UNIVERSITÉ DE NANTES

École polytechnique
ÉTN-3 Algèbre (accueil)
Année 2009-2010

Contrôle (une heure et trente minutes)

3 novembre 2009

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

Les réponses seront soigneusement justifiées.

I

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (2x + 5z, x - y + 2t - 3z), \quad x, y, z, t \in \mathbb{R}.$$

(**1**) Donner la matrice A représentant f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$. Calculer AA^t et A^tA.

(**2**) Soit $v = (a, b)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Écrire l'équation $f(x, y, z, t) = v$ comme un système d'équations et résoudre ce système. L'application f est-elle surjective ?

(**3**) Montrer que les vecteurs $(0, 2, 0, 1)$ et $(5, -1, -2, -6)$ sont des vecteurs du noyau de f. Sont-ils indépendants ? Quelle est la dimension du noyau de f ?

II

Pour un polynôme P, si les polynômes P' et $P"$ désignent les polynômes dérivé et dérivé seconde de P, on note par $\Phi(P)$ le polynôme défini par

$$\Phi(P)(X) = (1 - X^2)P"(X) - 2XP'(X).$$

(**1**) Calculer les polynômes $\Phi(1), \Phi(X)$ et $\Phi(3X^2 - 1)$.

(**2**) Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors le polynôme $\Phi(P)$ appartient encore à $\mathbb{R}_2[X]$.
On note par Φ_2 l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans lui-même telle que $\Phi_2(P) = \Phi(P)$ pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que Φ_2 est linéaire.

(**3**) Montrer que la famille $(1, X, 3X^2 - 1)$ est une base de E. Donner la matrice représentant Φ_2 dans cette base.

III

Soit $\mathcal{U}$ l'espace de matrices

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

(**1**) Montrer que $\mathcal{U}$ est un espace vectoriel.

(**2**) Montrer que si U est une matrice de $\mathcal{U}$, alors U^2 appartient aussi à $\mathcal{U}$. L'application

$$U \in \mathcal{U} \to U^2 \in \mathcal{U}$$

est-elle linéaire ?

(**3**) Soient U_1, U_2, U_3 les matrices définies par

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que toute matrice $U = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ est de la forme

$$U = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3.$$

On exprimera les coefficients α_1, α_2 et α_3 en fonction des réels a, b et c. Quelle est la dimension de l'espace $\mathcal{U}$?

(**4**) Soit U la matrice $U = \begin{pmatrix} 2 & \pi \\ 0 & -30 \end{pmatrix}$. Calculer l'inverse de U.