Théorème 1. *Soit E espace vectoriel de dimension finie et q une forme quadratique sur E. Il existe une base* $\mathbf{b}$ *de E telle que*

1. *la matrice de q relativement* $\mathbf{b}$ *est diagonale ;*
2. *la base* $\mathbf{b}$ *est orthogonale relativement à la forme quadratique q.*

Démonstration. Soit B la forme polaire de la forme quadratique q. Les termes non diagonaux de la matrice $A(q,\mathbf{b})$ représentant la forme quadratique q dans la base $\mathbf{b}$ sont $B(b_i,b_j)$ avec $i \neq j$: la nullité de $B(b_i,b_j)$ signifie l'orthogonalité de b_i et b_j. Ainsi les deux assertions du théorème sont équivalentes.

Introduisons l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}_n$:

Étant donné un espace vectoriel E de dimension n, toute forme quadratique q sur E admet une base orthogonale.

Pour $n=1$, la matrice $A(q,\mathbf{b})$ est d'ordre 1, donc diagonale. L'assertion $\mathcal{P}_1$ est donc valide.

Supposons l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}_{n-1}$ vérifiée pour $n>1$. Soit E un espace vectoriel de dimension n et q une forme quadratique sur E. Si q est nulle, alors la matrice $A(q,\mathbf{b})$ est nulle pour toute base $\mathbf{b}$ et, par suite, diagonale.

Si q n'est pas identiquement nulle, il existe un vecteur, noté b_1 tel que $q(b_1) \neq 0$. D'après le théorème de la base incomplète, et vu que b_1 est non nul puisque que $q(0_E)$ est toujours nul, il existe $n-1$ vecteurs, notés $c_2,\dots,c_n$ tels que $(b_1,c_2,\dots,c_n)$ soit une base de E. Modifions les vecteurs $c_i, i=2,\dots,n$ en les vecteurs $d_i, i=2,\dots,n$ définis par

$$d_i = c_i - \frac{B(c_i,b_1)}{q(b_1)} b_1, \quad i=2,\dots,n$$

de telle sorte que les d_i soient orthogonaux à b_1

$$B(b_1,d_i) = B\left(b_1, c_i - \frac{B(c_i,b_1)}{q(b_1)} b_1\right) = B(b_1,c_i) - \frac{B(c_i,b_1)}{q(b_1)} B(b_1,b_1) = 0.$$

La famille $(b_1,d_2,\dots,d_n)$ obtenue par ajout sur chacun des $n-1$ derniers vecteurs de la base $(b_1,c_2,\dots,c_n)$ d'un multiple scalaire du premier vecteur b_1 est pareillement libre. Ainsi les vecteurs $d_2,\dots,d_n$ sont-ils linéairement indépendants et le sous-espace F engendré par les $d_2,\dots,d_n$ est de dimension $n-1$. Notons par q_F la restriction de la forme quadratique q à F : sa forme polaire B_F est obtenue par restriction à $F \times F$ de la forme polaire B de q.

D'après l'hypothèse de récurrence et vu que F est de dimension $n-1$, il existe une base $(b_2,\dots,b_n)$ de F qui est orthogonale pour q_F. L'espace F est orthogonal à b_1 relativement à la forme q, puisque la famille $(d_2,\dots,d_n)$ l'est : ainsi $B(b_1,b_i), i \geq 2$ est nul. Par orthogonalité de la famille $(b_2,b_3,\dots,b_n)$ pour q_F et donc pour q aussi, les scalaires $B_F(b_i,b_j) = B(b_i,b_j), i \neq j, 2 \leq i,j \leq n$ sont nuls. En résumé les scalaires $B(b_i,b_j), i \neq j, 1 \leq i,j \leq n$ sont nuls, ce qui permet d'affirmer que la matrice $A(q,\mathbf{b})$ de la forme quadratique q relativement à la base $\mathbf{b} = (b_1,b_2,\dots,b_n)$ est diagonale.

Ainsi la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée. Cela achève la démonstration du théorème. □