Université de Nantes **Année 2006-2007**
Faculté des Sciences et des Techniques
Département de Mathématiques

S3M02-Géométrie euclidienne - Série d'exercices 4
Barycentres et applications affines

Exercice 1. Soient $A_1, \ldots, A_n$ n points de l'espace affine $\mathbb{R}^p$. On note G le barycentre des points (A_i, α_i), avec $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \neq 0$. Pour tout point M de $\mathbb{R}^p$, on note $f(M) := \sum_{i=1}^n \alpha_i \, \|\overrightarrow{MA_i}\|^2$.

1. Montrer que, $\forall M \in \mathbb{R}^p$, $f(M) = f(G) + (\sum_{i=1}^n \alpha_i) \, \|\overrightarrow{MG}\|^2$.
2. En déduire que si G est l'isobarycentre des points A_i, alors l'application $M \mapsto \sum_{i=1}^n \|\overrightarrow{MA_i}\|^2$ admet un minimum en G.

Exercice 2. Soient A, B, C trois points de l'espace affine $\mathbb{R}^3$. On note I, J, K les milieux respectifs de BC, CA et AB. Montrer que pour tout point M de $\mathbb{R}^3$,

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}.$$

Exercice 3. Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, soit ABC un triangle équilatéral.

1. Montrer que l'isobarycentre G des points A, B et C est le point d'intersection des hauteurs.
2. Soit M un point à l'intérieur du triangle. Montrer que la somme des distances de M aux trois côtés du triangle est égale à la somme des distances de G aux trois côtés du triangle.

Exercice 4. Soient A et B deux points distincts de l'espace affine $\mathbb{R}^3$. Soit M un point quelconque de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que pour tout point H de la droite (AB), on a $\overrightarrow{MH} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}$.
2. En déduire que la distance du point M à la droite (AB) est égale à $\left\| \overrightarrow{MA} \wedge \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \right\|$.
3. Soit D la droite affine de $\mathbb{R}^2$ d'équation $ax + by + c = 0$. En utilisant le résultat précédent, exprimer la distance d'un point $M = (x_0, y_0)$ à la droite D.

Exercice 5. Soient A, B, C trois points non alignés du plan affine $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'ensemble

$$\{M \in \mathbb{R}^2 \, : \, d(M, AB) = d(M, AC)\}$$

est l'union des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle en A du triangle ABC. En déduire que les trois bissectrices intérieures sont concourantes, et que la bissectrice intérieure d'un angle et les bissectrices extérieures des deux autres angles sont concourantes.

Exercice 6. Soient D et D' deux droites non concourantes de l'espace affine $\mathbb{R}^3$.

1. Si D et D' sont parallèles, montrer qu'il existe une infinité de couples $(A, A') \in D \times D'$ tels que,
$$\forall (M, M') \in D \times D', \; \|\overrightarrow{AA'}\| \leq \|\overrightarrow{MM'}\|.$$
2. Si D et D' ne sont pas parallèles, montrer qu'il existe un unique couple de points $(A, A') \in D \times D'$ tel que le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ soit orthogonal à la direction de D et à celle de D'. Vérifier que (A, A') est l'unique couple qui rend minimal la distance d'un point de D à un point de D'.

Exercice 7. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire et D une droite affine de $\mathbb{R}^2$. On note $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et s_D la symétrie orthogonale par rapport à D. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $t_{\overrightarrow{u}} \circ s_D = s_D \circ t_{\overrightarrow{u}}$.

Exercice 8. Pour tout couple (M, N) de points distincts du plan affine $\mathbb{R}^2$, on note s_{MN} la symétrie orthogonale par rapport à la droite (MN). Soit $ABCD$ un rectangle du plan affine. Montrer que la transformation $s_{AB} \circ s_{BC} \circ s_{CD} \circ s_{DA}$ est une translation, dont on déterminera le vecteur associé.

Exercice 9. Montrer que la composition de deux rotations (affines) de $\mathbb{R}^2$ est une rotation ou une translation.

Exercice 10. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \; ; \; (x, y) \longmapsto (x' = 1 - x, y' = 2 + 3\,y)$.

1. Montrer que f est affine. Déterminer le ou les points fixes éventuels de f. Construire géométriquement l'image par f d'un point M quelconque du plan.

2. Soit ABC un triangle du plan. Que peut-on dire de l'image du triangle ABC par f? Que peut-on dire de l'image par f de la médiane issue de A?

3. Quelle est l'image du cercle de centre $(1/2, -1)$ et de rayon 1 par f?

Exercice 11. *Isométries du plan affine.*
Reconnaître les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par

1. $x' = 1/\sqrt{2}(x - y + 1 + \sqrt{2}) \; ; \; y' = 1/\sqrt{2}(x + y - 3 + 2\sqrt{2})$.
   Identifier l'application linéaire associée et chercher le point fixe.

2. $x' = 1/5(-3x + 4y + 6) \; ; \; y' = 1/5(4x + 3y + 22)$.
   Identifier l'application linéaire associée et procéder à un changement de base orthonormée dans laquelle l'application linéaire associée est diagonale.

Exercice 12. *Isométries de l'espace affine.*
Reconnaître les applications de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définies par

1. $x' = 1/3(-x + 2y + 2z - 4) \; ; \; y' = 1/3(2x - y + 2z + 2) \; ; \; z' = 1/3(2x + 2y - z + 2)$.
   Identifier l'application linéaire associée et chercher l'ensemble des points fixes de f.
   Trouver un repère orthonormé dont le premier axe est invariant par f.
   Montrer que f est une rotation.

2. $x' = 1/3(x - 2y + 2z - 6) \; ; \; y' = 1/3(-2x + y + 2z - 6) \; ; \; z' = 1/3(2x + 2y + z + 6)$.
   Identifier l'application linéaire associée et chercher les points fixes.
   Trouver un repère orthonormé dont les deux premiers axes sont invariants par f.
   Montrer que f est une symétrie.

3. $x' = -z + 1 \; ; \; y' = x \; ; \; z' = y - 2$.
   Identifier l'application linéaire associée. Chercher le point fixe de f et déterminer les vecteurs antivariants par l'application linéaire associée (c'est-à-dire les vecteurs transformés en leur opposé).
   Trouver un repère orthonormé centré au point fixe, et dont le premier axe est de direction antivariante.
   Montrer que f est une symétrie-rotation.

4. $x' = -z + 1 \; ; \; y' = -x \; ; \; z' = y - 2$.
   Identifier l'application linéaire associée et vérifier que f n'admet pas de point fixe.
   Déterminer les vecteurs invariants par l'application linéaire associée, et trouver un repère orthonormé dont le premier axe est globalement invariant par f.
   Montrer que f est un vissage.

5. $x' = 1/3(x - 2y + 2z + 6) \; ; \; y' = 1/3(-2x + y + 2z) \; ; \; z' = 1/3(2x + 2y + z)$.
   Identifier l'application linéaire associée et vérifier qu'il n'y a pas de point fixe.
   Déterminer les vecteurs invariants par l'application linéaire associée, et trouver un repère orthonormé dont le premier axe est globalement invariant par f.
   Montrer que f est une symétrie-translation.