Université de Nantes
Département de Mathématiques

Année 2004-2005
Licence de Maths Classiques, module M62

Devoir libre

À rendre le lundi 7 mars

Exercice I

On note par $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et par $||.||$ la norme associée. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On définit $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $f_3 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}||x||^2, \quad f_2(x) = \langle x, b \rangle, \quad f_3(x) = Ax.$$

1) Justifier que f_1, f_2, f_3 sont différentiables sur $\mathbb{R}^n$ et donner leurs différentielles en tout point.

2) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_1(x) = \frac{1}{2}||Ax||^2 - \langle x, b \rangle.$$

Justifier que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et que sa différentielle en $a \in \mathbb{R}^n$ est donnée par:

$$Df(a)h = \langle {}^t AAa - b, h \rangle.$$

Exercice II

1) Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x - y > 0\}$, $V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2,\ v^2 - 4u > 0\}$ et soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\Phi(x,y) = (xy, x+y)$. Montrer Φ est un C^1-difféomorphisme de U sur V.

2) Soit l'équation aux dérivées partielles:

$$(E) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + 3(x-y)f(x,y) = 0.$$

i) Soit f solution de (E) sur U et soit $g(u,v) = (f \circ \Phi^{-1})(u,v)$. Donner l'équation aux dérivées partielles vérifiée par g sur V et la résoudre.

ii) En déduire les solutions f sur l'ouvert U de l'équation (E).

Exercice III

On dit que $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ est homogène de degré $k (\in \mathbb{R})$ si, pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $f(tx) = t^k f(x)$.

1) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = x^2 \cos(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2})$. Montrer que f est homogène et calculer $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

2) Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et homogène de degré k. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ fixé, la fonction $h(t) = f(tx)(= t^k f(x))$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $Df(x)[x] = kf(x)$.

3) Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et vérifiant: il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $Df(x)[x] = kf(x)$. Montrer que f est homogène de degré k. (On vérifiera que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ fixé, la fonction $h(t) = f(tx)$ est solution d'une équation différentielle sur $]0, +\infty[$).