en conclure?
3. Déterminer lequel de ces deux ensembles

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \,;\, f(x) = x\} \quad ; \quad \{x \in \mathbb{R}^3 \,;\, f(x) = -x\},$$

est une droite vectorielle. On la notera Δ.

4. (a) Déterminer l'orthogonal $\Delta^\perp$ de Δ.
(b) Déterminer une base orthonormée (b_1, b_2, b_3) de $\mathbb{R}^3$ dont le premier vecteur b_1 est un vecteur de Δ.
(c) Déterminer la matrice de f dans la base (b_1, b_2, b_3).
(d) En déduire la description géométrique de la transformation f.

Exercice 2. Soit (ABC) un triangle non aplati du plan affine $\mathbb{R}^2$.

1. Pour tout point M du plan, on appelle *projection de M sur la droite (AB) parallèlement à la droite (AC)* le point M' défini par

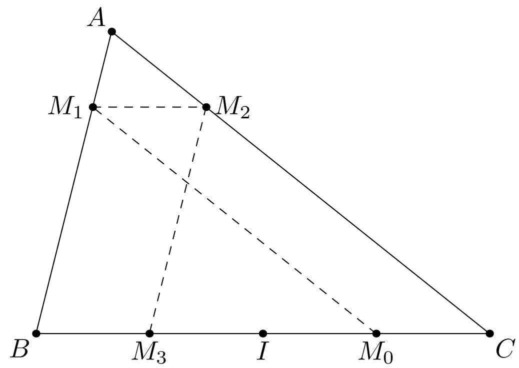
$$M' = A + \lambda \overrightarrow{AB},$$

où λ est la première composante du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$:

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}.$$

Vérifier que l'application $M \longmapsto M'$ ainsi définie est affine.

2. On considère un point M_0 sur la droite (BC). Soit M_1 la projection de M_0 sur la droite (AB) parallèlement à la droite (AC), M_2 la projection de M_1 sur la droite (AC) parallèlement à la droite (BC), et M_3 la projection de M_2 sur la droite (BC) parallèlement à la droite (AB).



(a) Montrer qu'il existe deux réels β et γ tels que $\beta + \gamma \neq 0$ et tels que M_0 soit le barycentre des points B et C affectés des coefficients respectifs β et γ.

(b) En déduire l'expression de M_1 comme barycentre des points A et B, puis celle de M_2 comme barycentre des points A et C et enfin celle de M_3 comme barycentre des points B et C.

(c) Montrer que M_3 est le symétrique de M_0 par rapport au milieu I des points B et C.

(d) On continue le procédé en considérant M_4, projection de M_3 sur la droite (AB) parallèlement à la droite (AC), puis M_5, projection de M_4 sur la droite (AC) parallèlement à la droite (BC), et enfin M_6, projection de M_5 sur la droite (BC) parallèlement à la droite (AB). Montrer que $M_6 = M_0$.