Université de Nantes **Année 2006-2007**
Faculté des Sciences et des Techniques
Département de Mathématiques

S3M0200-Géométrie euclidienne
Série d'exercices 2

Bases duales et "antéduales"

Exercice 1.

1. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose
$$f_1 := e_1\,, \quad f_2 := e_1 + e_2\,, \quad f_3 = e_1 + e_2 + e_3\,.$$
Vérifier que (f_1, f_2, f_3) est une base et déterminer sa base duale.

2. On considère maintenant les trois formes linéaires ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, définies sur $\mathbb{R}^3$ par
$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\,,\ \ell_1(x) = x_1\,,\ \ell_2(x) = x_1 + x_2\,,\ \ell_3(x) = x_1 + x_2 + x_3\,.$$
Montrer que (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est une base du dual de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la base de $\mathbb{R}^3$ dont c'est la base duale.

Formes quadratiques - Réduction de Gauss

Exercice 2. Pour a réel donné, on considère la forme quadratique q_a définie sur $\mathbb{R}^2$ par:
$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,, \quad q_a(x) = x_1^2 + 2a\,x_1\,x_2 + x_2^2\,.$$

1. Déterminer suivant les valeurs de a, le rang et la signature de q_a. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles la forme bilinéaire symétrique f_a associée à q_a est un produit scalaire euclidien?

2. Déterminer une base de E q_a-orthogonale et écrire la matrice de q_a dans cette base.

3. On considère le cas où $a = -2$.

   (a) Déterminer et dessiner l'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par le vecteur $e_1 = (1, 0)$.

   (b) Déterminer l'orthogonal H de la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u = (1, 2 - \sqrt{3})$. A-t-on $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\,u \oplus H$?

Exercice 3.

1. On considère la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par
$$\forall x = (x_1, x_2, x_3)\,, \quad q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4\,(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\,.$$
Déterminer le rang et la signature de q. Trouver une base q-orthogonale et écrire la matrice de q dans cette base.

2. Mêmes questions avec la forme quadratique définie par
$$\forall x = (x_1, x_2, x_3)\,, \quad q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \,(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)\,,.$$

Exercice 4. On considère la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^3$ par
$$\forall x = (x_1, x_2, x_3)\,, \quad q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\,.$$

1. Donner la matrice de q dans la base canonique.
2. Faire une réduction de Gauss de q.
3. Déterminer le rang et la signature de q.
4. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$$f_1 := \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\,,\; f_2 := \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\,,\; f_3 := \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\,.$$
Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$. Pour tout x de $\mathbb{R}^3$, exprimer $q(x)$ dans cette base.

Produits scalaires euclidiens

Exercice 5. On considère l'espace vectoriel E des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :
$$\forall P \in E\,,\; \forall Q \in E\,, \quad f(P, Q) = \int_0^1 P(t)\,Q(t)\,dt\,.$$

1. Montrer que f est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que
$$\forall P \in E\,,\; \forall Q \in E\,, \left(\int_0^1 P(t)\,Q(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_0^1 P(t)^2\,dt\right)\left(\int_0^1 Q(t)^2\,dt\right)\,.$$
3. Déterminer une base de E orthonormée pour f.
4. Déterminer l'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par le vecteur X^2.

Exercice 6. On considère l'espace vectoriel E des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Soit $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par :
$$\forall A \in E\,,\; \forall B \in E\,, \quad f(A, B) = \mathrm{tr}\,({}^tAB)\,.$$

1. Montrer que f est un produit scalaire sur E.
2. Soit $F = \{A \in E\;,\; \mathrm{tr}(A) = 0\}$. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E. Déterminer $F^{\perp}$.

3. Déterminer une base de E orthonormée pour f.

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, on considère les deux vecteurs $b_1 = (1, -1, 2)$, $b_2 = (2, 1, -1)$, ainsi que le sous-espace vectoriel F engendré par ces deux vecteurs.

1. En utilisant la méthode de Gram-Schmidt, trouver une base orthonormée de F.
2. Déterminer la projection orthogonale du vecteur $u = (1, 2, 3)$ sur F.
3. Reprendre les questions précédentes en remplaçant F par le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $b_1 = (1, 1, 1, 0)$, $b_2 = (0, 1, 1, 1)$, $b_3 = (1, 0, 1, 1)$ et u par le vecteur $(1, 1, 1, 1)$.

En guise de révision

Exercice 8. (*posé en examen de contrôle continu en 2005-2006*).

Vrai □ Faux □ Soit Q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par $Q(x, y) = y^2 + 2xy$. Sa forme polaire est $B((x, y), (x', y')) = xy' + yy' + yx'$.

Vrai □ Faux □ Soit ℓ_1, ℓ_2 deux formes linéaires indépendantes sur E. La forme polaire de la forme quadratique $v \in E \to \ell_1(v)\ell_2(v)$ est la forme bilinéaire $(v, w) \in E \times E \to \ell_1(v)\ell_2(w)$.

Vrai □ Faux □ Soit B la forme bilinéaire définie sur l'espace $\mathbb{R}_5[X]$ des polynômes de degré au plus 5 par $B(P, Q) = \int_{-1}^{1} [P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t)]dt$. La forme quadratique associée est $P \in \mathbb{R}_5[X] \to P^2(1) - P^2(-1)$.

Vrai □ Faux □ Soit $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de l'espace E. Si A_1, A_2 sont les matrices respectives des formes quadratiques Q_1, Q_2 relativement à la base $\mathbf{b}$, la forme $Q_1 + Q_2$ a pour matrice $A_1 + A_2$ relativement à la base $\mathbf{b}$.

Vrai □ Faux □ Le rang d'une forme quadratique non nulle est au moins égal à 1.

Vrai □ Faux □ Le rang de la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par $Q(x, y, z) = yz - x^2$ est 2.

Vrai □ Faux □ Si la signature de Q est (n_1, n_2), la signature de la forme $-2Q$ est $(2n_2, 2n_1)$.

Vrai □ Faux □ Soit Q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par $Q(x, y) = xy$. Le vecteur $v = (0, 1)$ est orthogonal à lui même relativement à Q.

Vrai □ Faux □ Soit Q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par $Q(x, y) = x^2 - y^2$. Le vecteur $v = (1, 1)$ est orthogonal à $w = (1, -1)$ relativement à Q.

Vrai □ Faux □ Soit E un espace euclidien de dimension n. Une famille orthogonale de n vecteurs est une base de E.

Exercice 9. (*posé en examen de contrôle continu en 2004-2005*)
Soit E l'espace vectoriel des matrices réelles d'ordre 2

$$E = \left\{ x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soit q la fonction définie sur E par

$$q(x) = ad - bc, \quad x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E.$$

1. Montrer que q est une forme quadratique et donner sa forme polaire φ.
2. (a) Donner une décomposition de q en somme de carrés de formes linéaires indépendantes.
   (b) Quel est le rang de q ?
   (c) Quelle est la signature de q ?
3. Soit $x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer l'orthogonal H_0 de x_0.
   (b) Quelle est la dimension de H_0 ?
   (c) A-t-on $H_0 \oplus \mathbb{R}x_0 = E$?
4. Donner une base orthogonale $\mathbf{b}$ de E pour la forme quadratique q. Quelle est la matrice de q dans cette base $\mathbf{b}$?