UNIVERSITÉ DE NANTES
UFR des sciences et des techniques
Département de mathématiques

Nom de l'U.E. : Géométrie euclidienne
Code de l'U.E. : 32
Date de l'examen : 20 décembre 2006
Durée : 1h30
Documents autorisés : 1 feuille A4 recto-verso
Calculatrice autorisée : ☐ oui ☒ non

Année universitaire 2006-2007
Semestre ☒ 1 ☐ 2
Session ☒ 1 ☐ 2

Le sujet est constitué de deux exercices indépendants

La précision, la clarté et la rigueur des explications seront considérées pour la notation. En particulier, les réponses non justifiées ne pourront pas être prises en compte.

I

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire euclidien canonique

$$\langle v, v' \rangle = xx' + yy' + zz', \quad v = (x, y, z), v' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3.$$

Soit $\Phi_{a,b}$ la transformation définie sur l'espace affine $\mathbb{R}^3$ par

$$\Phi_{a,b}(x, y, z) = (a^2 z, x, ay + b), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(**1**) Pour quelles valeurs de (a, b) l'application $\Phi_{a,b}$ est-elle une isométrie ?

(**2**) On suppose dans cette question $a = 1$.

(**2**.a) Décrire l'ensemble des points invariants de la transformation $\Phi_{1,b}$ (on discutera suivant les valeurs de b).

(**2**.b) Montrer qu'il existe une rotation R (dont on précisera l'angle et l'axe) et une translation $T_{\mathbf{t}}$ de vecteur $\mathbf{t}$ (qui sera précisé) telle que $\Phi_{1,b} = T_{\mathbf{t}} \circ R$. Pour quelle(s) valeur(s) de b la transformation $\Phi_{1,b}$ est-elle une rotation ?

(**3**) On suppose dans cette question $a = -1$ et on note φ_b la partie linéaire de $\Phi_{-1,b}$.

(**3**.a) Montrer qu'il existe une droite vectorielle δ telle que $\varphi_b(v) = -v$ pour tout vecteur $v \in \delta$.

(**3**.b) Montrer que si le vecteur w est orthogonal à δ, alors il en est de même pour $\varphi_b(w)$.

(**3**.c) Montrer que le vecteur $w = (1, 1, 0)$ est orthogonal à δ. Calculer $\langle \varphi_{-1,b} w, w \rangle$. En déduire que la restriction de φ_b à l'orthogonal $\delta^\perp$ est une rotation d'angle $\pi/3$ ou $-\pi/3$.

(**3**.d) Déterminer l'ensemble des points fixes de $\Phi_{-1,b}$. En déduire une description géométrique de l'application $\Phi_{-1,b}$.

II

Soit, pour λ réel, la forme quadratique Q_λ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$Q_\lambda(x, y) = x^2 + xy + \lambda y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(**1**) Calculer, suivant les valeurs de λ, le rang et la signature de Q_λ.

(**2**) Soit, pour Λ réel, la conique C_Λ définie par

$$C_\Lambda = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + xy + \Lambda y^2 - 2x = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

(**2**.a) Montrer qu'il existe Λ_0 tel que C_{Λ_0} soit une parabole. Tracer la parabole C_{Λ_0}.

(**2**.b) Expliciter la symétrie du plan qui laisse invariante la parabole C_{Λ_0}. Donner une