Université de Nantes **Année 2005-2006**
Faculté des Sciences et des Techniques
Département de Mathématiques

S3M0200-Géométrie euclidienne
Série d'exercices 1

Des exercices de révision.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Exprimer $f((x, y, z))$ en fonction de x, y et z.
2. On pose $U = \{u \in \mathbb{R}^3 \ ; \ f(u) = -2u\}$ et $V = \{v \in \mathbb{R}^3 \ ; \ f(v) = 4v\}$. Montrer que
   (a) U et V sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une base.
   (b) $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.
3. Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1, 0, -1), e_2 = (0, 1, -1)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner la matrice B de f dans la base $\mathcal{E}$. Retrouver le résultat en appliquant la formule de changement de base.

Exercice 2. Soit $E := \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2. On considère l'application $f : E \longrightarrow E$, définie par :

$$f(a\,X^2 + b\,X + c) = c\,X^2 + b\,X + a\,.$$

1. (a) Montrer que f est un isomorphisme.
   (b) Écrire la matrice A de f dans la base canonique de E. Calculer A^2 et A^{-1}.
2. On considère l'application $g : E \longrightarrow E$, définie par :

$$\forall P \in E\,, \qquad g(P) = f(P) - P\,.$$

   (a) Montrer que g est linéaire.
   (b) Déterminer le noyau de g et donner sa dimension.
   (c) Quelle est la dimension de l'image $\mathrm{Im}g$ de g ? Donner une ou des équation(s) caractéristique(s) de $\mathrm{Im}g$.

Exercice 3. On rappelle que l'ensemble E des applications linéaires $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, muni des opérations usuelles, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Les éléments de E sont appelés *formes linéaires* sur $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que le noyau d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, non nulle, est de dimension 2.
2. Pour $i = 1, 2, 3$, on considère l'application $f_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in E\,, \qquad f_i(x_1, x_2, x_3) = x_i\,.$$

   (a) Montrer que les f_i sont linéaires et qu'elles forment une base de E.
   (b) Pour $i = 1, 2, 3$, on considère les applications $\varphi_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, définies pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par :

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x_1 + x_2 + x_3 \\ \varphi_2(x) &= x_1 + x_2 \\ \varphi_3(x) &= x_1 + x_3\,. \end{aligned}$$

   Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E.

Formes quadratiques et formes bilinéaires symétriques : définition, changements de bases.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tous $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y) = x_1\,y_1 + 4\,x_3\,y_3 + x_1\,y_2 + x_2\,y_1 + 2\,x_1\,y_3 + 2\,x_3\,y_1 + 3\,x_2\,y_3 + 3\,x_3\,y_2\,.$$

1. Vérifier que f est une forme bilinéaire symétrique. On note q la forme quadratique associée.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Vérifier que $\mathcal{B}' = (e_1' = (1,0,0), e_2' = (-1,1,0), e_3' = (-3,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de f dans cette base. Pour tous x et y dans $\mathbb{R}^3$, calculer $f(x,y)$ et $q(x)$ dans cette base.
4. Donner une base q-orthogonale de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5. On considère la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3)\,, \quad q(x) = x_1^2 + 5\,x_2^2 + 54\,x_3^2 - 4\,x_1x_2 + 14\,x_1x_3 - 32\,x_2x_3\,.$$

On désigne par f la forme bilinéaire symétrique associée à q.

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. Pour tous x et y dans $\mathbb{R}^3$, déterminer $f(x,y)$ dans cette base.
2. Vérifier que $\mathcal{B}' = (e_1' = (1,0,0), e_2' = (2,1,0), e_3' = (-3,2,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de f dans cette base. Pour tout x de $\mathbb{R}^3$, déterminer $q(x)$ dans cette base.
3. Déterminer l'orthogonal, pour la forme quadratique q, du sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(-3,2,1)$.

Université de Nantes **Année 2006-2007**
Faculté des Sciences et des Techniques
Département de Mathématiques

S3M0200-Géométrie euclidienne
Série d'exercices 2

Bases duales et "antéduales"

Exercice 1.

1. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose
$$f_1 := e_1\,, \quad f_2 := e_1 + e_2\,, \quad f_3 = e_1 + e_2 + e_3\,.$$
Vérifier que (f_1, f_2, f_3) est une base et déterminer sa base duale.
2. On considère maintenant les trois formes linéaires ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, définies sur $\mathbb{R}^3$ par
$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\,,\ \ell_1(x) = x_1\,,\ \ell_2(x) = x_1 + x_2\,,\ \ell_3(x) = x_1 + x_2 + x_3\,.$$
Montrer que (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est une base du dual de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la base de $\mathbb{R}^3$ dont c'est la base duale.

Formes quadratiques - Réduction de Gauss

Exercice 2. Pour a réel donné, on considère la forme quadratique q_a définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,, \quad q_a(x) = x_1^2 + 2a\,x_1\,x_2 + x_2^2\,.$$

1. Déterminer suivant les valeurs de a, le rang et la signature de q_a. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles la forme bilinéaire symétrique f_a associée à q_a est un produit scalaire euclidien ?
2. Déterminer une base de E q_a-orthogonale et écrire la matrice de q_a dans cette base.
3. On considère le cas où $a = -2$.
   (a) Déterminer et dessiner l'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par le vecteur $e_1 = (1, 0)$.
   (b) Déterminer l'orthogonal H de la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u = (1, 2 - \sqrt{3})$. A-t-on $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\,u \oplus H$?

Exercice 3.

1. On considère la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par
$$\forall x = (x_1, x_2, x_3)\,, \quad q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4\,(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\,.$$
Déterminer le rang et la signature de q. Trouver une base q-orthogonale et écrire la matrice de q dans cette base.
2. Mêmes questions avec la forme quadratique définie par
$$\forall x = (x_1, x_2, x_3)\,, \quad q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \ (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\,,.$$

Exercice 4. On considère la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^3$ par
$$\forall x = (x_1, x_2, x_3)\,, \quad q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\,.$$

1. Donner la matrice de q dans la base canonique.
2. Faire une réduction de Gauss de q.
3. Déterminer le rang et la signature de q.

4. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$f_1 := \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ , \ f_2 := \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \ , \ f_3 := \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right) .$$

Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$. Pour tout x de $\mathbb{R}^3$, exprimer $q(x)$ dans cette base.

Produits scalaires euclidiens

Exercice 5. On considère l'espace vectoriel E des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall P \in E \ , \ \forall Q \in E \, , \quad f(P,Q) = \int_0^1 P(t)\, Q(t)\, dt \, .$$

1. Montrer que f est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que

$$\forall P \in E \ , \ \forall Q \in E \, , \left(\int_0^1 P(t)\, Q(t)\, dt\right)^2 \leq \left(\int_0^1 P(t)^2\, dt\right) \left(\int_0^1 Q(t)^2\, dt\right) .$$

3. Déterminer une base de E orthonormée pour f.
4. Déterminer l'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par le vecteur X^2.

Exercice 6. On considère l'espace vectoriel E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall A \in E \ , \ \forall B \in E \, , \quad f(A,B) = \operatorname{tr}\left({}^t AB\right) .$$

1. Montrer que f est un produit scalaire sur E.
2. Soit $F = \{A \in E \ , \ \operatorname{tr}(A) = 0\}$. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E. Déterminer $F^{\perp}$.
3. Déterminer une base de E orthonormée pour f.

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, on considère les deux vecteurs $b_1 = (1, -1, 2)$, $b_2 = (2, 1, -1)$, ainsi que le sous-espace vectoriel F engendré par ces deux vecteurs.

1. En utilisant la méthode de Gram-Schmidt, trouver une base orthonormée de F.
2. Déterminer la projection orthogonale du vecteur $u = (1, 2, 3)$ sur F.
3. Reprendre les questions précédentes en remplaçant F par le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $b_1 = (1, 1, 1, 0)$, $b_2 = (0, 1, 1, 1)$, $b_3 = (1, 0, 1, 1)$ et u par le vecteur $(1, 1, 1, 1)$.

En guise de révision

Exercice 8. (*posé en examen de contrôle continu en 2005-2006*).

Vrai ☐ Faux ☐ Soit Q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par $Q(x, y) = y^2 + 2xy$. Sa forme polaire est $B((x, y), (x', y')) = xy' + yy' + yx'$.

Vrai ☐ Faux ☐ Soit ℓ_1, ℓ_2 deux formes linéaires indépendantes sur E. La forme polaire de la forme quadratique $v \in E \to \ell_1(v)\ell_2(v)$ est la forme bilinéaire $(v, w) \in E \times E \to \ell_1(v)\ell_2(w)$.

Vrai ☐ Faux ☐ Soit B la forme bilinéaire définie sur l'espace $\mathbb{R}_5[X]$ des polynômes de degré au plus 5 par $B(P, Q) = \int_{-1}^{1} [P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t)]dt$. La forme quadratique associée est $P \in \mathbb{R}_5[X] \to P^2(1) - P^2(-1)$.

Vrai ☐ Faux ☐ Soit $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de l'espace E. Si A_1, A_2 sont les matrices respectives des formes quadratiques Q_1, Q_2 relativement à la base $\mathbf{b}$, la forme $Q_1 + Q_2$ a pour matrice $A_1 + A_2$ relativement à la base $\mathbf{b}$.

Vrai ☐ Faux ☐ Le rang d'une forme quadratique non nulle est au moins égal à 1.

Vrai ☐ Faux ☐ Le rang de la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par $Q(x, y, z) = yz - x^2$ est 2.

Vrai ☐ Faux ☐ Si la signature de Q est (n_1, n_2), la signature de la forme $-2Q$ est $(2n_2, 2n_1)$.

Vrai ☐ Faux ☐ Soit Q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par $Q(x, y) = xy$. Le vecteur $v = (0, 1)$ est orthogonal à lui même relativement à Q.

Vrai ☐ Faux ☐ Soit Q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par $Q(x, y) = x^2 - y^2$. Le vecteur $v = (1, 1)$ est orthogonal à $w = (1, -1)$ relativement à Q.

Vrai ☐ Faux ☐ Soit E un espace euclidien de dimension n. Une famille orthogonale de n vecteurs est une base de E.

Exercice 9. (*posé en examen de contrôle continu en 2004-2005*)
Soit E l'espace vectoriel des matrices réelles d'ordre 2

$$E = \left\{ x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soit q la fonction définie sur E par

$$q(x) = ad - bc, \quad x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E.$$

1. Montrer que q est une forme quadratique et donner sa forme polaire φ.
2. (a) Donner une décomposition de q en somme de carrés de formes linéaires indépendantes.
   (b) Quel est le rang de q ?
   (c) Quelle est la signature de q ?
3. Soit $x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer l'orthogonal H_0 de x_0.
   (b) Quelle est la dimension de H_0 ?
   (c) A-t-on $H_0 \oplus \mathbb{R}x_0 = E$?
4. Donner une base orthogonale $\mathbf{b}$ de E pour la forme quadratique q. Quelle est la matrice de q dans cette base $\mathbf{b}$?

Université de Nantes **Année 2006-2007**
Faculté des Sciences et des Techniques
Département de Mathématiques

S3M02-Géométrie euclidienne - Série d'exercices 3

Isométries en dimension 2 et 3

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3, muni de son produit scalaire usuel $< \cdot\,, \cdot >$, on considère un vecteur non nul u. On note D la droite vectorielle engendrée par u, pr_D la projection orthogonale sur D, $\mathrm{pr}_{D^\perp}$ la projection orthogonale sur $D^\perp$, s_D la symétrie orthogonale par rapport à la droite D, $s_{D^\perp}$ la symétrie orthogonale par rapport au plan $D^\perp$. Pour tout x de $\mathbb{R}^n$, montrer que

$$\mathrm{pr}_D(x) = \frac{< x, u >}{< u, u >}\, u\,, \qquad \mathrm{pr}_{D^\perp}(x) = x - \frac{< x, u >}{< u, u >}\, u\,,$$
$$s_D(x) = -x + 2\,\frac{< x, u >}{< u, u >}\, u\,, \qquad s_{D^\perp}(x) = x - 2\,\frac{< x, u >}{< u, u >}\, u\,.$$

Exercice 2.

1. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire euclidien, on considère la symétrie orthogonale s_1 par rapport à la droite D_1 engendrée par le vecteur $u_1 = (1, 1)$, la symétrie orthogonale s_2 par rapport à la droite D_2 engendrée par le vecteur $u_2 = (0, 1)$.
   (a) Donner les matrices de s_1 et s_2 dans la base canonique.
   (b) Caractériser géométriquement la transformation $s_1 \circ s_2$.
2. Plus généralement, soient u_1 et u_2 deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$, soient s_1 la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par u_1, s_2 la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par u_2. On pose $\theta = \widehat{(u_1, u_2)}$. Caractériser géométriquement la transformation $s_1 \circ s_2$.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel $< \cdot\,, \cdot >$, on considère un vecteur $u = (u_1, u_2, u_3)$ de norme 1. On considère la matrice $A := \mathrm{Id} - 2\,U\,{}^tU$, où U est la matrice colonne qui représente le vecteur u dans la base canonique. Montrer que A est orthogonale et qu'elle représente dans la base canonique la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^3 u_i\, x_i = 0$.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel $< \cdot\,, \cdot >$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Montrer que $F = \{x \in \mathbb{R}^3\,,\ f(x) = -x\}$ est une droite vectorielle.
3. Déterminer $F^\perp$, puis donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dont le premier vecteur est dans F. Écrire la matrice de f dans cette base. Conclusion ?

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel $< \cdot\,, \cdot >$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Montrer que $F = \{x \in \mathbb{R}^3\,,\ f(x) = x\}$ est une droite vectorielle.

3. Déterminer $F^{\perp}$, puis donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dont le premier vecteur est dans F. Écrire la matrice de f dans cette base. Décrire géométriquement la transformation f.

Exercice 6. Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique.
Pour $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ dans $\mathbb{R}^3$, on pose : $x \wedge y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$.

1. Montrer que pour tous x et y dans $\mathbb{R}^3$, $x \wedge y$ est orthogonal à x et à y.
2. Montrer que pour tous x et y dans $\mathbb{R}^3$, $\|x \wedge y\|^2 + < x, y >^2 = \|x\|^2 \, \|y\|^2$. Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, soit u un vecteur unitaire. Soit α un réel $\in [-\pi, \pi]$. Pour tout x de $\mathbb{R}^3$, on définit

$$f(x) = (1 - \cos\alpha) \ < u, x > \ u + \cos(\alpha)\, x + \sin(\alpha)\, u \wedge x\,.$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^3$ unitaire et orthogonal à v. Vérifier que la base $(u, v, u \wedge v)$ est orthonormée, puis donner la matrice de f dans cette base. Interpréter géométriquement le résultat.

Des exercices complémentaires

Exercice 8. Soit $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique noté $< \cdot, \cdot >$. À chaque y appartenant à $\mathbb{R}^3$, on fait correspondre ℓ_y où $\ell_y(x) =< x, y >$.

1. Vérifier que pour tout y de $\mathbb{R}^3$, ℓ_y est linéaire.
2. Montrer que (b_1, b_2, b_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si les applications linéaires ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 sont indépendantes dans le dual de $\mathbb{R}^3$. On peut le faire directement ou en comparant la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ à la base (b_1, b_2, b_3) et celle de la base canonique (e_1^*, e_2^*, e_3^*) du dual de $\mathbb{R}^3$ à la base (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3).

Exercice 9. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathbb{R}^n$ soit la somme directe de F et G.

1. Montrer que si p est la projection sur F parallèlement à G, alors $p^2 = p$.
2. Réciproquement, montrer que si p est linéaire, non nulle et vérifie $p^2 = p$, alors $\mathbb{R}^n$ est la somme directe de $\operatorname{Im} p$ et de $\operatorname{Ker}\, p$.
3. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Soit p une application linéaire non nulle. Montrer que p est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, si et seulement si $p^2 = p$ et $p^* = p$.

Exercice 10. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathbb{R}^n$ soit la somme directe de F et G.

1. Montrer que si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors $s^2 = \mathrm{Id}$.
2. Réciproquement, montrer que si s est linéaire différente de l'identité et vérifie $s^2 = \mathrm{Id}$, alors s est une symétrie.
3. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Soit s une application linéaire différente de l'identité. Montrer que s est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, si et seulement si $s^2 = \mathrm{Id}$ et $s^* = s$.

Exercice 11. Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, telles que, pour tout x et y, $< f(x), y >=< x, g(y) >$. Montrer que f et g sont linéaires.

Université de Nantes **Année 2006-2007**
Faculté des Sciences et des Techniques
Département de Mathématiques

S3M02-Géométrie euclidienne - Série d'exercices 4
Barycentres et applications affines

Exercice 1. Soient $A_1, \ldots, A_n$ n points de l'espace affine $\mathbb{R}^p$. On note G le barycentre des points (A_i, α_i), avec $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \neq 0$. Pour tout point M de $\mathbb{R}^p$, on note $f(M) := \sum_{i=1}^n \alpha_i \, \|\overrightarrow{MA_i}\|^2$.

1. Montrer que, $\forall M \in \mathbb{R}^p$, $f(M) = f(G) + (\sum_{i=1}^n \alpha_i) \, \|\overrightarrow{MG}\|^2$.
2. En déduire que si G est l'isobarycentre des points A_i, alors l'application $M \mapsto \sum_{i=1}^n \|\overrightarrow{MA_i}\|^2$ admet un minimum en G.

Exercice 2. Soient A, B, C trois points de l'espace affine $\mathbb{R}^3$. On note I, J, K les milieux respectifs de BC, CA et AB. Montrer que pour tout point M de $\mathbb{R}^3$,

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}.$$

Exercice 3. Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, soit ABC un triangle équilatéral.

1. Montrer que l'isobarycentre G des points A, B et C est le point d'intersection des hauteurs.
2. Soit M un point à l'intérieur du triangle. Montrer que la somme des distances de M aux trois côtés du triangle est égale à la somme des distances de G aux trois côtés du triangle.

Exercice 4. Soient A et B deux points distincts de l'espace affine $\mathbb{R}^3$. Soit M un point quelconque de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que pour tout point H de la droite (AB), on a $\overrightarrow{MH} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}$.
2. En déduire que la distance du point M à la droite (AB) est égale à $\left\| \overrightarrow{MA} \wedge \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \right\|$.
3. Soit D la droite affine de $\mathbb{R}^2$ d'équation $ax + by + c = 0$. En utilisant le résultat précédent, exprimer la distance d'un point $M = (x_0, y_0)$ à la droite D.

Exercice 5. Soient A, B, C trois points non alignés du plan affine $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'ensemble

$$\{M \in \mathbb{R}^2 \, : \, d(M, AB) = d(M, AC)\}$$

est l'union des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle en A du triangle ABC. En déduire que les trois bissectrices intérieures sont concourantes, et que la bissectrice intérieure d'un angle et les bissectrices extérieures des deux autres angles sont concourantes.

Exercice 6. Soient D et D' deux droites non concourantes de l'espace affine $\mathbb{R}^3$.

1. Si D et D' sont parallèles, montrer qu'il existe une infinité de couples $(A, A') \in D \times D'$ tels que,
$$\forall (M, M') \in D \times D', \; \|\overrightarrow{AA'}\| \leq \|\overrightarrow{MM'}\|.$$
2. Si D et D' ne sont pas parallèles, montrer qu'il existe un unique couple de points $(A, A') \in D \times D'$ tel que le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ soit orthogonal à la direction de D et à celle de D'. Vérifier que (A, A') est l'unique couple qui rend minimal la distance d'un point de D à un point de D'.

Exercice 7. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire et D une droite affine de $\mathbb{R}^2$. On note $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et s_D la symétrie orthogonale par rapport à D. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $t_{\overrightarrow{u}} \circ s_D = s_D \circ t_{\overrightarrow{u}}$.

Exercice 8. Pour tout couple (M, N) de points distincts du plan affine $\mathbb{R}^2$, on note s_{MN} la symétrie orthogonale par rapport à la droite (MN). Soit $ABCD$ un rectangle du plan affine. Montrer que la transformation $s_{AB} \circ s_{BC} \circ s_{CD} \circ s_{DA}$ est une translation, dont on déterminera le vecteur associé.

Exercice 9. Montrer que la composition de deux rotations (affines) de $\mathbb{R}^2$ est une rotation ou une translation.

Exercice 10. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\,;\,(x, y) \longmapsto (x' = 1 - x, y' = 2 + 3\,y)$.

1. Montrer que f est affine. Déterminer le ou les points fixes éventuels de f. Construire géométriquement l'image par f d'un point M quelconque du plan.
2. Soit ABC un triangle du plan. Que peut-on dire de l'image du triangle ABC par f ? Que peut-on dire de l'image par f de la médiane issue de A ?
3. Quelle est l'image du cercle de centre $(1/2, -1)$ et de rayon 1 par f ?

Exercice 11. *Isométries du plan affine.*
Reconnaître les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par

1. $x' = 1/\sqrt{2}(x - y + 1 + \sqrt{2})\,;\, y' = 1/\sqrt{2}(x + y - 3 + 2\sqrt{2})$.
   Identifier l'application linéaire associée et chercher le point fixe.
2. $x' = 1/5(-3x + 4y + 6)\,;\, y' = 1/5(4x + 3y + 22)$.
   Identifier l'application linéaire associée et procéder à un changement de base orthonormée dans laquelle l'application linéaire associée est diagonale.

Exercice 12. *Isométries de l'espace affine.*
Reconnaître les applications de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définies par

1. $x' = 1/3(-x + 2y + 2z - 4)\,;\, y' = 1/3(2x - y + 2z + 2)\,;\, z' = 1/3(2x + 2y - z + 2)$.
   Identifier l'application linéaire associée et chercher l'ensemble des points fixes de f.
   Trouver un repère orthonormé dont le premier axe est invariant par f.
   Montrer que f est une rotation.
2. $x' = 1/3(x - 2y + 2z - 6)\,;\, y' = 1/3(-2x + y + 2z - 6)\,;\, z' = 1/3(2x + 2y + z + 6)$.
   Identifier l'application linéaire associée et chercher les points fixes.
   Trouver un repère orthonormé dont les deux premiers axes sont invariants par f.
   Montrer que f est une symétrie.
3. $x' = -z + 1\,;\, y' = x\,;\, z' = y - 2$.
   Identifier l'application linéaire associée. Chercher le point fixe de f et déterminer les vecteurs antivariants par l'application linéaire associée (c'est-à-dire les vecteurs transformés en leur opposé).
   Trouver un repère orthonormé centré au point fixe, et dont le premier axe est de direction antivariante.
   Montrer que f est une symétrie-rotation.
4. $x' = -z + 1\,;\, y' = -x\,;\, z' = y - 2$.
   Identifier l'application linéaire associée et vérifier que f n'admet pas de point fixe.
   Déterminer les vecteurs invariants par l'application linéaire associée, et trouver un repère orthonormé dont le premier axe est globalement invariant par f.
   Montrer que f est un vissage.
5. $x' = 1/3(x - 2y + 2z + 6)\,;\, y' = 1/3(-2x + y + 2z)\,;\, z' = 1/3(2x + 2y + z)$.
   Identifier l'application linéaire associée et vérifier qu'il n'y a pas de point fixe.
   Déterminer les vecteurs invariants par l'application linéaire associée, et trouver un repère orthonormé dont le premier axe est globalement invariant par f.
   Montrer que f est une symétrie-translation.

Université de Nantes
Faculté des Sciences et des Techniques
Département de Mathématiques **Année 2006-2007**

S3M02-Géométrie euclidienne - Série d'exercices 5

Exercice 1. Donner une équation réduite des coniques d'équations respectives :

$$2\,x^2 + 2\,xy + 2\,y^2 + 2\,x - 2\,y - 1 = 0\,, \tag{1}$$
$$xy + 3\,x + 5\,y - 3 = 0\,, \tag{2}$$
$$3\,x^2 + 6\,xy + 3\,y^2 - 8\,x + 8\,y + 4 = 0\,. \tag{3}$$

Dessiner chacune de ces coniques en précisant axes de symétrie et centre éventuels.

Le sujet de l'examen de janvier 2006[1]

I

Soit $\mathbb{R}^2$ le plan euclidien et, pour $a \in \mathbb{R}$, la fonction P_a définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$P_a(M) = x^2 + 2axy + y^2 + 4\sqrt{2}x, \quad M = (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

où (x, y) sont les coordonnées du point M dans le repère canonique du plan $\mathbb{R}^2$.
On note par Q_a la forme quadratique constituée de ses termes de degré 2.

(**1**) Discuter suivant les valeurs de a le rang et la signature de la forme Q_a.

(**2**.a) Exprimer la forme quadratique Q_a dans des coordonnées relativement à la base (v_+, v_-) avec $v_\pm = (1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$.

(**2**.b) Déterminer le point C_a tel que P_a s'exprime relativement au repère cartésien centré en C_a et de directions (v_+, v_-) comme la somme de deux monômes non constants et d'une constante.

(**2**.c) Tracer la partie du plan d'équation $P_1(M) = 0$.

(**2**.d) Tracer la partie du plan d'équation $P_2(M) = 0$.

II

Si $\mathcal{F}$ est une partie de l'espace euclidien E, on note par $\Phi_{\mathcal{F}}$ l'ensemble des isométries φ affines de l'espace E telle que $\varphi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, c'est à dire telle que $\varphi(e) \in \mathcal{F}$ pour tout $e \in \mathcal{F}$ et que pour tout $e' \in \mathcal{F}$ il existe $e \in \mathcal{F}$ vérifiant $\varphi(e) = e'$.

(**1**) Soit $\mathcal{K}$ la partie du plan euclidien

$$\mathcal{K} = \{A = (1, 1), B = (1, -1), C = (-1, -1), D = (-1, 1)\}.$$

(**1**.a) Soit O l'isobarycentre de A, B, C, D. Montrer que $\varphi(O) = O$ pour toute isométrie $\varphi \in \Phi_{\mathcal{K}}$.

(**1**.b) Montrer que $\Phi_{\mathcal{K}}$ contient 3 rotations non égales à l'identité. Donner pour chacune d'elle son centre et son angle.

(**1**.c) Montrer que $\Phi_{\mathcal{K}}$ contient 4 symétries dont on précisera les éléments géométriques.

(**1**.d) Donner la liste de tous les éléments de $\Phi_{\mathcal{K}}$.

(**2**) Soit $\mathcal{Z}$ la partie de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ définie par

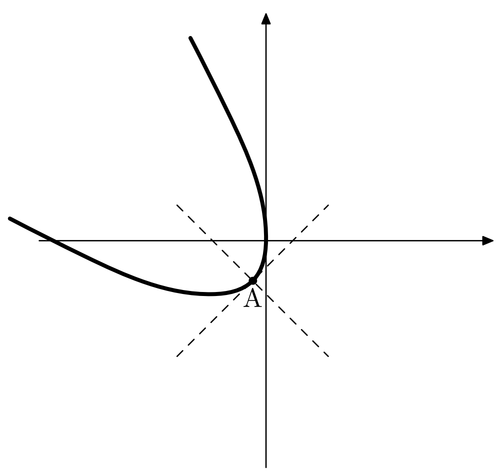
$$\mathcal{Z} = \{(0, 0, z), z \in \mathbb{Z}\}.$$

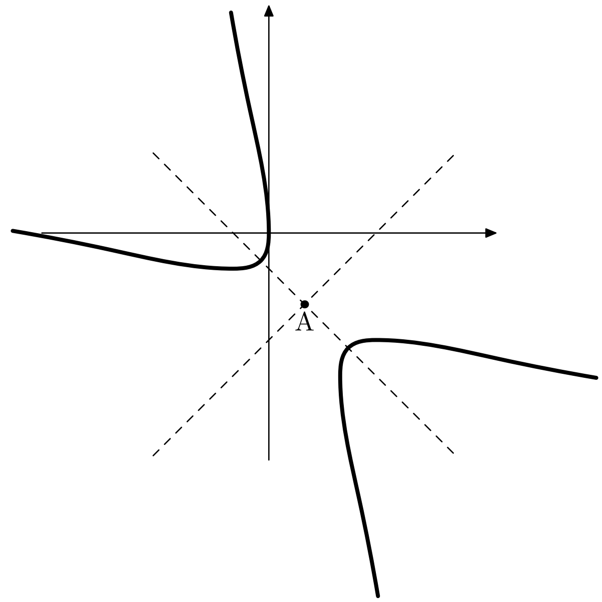
(**2**.a) Décrire les éléments de $\Phi_{\mathcal{Z}}$ laissant fixe au moins un point de $\mathcal{Z}$.

[1] Des indications sont données au verso.

Indications. Ex I. (2.c) C'est une parabole de sommet $A = (-\frac{1}{4}\sqrt{2}, -\frac{3}{4}\sqrt{2})$.

Ex I. (2.d) C'est une hyperbole de centre $A = \frac{\sqrt{2}}{3}(2,-4)$, qui, dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{v_+}, \overrightarrow{v_-})$ a pour sommets $(0, \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$, et pour asymptotes les droites d'équation $Y = \pm\sqrt{3}\,X$.





Ex II. (1.a) Toute isométrie φ de $\Phi_{\mathcal{F}}$ transforme les sommets du carré en sommets du carré : si M est un sommet, alors on doit avoir $\|\overrightarrow{O\varphi(M)}\| = \|\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}\| = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{2}$, donc $\varphi(M)$ est aussi un sommet. Il suffit alors de remarquer qu'une application affine conserve les barycentres...
(1.d) Soit φ une isométrie de $\Phi_{\mathcal{F}}$ distincte de l'identité. Si φ a un seul point fixe, alors φ est une rotation de centre O (pourquoi ?) et elle envoie le sommet A sur B, C ou D : c'est donc l'une des rotations décrites en (1.b). Si φ a plus d'un point fixe alors c'est une symétrie (pourquoi ?). Si le sommet A reste fixe, l'axe de cette symétrie est la droite (OA). Si A est envoyé sur B, l'axe de la symétrie est la médiatrice des points A et B, etc...On retrouve ainsi les symétries décrites en (1.c).

(2.a) Remarquer d'abord que $\mathcal{Z}$ est une droite vectorielle. Sa direction $\overrightarrow{\mathcal{Z}}$ est donc elle-même ! Soit φ une isométrie de $\Phi_{\mathcal{Z}}$ différente de l'identité et soit $A \in \mathcal{Z}$ un point fixe de φ. Pour tout point M de l'espace, on a donc $\varphi(M) = A + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AM})$, où $\overrightarrow{\varphi}$ l'application linéaire associée à φ. Il suffit donc de d'étudier cette isométrie vectorielle $\overrightarrow{\varphi}$. Le vecteur $\overrightarrow{v} = (0,0,1)$ est un vecteur directeur de la droite vectorielle $\mathcal{Z}$. Puisque φ laisse globalement invariante la droite $\mathcal{Z}$, on a $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{v}) = \pm\overrightarrow{v}$ (le point $A + \overrightarrow{v} \in \mathcal{Z}$, donc $\varphi(A + \overrightarrow{v}) = A + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{v})$ appartient aussi à la droite et s'écrit donc $A + \lambda\,\overrightarrow{v}$, de sorte que $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{v}) = \lambda\,\overrightarrow{v}$, et comme $\overrightarrow{\varphi}$ est une isométrie...). Si $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$, alors $\overrightarrow{\varphi}$ est ou bien une rotation vectorielle d'axe $\mathcal{Z}$ ou bien une symétrie par rapport à un plan $\mathcal{P}$ contenant la droite vectorielle $\mathcal{Z}$ (considérer la matrice de $\overrightarrow{\varphi}$ dans une base orthonormée dont le premier vecteur est $\overrightarrow{v}$). Dans le premier cas la transformation φ est alors une rotation affine d'axe $A + \mathcal{Z} = \mathcal{Z}$, dans le second cas, c'est la symétrie par rapport au plan $A + \mathcal{P} = \mathcal{P}$. Si $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$, alors ou bien $\overrightarrow{\varphi}$ est une symétrie-rotation d'axe $\mathcal{Z}$ et alors φ est une symétrie-rotation d'axe $\mathcal{Z}$, le plan de la symétrie étant $A + \mathcal{Z}^{\perp}$, ou bien $\overrightarrow{\varphi}$ est un retournement (rotation d'angle π) donc l'axe $\overrightarrow{D}$ est orthogonal à $\mathcal{Z}$ et dans ce cas φ est le retournement d'axe $A + \overrightarrow{D}$.