UNIVERSITÉ DE NANTES
UFR des sciences et des techniques
Département de mathématiques

Nom de l'U.E. : Géométrie euclidienne
Code de l'U.E. : 32
Date de l'examen : 27 juin 2007
Durée : 1h30
Documents autorisés : 1 feuille A4 recto-verso
Calculatrice autorisée : ☐ oui ☒ non

Année universitaire 2006-2007
Semestre ☒ 1 ☐ 2
Session ☐ 1 ☒ 2

Le sujet est constitué de deux exercices indépendants

La précision, la clarté et la rigueur des explications seront considérées pour la notation. En particulier, les réponses non justifiées ne pourront pas être prises en compte.

I

(**A**) Soit n un vecteur unitaire de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et Φ_n, Ψ_n les transformations définies sur $\mathbb{R}^3$ définies par

$$\Phi_n(v) = v - 2\langle n, v\rangle n, \quad \Psi_n(v) = \langle n, v\rangle n + n \wedge (n \wedge v), \quad v \in \mathbb{R}^3.$$

(**A.1**) Montrer que les applications Φ_n, Ψ_n sont des isométries.

(**A.2**) Montrer la relation $\Phi_n + \Psi_n = 0$.

(**A.3**) Décrire géométriquement ces deux transformations.

(**B**) Soit R la transformation linéaire de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ représentée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(**B.1**) Montrer que R est une isométrie.

(**B.2**) Déterminer les vecteurs (non nuls) invariants ou anti-invariants de R, s'il en existe.

(**B.3**) Décrire géométriquement l'isométrie R.

(**B.4**) Décomposer R comme le produit de symétries hyperplanes.

II

Si Π est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$, on désigne par P_Π la projection orthogonale sur Π.
Soit H le plan "horizontal" $H = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$.
Soit C le cercle de rayon 1 centré à l'origine et inclus dans le plan horizontal H :

$$C = \{(x, y, 0), x^2 + y^2 = 1\} = \{\cos\theta b_1 + \sin\theta b_2, \theta \in \mathbb{R}\},$$

si (b_1, b_2) est une base orthonormée (quelconque) du plan H.

(A) On suppose que l'application induite $P_\Pi : H \to \Pi$ n'est pas un isomorphisme linéaire entre H et Π.

(A.1) Montrer qu'il existe $u \in H$ non nul tel que $P_\Pi(u) = 0$ et que si v est un vecteur unitaire de H orthogonal à u, on a $P_\Pi(H) = \mathbb{R}v$.

(A.2) En déduire que l'image $P_\Pi(C)$ est un segment dont on précisera les extrémités.

(B) On suppose que l'application induite $P_\Pi : H \to \Pi$ est un isomorphisme linéaire entre H et Π.

(B.1) Montrer que l'image $P_\Pi(C)$ est une ellipse.

(B.2) Soit A l'opérateur symétrique de H tel que

$$\langle Av, w\rangle = \langle P_\Pi v, w\rangle, \quad v, w \in H.$$

Il existe (v_1, v_2) est une base orthonormée de H telle que $Av_i = \lambda_i v_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$: montrer que $\lambda_i > 0$ pour $i = 1, 2$.
Montrer que $P_\Pi v_1$ est orthogonal à $P_\Pi v_2$ et que $\|P_\Pi v_i\| = \sqrt{\lambda_i}$ pour $i = 1, 2$.
En déduire que l'ellipse $P_\Pi(C)$ a ses axes de longueur $2\sqrt{\lambda_1}$ et $2\sqrt{\lambda_2}$.