Université de Nantes
Département de Mathématiques

Année 2004-2005
Licence de Maths Classiques, module M62

Liste d'exercices n°1

Chap. 1 : Applications différentiables.

Exercice 1) Étudier la continuité et la différentiabilité des fonctions f définies sur $\mathbb{R}^2$ par
(a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

(b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Dans le cas (b), on pourra chercher à calculer les dérivées partielles, puis montrer que f n'est pas différentiable.

Exercice 2) a) Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|^2 =< x\,,\, x >$, et $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$. Étudier la différentiabilité, et déterminer la différentielle première en tout point où elle existe de ces deux fonctions.
b) Soit $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \dfrac{x}{\|x\|^2}$. Montrer que f est différentiable et que sa différentielle première en tout point est une similitude.

Exercice 3) a) Soit $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, soit $b \in \mathbb{R}^p$ et soit f l'application affine $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ définie par $f(x) = A \cdot x + b$. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $Df(a) = A$.
b) Soit $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application bilinéaire. Montrer que B est différentiable sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et pour tout
$(h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $D\,B((a,b)) : (h,k) \mapsto B(h,b) + B(a,k)$.
c) Montrer que toute application multilinéaire $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{p} \to \mathbb{R}$, est différentiable et déterminer sa différentielle en tout point.

Exercice 4) Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application $f : E \to E$, (que l'on peut considérer comme une fonction de $\mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$), définie par $A \mapsto A^2$. Montrer que f est différentiable et de classe $\mathcal{C}^1$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) et calculer sa différentielle en tout point.

Exercice 5) Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application $f : E \to \mathbb{R}$, (que l'on peut considérer comme une fonction de $\mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$), définie par $A \mapsto \det(A)$.
a) Montrer que f est différentiable et de classe $\mathcal{C}^1$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$).
b) Soit $H \in E$. On considère la fonction $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $\gamma(t) = f(I + t\,H)$. Montrer que γ est dérivable, puis calculer $\dot\gamma(0)$ afin d'établir l'égalité $Df(I)\,(H) = \mathrm{trace}(H)$.
c) Déduire de ce qui précède que l'on a, pour tout couple (M,H) de $E \times E$, $Df(M)\,(H) = \mathrm{trace}\,({}^t\mathrm{com}(M)\,H\,)$, où $\mathrm{com}(M)$ désigne la comatrice de M. (On peut commencer par prouver le résultat pour M inversible, puis en déduire le résultat pour M non inversible).

d) Soit $A \in E$. En considérant les deux fonctions $\gamma_1(t) = \det(\mathrm{e}^{tA})$, et $\gamma_2(t) = \mathrm{e}^{t\,\mathrm{trace}(A)}$, prouver que l'on a $\det(\mathrm{e}^A) = \mathrm{e}^{\mathrm{trace}(A)}$.

Exercice 6) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 ; on notera f' sa fonction dérivée. On considère la fonction réelle de trois variables réelles x, y et z définie par

$$F(x, y, z) = \int_0^x f(ty^3 + z^3)\, dt\,.$$

a) Montrer que F a des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à chaque variable en tout point de $\mathbb{R}^3$.
b) Montrer que F est différentiable. Écrire la matrice de $DF(x, y, z)$.
c) Soit $G(x, y) := F(x, y, x)$. Montrer que G est différentiable et calculer sa différentielle $DG(x, y)$.

Exercice 7) a) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a un point de I et f une fonction continue $I \to \mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable en tout point de $I \backslash \{a\}$ et que $f'(x)$ a une limite finie ℓ quand x tend vers a. Montrer que f est dérivable en a et que $f'(a) = \ell$.
b) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, a un point de U et f une fonction continue $U \to \mathbb{R}^p$. On suppose que f est différentiable sur $U \backslash \{a\}$ et que $Df(x)$ admet une limite A dans $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Montrer que f est différentiable en a et que $Df(a) = A$. (On pourra considérer la fonction $g(x) = f(x) - f(a) - A \cdot (x - a)$).

Exercice 8) Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable dont la différentielle $Df : U \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est constante : il existe $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que pour tout $x \in U$, $Df(x) = A$. En considérant la fonction $g : U \to \mathbb{R}^p$, $x \mapsto f(x) - A \cdot x$, montrer que f est une application affine.

Exercice 9) a) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Montrer que si $a \in U$ est un maximum ou un minimum relatif, alors $Df(a) = 0$.
b) Soit U un ouvert borné (non vide) de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\overline{U}$, différentiable sur U, et telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \overline{U} \backslash U$. Montrer qu'il existe $a \in U$ tel que $Df(a) = 0$. (Indication : se rappeler qu'une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes).
Ce résultat généralise un théorème bien connu : lequel?