Soit G un graphe, avec n sommets et m arêtes. Il lui est associé

- la *matrice d'incidence* I_G d'ordre (m,n) et dont le coefficient I_{as} est égal 1 si s est un sommet de l'arête a et 0 sinon ;
- la *matrice des degrés* D_G diagonale d'ordre n et dont le coefficient D_{ss} est égal au degré du sommet s ;
- la *matrice d'adjacence* A_G d'ordre n et dont le coefficient A_{st} est égal à 1 si G a une arête entre s et t, 0 sinon ;
- la *matrice du Laplacien* Δ_G d'ordre n égale à $D_G - A_G$;
- le *graphe des arêtes* $L(G)$ dont les sommets sont les arêtes de G et une arête joint les sommets a et a' si a et a' ont une extrémité commune dans G ;
- le *graphe subdivisé* $S(G)$ obtenu à partir de G par l'ajout d'un sommet u_a pour chaque arête $a = st$, accompagné du remplacement de cette arête a par deux arêtes su_a et tu_a ;
- le *graphe total* $T(G)$ dont les sommets sont donnés par l'ensemble combiné des arêtes et des sommets de G, avec une arête entre deus sommets si ceux-ci sont soit des sommets adjacents de G soit un sommet et une arête contenant ce sommet comme extrémité, soit deux arêtes partageant une extrémité.

Un graphe est dit homogène de degré d si tous ses sommets sont de degré d.

On considère dans la suite un graphe G à n sommets et m arêtes, connexe et homogène de degré d.

(**1**) Quels graphes parmi $L(G), S(G)$ et $T(G)$ sont homogènes ?

(**2**) Montrer les relations entre matrices d'adjacence des graphes $G, L(G), S(G), T(G)$ et la matrice d'incidence I_G.

$$ {}^tI_G I_G = A_G + d, \quad I_G {}^tI_G = A_{L(G)} + 2, $$
$$ A_{S(G)} = \begin{pmatrix} 0_n & {}^tI_G \\ I_G & 0_m \end{pmatrix}, \quad A_{T(G)} = \begin{pmatrix} A_G & {}^tI_G \\ I_G & A_{L(G)} \end{pmatrix}. $$

(**3**) Soient M et N des matrices d'ordre (m,n) et (n,m) respectivement.

- Montrer que si (u,λ) est un élément propre de MN avec λ non nul, (Nu,λ) est élément propre de NM.
- En déduire que, hors les valeurs propres nulles, les spectres de MN et NM coïncident, multiplicités comprises.
- Montrer que
$$ \ker M = \ker {}^tMM, \quad \ker {}^tM = \ker M{}^tM, $$
puis
$$ \dim\ker M - \dim\ker {}^tM = n - m. $$

(**4**) Comparer les spectres (avec multiplicités) des matrices $A_G, A_{L(G)}, \Delta_G, \Delta_{L(G)}$
En déduire la relation entre polynômes caractéristiques

$$ (x-2d)^m \,\text{dét}(x - \Delta_G) = (x-2d)^n \,\text{dét}(x - \Delta_{L(G)}). $$

(**5**) Montrer que si (u, λ) est élément propre de Δ_G, alors il existe $\alpha_1, , \alpha_2$ distincts tels que $(u, \alpha_j I_G u), j = 1, 2$, soit élément propre de $\Delta_{S(G)}$ pour une valeur propre λ_j. Montrer que

$$(\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x) = \lambda - x(d + 2 - x).$$

(**6**) Soient des matrices M, N, P, Q d'ordre $(m, n), (n, m), n, m$ resp. avec P, Q inversibles et la matrice par blocs $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} P & N \\ M & Q \end{pmatrix}$. Calculer les produits de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ P^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & N \\ M & Q \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & N \\ M & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où 1 note la matrice Id (d'ordre adapté suivant le cas), puis établir les identités sur les déterminants

$$\text{dét}\, \mathcal{A} = \begin{vmatrix} P & N \\ M & Q \end{vmatrix} = |P| \left| Q - MP^{-1}N \right| = |Q| \left| P - NQ^{-1}M \right|.$$

(**7**) Déduire de la question précédente

$$\text{dét}(x - \Delta_{S(G)}) = (-1)^n (x - 2)^{m-n}\, \text{dét}(x(d + 2 - x) - \Delta_G).$$