

## Liste d'exercices n°2

### Chap. 2 : Théorème d'inversion locale.

**Exercice 1)** (a) Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même définie par  $f(x, y) = (x - y, xy)$ . Au voisinage de quels points  $f$  est-elle un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme local? Déterminer  $U$  ouvert tel que  $f$  soit un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $U$  sur  $f(U)$ .

(b) Répondre à la question analogue concernant l'application  $g$  de  $\mathbb{R}^3$  dans lui-même définie par  $g(x, y, z) = (x^2 - y - z, 2x + y + z, x + y - z)$ .

**Exercice 2)** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) = (x^3 + x + y, y)$ . Montrer que  $f$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 3)** (a) Montrer que l'application  $\Psi : (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)$  est un  $\mathcal{C}^2$ -difféomorphisme de  $U = ]0, +\infty[ \times ]-\pi, \pi[$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0\}$ .

(b) Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Vérifier que pour tout  $(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  :

$$\Delta f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta),$$

$$\text{où } \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

**Exercice 4)** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telle que :

$$\exists K \in ]0, 1[, \forall t \in \mathbb{R}, |f'(t)| \leq K < 1.$$

On définit alors  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  par  $g(x, y) = (x + f(y), y + f(x))$ .

(a) Montrer que  $g$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme local.

(b) Montrer que  $g$  est injective.

(c) i) Montrer que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + f(y) - f(0)| + |y + f(x) - f(0)| \geq (1 - K)(|x| + |y|)$ .

En déduire que si  $g(A)$  est borné alors  $A$  est borné.

ii) Montrer que l'image de  $g$  est fermée.

(d) Montrer que  $g$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Chap. 3 : Théorème des fonctions implicites.

**Exercice 5)** On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = x^5 + y^3 - 3x^2y - 1$  et on appelle  $\Gamma$  la courbe de  $\mathbb{R}^2$  d'équation  $f(x, y) = 0$ .

Démontrer qu'il existe un voisinage  $I \times J$  de  $(0, 1)$  dans  $\mathbb{R}^2$  et une application  $\varphi$  de  $I$  dans  $J$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tels que l'on ait :

$$((x, y) \in I \times J, f(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x \in I, y = \varphi(x)).$$

On admet que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . Donnez le développement limité à l'ordre 2 de  $\varphi$  en 0 et en déduire l'allure de la courbe  $\Gamma$  au voisinage du point  $(0, 1)$ .

**Exercice 6)** Démontrez qu'il existe un voisinage  $I_1 \times I_2 \times I_3 \times I_4$  de  $(1, 1, 1, 1)$  dans  $\mathbb{R}^4$  et une application  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $I_3 \times I_4$  dans  $I_1 \times I_2$  tels que les solutions

$(x, y, u, v)$  dans  $I_1 \times I_2 \times I_3 \times I_4$  du système

$$\begin{cases} x^2 + xu - v^2 - yv = 0 \\ xuv + xyv = 2 \end{cases}$$

soient de la forme  $(x = \varphi_1(u, v), y = \varphi_2(u, v), u, v)$ . Donner la matrice jacobienne de  $\varphi$  au point  $(1, 1)$ .

**Exercice 7)** Démontrez que, pour  $\lambda$  réel suffisamment proche de 0, l'équation  $x^5 + \lambda x - 1 = 0$  admet une unique solution réelle  $x_\lambda$  et que l'application  $\varphi : \lambda \rightarrow x_\lambda$  ainsi définie au voisinage de 0 est de classe  $C^1$ . On admet que cette application est de classe  $C^2$ . Donnez-en le développement limité à l'ordre 2 en 0.

**Exercice 8)** On considère l'ensemble  $\Omega$  des points  $(p, q)$  de  $\mathbb{R}^2$  tels que  $4p^3 + 27q^2 > 0$  et, pour chaque  $(p, q)$  appartenant à  $\Omega$ , l'équation (E)

$$x^3 + px + q = 0$$

d'inconnue  $x$  réelle.

- (a) Établir que, si  $(p, q)$  appartient à  $\Omega$ , l'équation (E) admet une unique solution.
- (b) On considère alors la fonction  $\varphi$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  qui au couple  $(p, q)$  associe la solution de (E). Montrer que  $\varphi$  est de classe  $C^1$  dans  $\Omega$ .

On admet que  $\varphi$  est de classe  $C^2$ . Donner le développement limité de cette application à l'ordre 2 en  $(0, -1)$ .