Université de Nantes **Année 2006-2007**
Faculté des Sciences et des Techniques
Département de Mathématiques

S3M0200-Géométrie euclidienne
Série d'exercices 1

Des exercices de révision.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Exprimer $f((x, y, z))$ en fonction de x, y et z.
2. On pose $U = \{u \in \mathbb{R}^3 \ ; \ f(u) = -2u\}$ et $V = \{v \in \mathbb{R}^3 \ ; \ f(v) = 4v\}$. Montrer que
   (a) U et V sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une base.
   (b) $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.
3. Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1, 0, -1), e_2 = (0, 1, -1)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner la matrice B de f dans la base $\mathcal{E}$. Retrouver le résultat en appliquant la formule de changement de base.

Exercice 2. Soit $E := \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2. On considère l'application $f : E \longrightarrow E$, définie par:

$$f(a\,X^2 + b\,X + c) = c\,X^2 + b\,X + a\,.$$

1. (a) Montrer que f est un isomorphisme.
   (b) Ecrire la matrice A de f dans la base canonique de E. Calculer A^2 et A^{-1}.
2. On considère l'application $g : E \longrightarrow E$, définie par:

$$\forall P \in E\,, \qquad g(P) = f(P) - P\,.$$

   (a) Montrer que g est linéaire.
   (b) Déterminer le noyau de g et donner sa dimension.
   (c) Quelle est la dimension de l'image $\mathrm{Im}g$ de g? Donner une ou des équation(s) caractéristique(s) de $\mathrm{Im}g$.

Exercice 3. On rappelle que l'ensemble E des applications linéaires $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, muni des opérations usuelles, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Les éléments de E sont appelés *formes linéaires* sur $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que le noyau d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, non nulle, est de dimension 2.
2. Pour $i = 1, 2, 3$, on considère l'application $f_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in E\,, \qquad f_i(x_1, x_2, x_3) = x_i\,.$$

   (a) Montrer que les f_i sont linéaires et qu'elles forment une base de E.

(b) Pour $i = 1, 2, 3$, on considère les applications $\varphi_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, définies pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par :

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= x_1 + x_2 + x_3 \\
\varphi_2(x) &= x_1 + x_2 \\
\varphi_3(x) &= x_1 + x_3\,.
\end{aligned}$$

Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E.

Formes quadratiques et formes bilinéaires symétriques : définition, changements de bases.

Exercice 4. Parmi les applications suivantes définies sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, lesquelles sont des formes bilinéaires symétriques? Pour celles qui sont des formes bilinéaires symétriques, préciser leur matrice dans la base canonique.

$$\begin{aligned}
f_1(x, y) &= x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + x_3^2 y_3^2\,, \ \text{ où } x = (x_1, x_2, x_3) \text{ et } y = (y_1, y_2, y_3), \\
f_2(x, y) &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1\,, \\
f_3(x, y) &= x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3\,, \\
f_4(x, y) &= (x_1 - 2\,x_2)(y_1 - 2\,y_2) + x_2 y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)\,.
\end{aligned}$$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tous $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y) = x_1\,y_1 + 4\,x_3\,y_3 + x_1\,y_2 + x_2\,y_1 + 2\,x_1\,y_3 + 2\,x_3\,y_1 + 3\,x_2\,y_3 + 3\,x_3\,y_2\,.$$

1. Vérifier que f est une forme bilinéaire symétrique. On note q la forme quadratique associée.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Vérifier que $\mathcal{B}' = (e_1' = (1, 0, 0), e_2' = (-1, 1, 0), e_3' = (-3, 1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de f dans cette base. Pour tous x et y dans $\mathbb{R}^3$, calculer $f(x, y)$ et $q(x)$ dans cette base.
4. Donner une base q-orthogonale de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6. On considère la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3)\,, \quad q(x) = x_1^2 + 5\,x_2^2 + 54\,x_3^2 - 4\,x_1 x_2 + 14\,x_1 x_3 - 32\,x_2 x_3\,.$$

On désigne par f la forme bilinéaire symétrique associée à q.

1. Ecrire la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. Pour tous x et y dans $\mathbb{R}^3$, déterminer $f(x, y)$ dans cette base.
2. Vérifier que $\mathcal{B}' = (e_1' = (1, 0, 0), e_2' = (2, 1, 0), e_3' = (-3, 2, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de f dans cette base. Pour tout x de $\mathbb{R}^3$, déterminer $q(x)$ dans cette base.
3. Déterminer l'orthogonal, pour la forme quadratique q, du sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(-3, 2, 1)$.