

S3M02-Géométrie euclidienne - Série d'exercices 3

Isométries en dimension 2 et 3

Exercice 1. Dans \mathbb{R}^n , $n = 2$ ou 3 , muni de son produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on considère un vecteur non nul u . On note D la droite vectorielle engendrée par u , pr_D la projection orthogonale sur D , pr_{D^\perp} la projection orthogonale sur D^\perp , s_D la symétrie orthogonale par rapport à la droite D , s_{D^\perp} la symétrie orthogonale par rapport au plan D^\perp . Pour tout x de \mathbb{R}^n , montrer que

$$\begin{aligned} \text{pr}_D(x) &= \frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u, & \text{pr}_{D^\perp}(x) &= x - \frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u, \\ s_D(x) &= -x + 2 \frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u, & s_{D^\perp}(x) &= x - 2 \frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u. \end{aligned}$$

Exercice 2.

- Dans \mathbb{R}^2 muni de son produit scalaire euclidien, on considère la symétrie orthogonale s_1 par rapport à la droite D_1 engendrée par le vecteur $u_1 = (1, 1)$, la symétrie orthogonale s_2 par rapport à la droite D_2 engendrée par le vecteur $u_2 = (0, 1)$.
 - Donner les matrices de s_1 et s_2 dans la base canonique.
 - Caractériser géométriquement la transformation $s_1 \circ s_2$.
- Plus généralement, soient u_1 et u_2 deux vecteurs non colinéaires de \mathbb{R}^2 , soient s_1 la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par u_1 , s_2 la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par u_2 . On pose $\theta = \widehat{(u_1, u_2)}$. Caractériser géométriquement la transformation $s_1 \circ s_2$.

Exercice 3. Dans \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on considère un vecteur $u = (u_1, u_2, u_3)$ de norme 1. On considère la matrice $A := \text{Id} - 2U^tU$, où U est la matrice colonne qui représente le vecteur u dans la base canonique. Montrer que A est orthogonale et qu'elle représente dans la base canonique la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^3 u_i x_i = 0$.

Exercice 4. Dans \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique \mathcal{B} est :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que f est une isométrie.
- Montrer que $F = \{x \in \mathbb{R}^3, f(x) = -x\}$ est une droite vectorielle.
- Déterminer F^\perp , puis donner une base orthonormée de \mathbb{R}^3 dont le premier vecteur est dans F . Écrire la matrice de f dans cette base. Conclusion?

Exercice 5. Dans \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique \mathcal{B} est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Montrer que $F = \{x \in \mathbb{R}^3, f(x) = x\}$ est une droite vectorielle.
3. Déterminer F^\perp , puis donner une base orthonormée de \mathbb{R}^3 dont le premier vecteur est dans F . Écrire la matrice de f dans cette base. Décrire géométriquement la transformation f .

Exercice 6. Produit vectoriel dans \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire canonique.

Pour $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ dans \mathbb{R}^3 , on pose : $x \wedge y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$.

1. Montrer que pour tous x et y dans \mathbb{R}^3 , $x \wedge y$ est orthogonal à x et à y .
2. Montrer que pour tous x et y dans \mathbb{R}^3 , $\|x \wedge y\|^2 + \langle x, y \rangle^2 = \|x\|^2 \|y\|^2$. Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 7. Dans \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire usuel, soit u un vecteur unitaire. Soit α un réel $\in [-\pi, \pi]$. Pour tout x de \mathbb{R}^3 , on définit

$$f(x) = (1 - \cos \alpha) \langle u, x \rangle u + \cos(\alpha) x + \sin(\alpha) u \wedge x.$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Soit v un vecteur de \mathbb{R}^3 unitaire et orthogonal à u . Vérifier que la base $(u, v, u \wedge v)$ est orthonormée, puis donner la matrice de f dans cette base. Interpréter géométriquement le résultat.

Des exercices complémentaires

Exercice 8. Soit \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. À chaque y appartenant à \mathbb{R}^3 , on fait correspondre ℓ_y où $\ell_y(x) = \langle x, y \rangle$.

1. Vérifier que pour tout y de \mathbb{R}^3 , ℓ_y est linéaire.
2. Montrer que (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est une base de \mathbb{R}^3 si et seulement si les applications linéaires ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 sont indépendantes dans le dual de \mathbb{R}^3 . On peut le faire directement ou en comparant la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{R}^3 à la base (b_1, b_2, b_3) et celle de la base canonique (e_1^*, e_2^*, e_3^*) du dual de \mathbb{R}^3 à la base (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) .

Exercice 9. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n tels que \mathbb{R}^n soit la somme directe de F et G .

1. Montrer que si p est la projection sur F parallèlement à G , alors $p^2 = p$.
2. Réciproquement, montrer que si p est linéaire, non nulle et vérifie $p^2 = p$, alors \mathbb{R}^n est la somme directe de $\text{Im } p$ et de $\text{Ker } p$.
3. On munit \mathbb{R}^n de son produit scalaire canonique. Soit p une application linéaire non nulle. Montrer que p est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , si et seulement si $p^2 = p$ et $p^* = p$.

Exercice 10. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n tels que \mathbb{R}^n soit la somme directe de F et G .

1. Montrer que si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G , alors $s^2 = \text{Id}$.
2. Réciproquement, montrer que si s est linéaire différente de l'identité et vérifie $s^2 = \text{Id}$, alors s est une symétrie.
3. On munit \mathbb{R}^n de son produit scalaire canonique. Soit s une application linéaire différente de l'identité. Montrer que s est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , si et seulement si $s^2 = \text{Id}$ et $s^* = s$.

Exercice 11. Soit f et g deux applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire canonique, telles que, pour tout x et y , $\langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle$. Montrer que f et g sont linéaires.