

### Liste d'exercices n°3

#### Chap. 4 : Courbes et surfaces dans $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 1)** Pour  $\lambda$  réel, on considère l'ensemble

$$S_\lambda = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 - y^2 - z^2 = \lambda\}.$$

a) Montrer que si  $\lambda \neq 0$ ,  $S_\lambda$  est une surface régulière de  $\mathbb{R}^3$ . Dessiner  $S_\lambda$ . Donner l'équation du plan tangent affine en un point de  $S_\lambda$ .

b) Dessiner  $S_0$ . Montrer que  $S_0 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  est une surface régulière de  $\mathbb{R}^3$ . Montrer qu'en revanche  $S_0$  n'est pas une surface régulière de  $\mathbb{R}^3$ . Indication : si c'était le cas, montrer que l'ensemble des vecteurs-vitesse au temps 0 des courbes  $C^1$  tracées sur  $S_0$  et passant par  $(0, 0, 0)$  au temps 0, contiendrait 3 vecteurs linéairement indépendants, (considérer les chemins  $\gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\gamma_1(t) = (t, t, 0)$ ,  $\gamma_2(t) = (t, 0, t)$ ,  $\gamma_3(t) = (\sqrt{2}t, t, t)$ ).

**Exercice 2)** Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère l'ensemble

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 1\}.$$

Montrer que  $S$  est une surface régulière de  $\mathbb{R}^3$  et donner l'équation du plan tangent affine en un point de  $S$ .

**Exercice 3)** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$ , avec

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ f_2(x, y, z) &= x^2 + y^2 - x \end{cases}$$

Soit  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$ .

a) Dessiner  $C$ .

b) Montrer qu'en dehors du point  $(1, 0, 0)$ ,  $C$  est une courbe régulière de  $\mathbb{R}^3$ . Déterminer la droite affine tangente à  $C$  au point  $(0, 1, 0)$ .

c) En considérant les deux chemins  $\gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1, 2$   $\gamma_1(t) = (\cos^2 t, \cos t \sin t, \sin t)$ ,  $\gamma_2(t) = (\cos^2 t, -\cos t \sin t, \sin t)$ , montrer qu' "à cause du point  $(1, 0, 0)$ ",  $C$  n'est pas une courbe régulière de  $\mathbb{R}^3$ .

#### Chap. 5 : Applications $\mathcal{C}^k$ .

**Exercice 4)** a) Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|x\|^2$ . Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^n$  et déterminer  $Df(x)$  et  $D^2f(x)$ .

b) Même question avec  $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|x\|$ .

c) Même question avec  $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \mapsto \text{trace}({}^t A A)$ .

#### Chap. 6 : Points critiques et extrema.

**Exercice 5)** Pour chacune des fonctions suivantes déterminer les points critiques éventuels et préciser leur nature.

- a)  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$    b)  $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x^2 - y^2}$    c)  $f(x, y) = \sin x + \cos y$   
d)  $f(x, y, z) = x^2 - 2xy + 2y^2 + z^2 + 2y - 4z + 5$    e)  $f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xyz - z + y$ .

**Exercice 6)** Pour tout  $\lambda$  réel, on considère la fonction  $f_\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f_\lambda(x, y) = x^3 + y^3 - 3\lambda xy.$$

Etudier les extrema de  $f_\lambda$  suivant les valeurs du paramètre  $\lambda$ .

**Exercice 7)** Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\|\cdot\|$  la norme associée. On considère la fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \langle a, x \rangle e^{-\|x\|^2},$$

où  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  est fixé.

- a) Montrer que  $f$  a deux points critiques.  
b) Calculer  $D^2f(x)$  et déterminer la nature des deux points critiques de  $f$ .

**Exercice 8)** Soient  $a, b, c$  des réels tels que  $0 < c < b < a$  et soit

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}.$$

- a) Montrer que  $S$  est une surface régulière de  $\mathbb{R}^3$ .  
b) Soit  $f$  la fonction  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ .  
i) Montrer que la restriction de  $f$  à  $S$  est bornée inférieurement et que la borne inférieure est atteinte en au moins un point de  $S$ . Justifier qu'un tel point est un point critique de  $f|_S$ .  
ii) Déterminer les points critiques de  $f|_S$ .  
iii) En déduire la distance de  $S$  à l'origine.

**Exercice 9)** Soit  $f$  la fonction  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z) \mapsto x^2 y^2 z^2$ .

Soit  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$ .

- a) Montrer que  $S$  est une surface régulière de  $\mathbb{R}^3$ .  
b) Montrer que la restriction de  $f$  à  $\bar{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ , est bornée supérieurement et que la borne supérieure est atteinte en un point qui est nécessairement dans  $S$ . Justifier qu'en un tel point est un point critique de  $f|_S$ .  
c) Déterminer les points critiques de  $f|_S$ .  
d) En déduire le maximum de la restriction de  $f$  à  $S$ .  
e) En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : pour tout triplet  $(a, b, c)$  de réels strictement positifs, on a :

$$(a^2 b^2 c^2)^{1/3} \leq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

**Exercice 10)** Soit  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1; x + y + z = 1\}$ .

- a) Montrer que  $C$  est une courbe régulière de  $\mathbb{R}^3$ .  
b) Soit  $f$  la fonction  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ .  
i) Montrer que la restriction de  $f$  à  $C$  est bornée inférieurement et que la borne inférieure est atteinte en au moins un point de  $C$ . Justifier qu'un tel point est un point critique de  $f|_C$ .  
ii) Déterminer les points critiques de  $f|_C$ .  
iii) En déduire la distance de  $C$  à l'origine.