UNIVERSITÉ DE NANTES
Département de Mathématiques

Année 2004-2005
Licence de Mathématiques
Fonctions réelles de plusieurs variables
M62

Examen du 12 mai 2005
Durée 1h30

La précision, la clarté et la rigueur des explications seront considérées pour la notation.
En particulier, les réponses non justifiées ne pourront pas être prises en compte.
Aucun document autorisé

I

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$F(x,y) = x^6 + y^6 - 6xy, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(**1**) Déterminer tous les points critiques de F.

(**2**) Montrer que

$$F(x,y) \geq 3(x-y)^2$$

si $x^4 \geq 3$ et $y^4 \geq 3$.
En déduire que F est bornée inférieurement sur $\mathbb{R}^2$ et atteint son minimum $\inf_{m\in\mathbb{R}^2} F(m)$.

(**3**) Quels sont les minima locaux de F ? Sont-ils stricts ? Sont-ils globaux ?

(**4**) Déterminer les points (x_0, y_0) au voisinage desquels la courbe d'équation $F(x,y) = 0$ est donnée par le graphe $\{(\varphi_0(y), y), y \in I_0\}$ d'une fonction φ_0. Dans ces conditions, calculer $\varphi_0'(y)$ en fonction de y et $\varphi_0(y)$.

II

Soit N la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$N(x,y) = |x| + |\sin y|^3, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(**1**) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = |t|^3, t \in \mathbb{R}$ est de classe C^2.

(**2**) Montrer que la fonction N admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur l'ouvert Ω défini par

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y), y \in \mathbb{R}\}$$

et montrer qu'elles y sont continues. En déduire que N est de classe C^1 sur Ω.

(**3**) Montrer que la fonction N est de classe C^2 sur Ω.

(**4**) Montrer que N n'est pas différentiable sur l'axe $\{(0,y), y \in \mathbb{R}\}$.

(**5**) Trouver le plus grand ouvert Ω_∞ sur lequel la fonction N est de classe C^∞.