

Faculté des sciences et techniques

Université de Nantes

*Licence 3ème année*

*2010-2011*

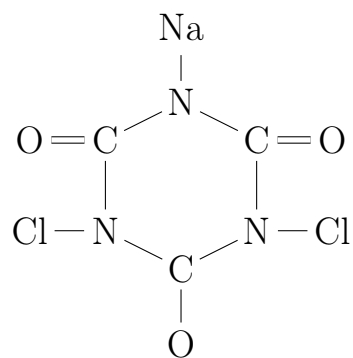
# Graphes

Laurent Guillopé

Laboratoire de mathématiques Jean Leray (UN-CNRS-ÉCN)  
Département de mathématiques, UFR Sciences et techniques

*Ces notes sont en cours d'écriture*

*Version : 26 février 2012*



# TABLE DES MATIÈRES

<b>Prologue</b> .....	1
<b>1. Graphes</b> .....	2
1.1. Sommets, arêtes.....	2
1.2. Valence, diamètre.....	6
1.3. Connectivités.....	7
1.4. Arbres.....	8
1.5. Chaînes et cycles.....	9
1.6. Exercices.....	11
<b>2. Euler et Hamilton</b> .....	14
2.1. Graphe eulérien.....	14
2.2. Graphe hamiltonien.....	16
2.3. Problèmes $P$ et $NP$ .....	17
2.4. Exercices.....	18
<b>3. Théorie de Ramsey</b> .....	20
3.1. Le théorème de Ramsey (1930).....	20
3.2. Le théorème de Schur (1916).....	23
3.3. Les théorèmes de Van der Waerden (1927) et Szemerédi (1975).....	25
3.4. Exercices.....	26
<b>4. Spectres de graphes</b> .....	29
4.1. Matrice d'adjacence.....	29
4.2. Matrices positives.....	34
4.3. Laplacien.....	37
4.4. Exercices.....	42
<b>5. Graphes planaires</b> .....	46
5.1. La relation d'Euler.....	48
5.2. Le théorème de Kuratowski.....	49
5.3. Exercices.....	52
<b>6. Trois conjectures et deux théorèmes</b> .....	53
<b>Liste des figures</b> .....	54
<b>Index</b> .....	56

# PROLOGUE

Que partagent le problème des ponts de Königsberg, l’algorithmique, les réseaux de communications (réseaux routier ou téléphonique, internet ou l’infiniment petit d’une puce d’ordinateur...), la chimie, la génétique, le calcul distribué, les diagrammes de Feynman, les grammaires des langages, le coloriage des cartes, la sociologie ? C’est le fait de faire appel pour certaines de leurs modélisations à la théorie des graphes.

Les définitions élémentaires à la base de cette théorie permettent de poser rapidement des problèmes (faciles ou difficiles), avec un mélange de combinatoire, d’algèbre et de géométrie.

Après une introduction sur les concepts élémentaires, le cours, accompagné d’exercices nombreux, abordera quelques chapitres de cette théorie parmi lesquels : chemins eulériens et hamiltoniens, matrices de graphes, théorie de Ramsey, planarité, voire des énoncés de théorèmes tout récents sur les graphes parfaits et la conjecture d’Hadwiger. Cela fait suivant le temps disponible.

Une sélection d’ouvrages sur la théorie des graphes à la Bibliothèque universitaire (Section Sciences et techniques) :

- Claude Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, 1970.
- Olivier Cogis, Claudine Robert, *Théorie des graphes : au-delà des ponts de Königsberg : problèmes, théorèmes, algorithmes*, Vuibert, 2003.
- Bruno Courcelle, Yves Colin de Verdière, Alexander Zvonkine, *Graphes*, Éditions de l’École Polytechnique, 2004.
- Michel Gondran, *Graphes et algorithmes*, Eyrolles, 1995.
- Arnold Kaufmann, *Des points et des flèches... : la théorie des graphes*, Dunod, 1968.

L’ouvrage

Martin Aigner, Gunther Ziegler, *Raisonnements divins : quelques démonstrations mathématiques particulièrement élégantes*, Springer, 2006.

expose de manière très plaisante, entre autres thèmes, quelques éléments de théorie des graphes ou divers résultats qui utilisent les méthodes graphiques de manière toute pertinente.

L’ouvrage [Graph theory](#) de Reinhard Diestel, édité chez Springer dans la collection *Graduate texts in mathematics* (Vol. **173**) est de niveau avancé : les curieux peuvent en consulter une version électronique intégrale accessible et téléchargeable sans restriction sur le web.

# CHAPITRE 1

## GRAPHES

### 1.1. Sommets, arêtes

Un *graphe*  $G$  est constitué d'un ensemble  $S_G$  de *sommets* (ou *nœuds*) et un ensemble  $A_G$  d'*arêtes* (ou *arcs*), chaque arête  $a$  joignant deux sommets  $s_1(a)$  et  $s_2(a)$ , ses *extrémités*. Si ces deux sommets sont identiques, l'arête  $a$  est appelée *boucle*.

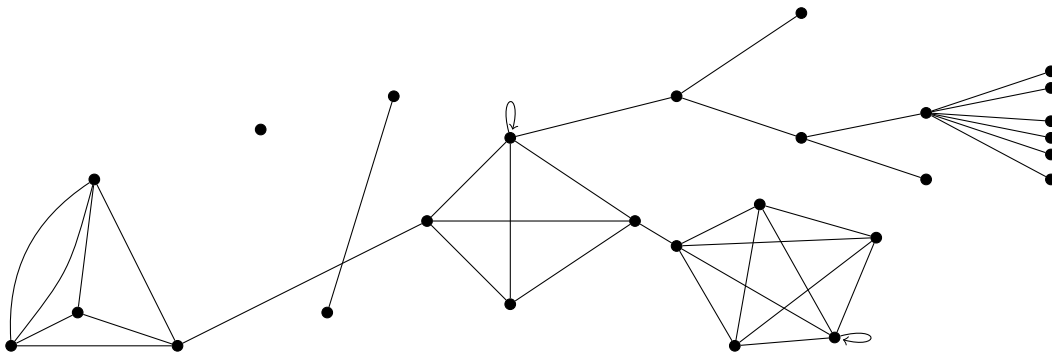


FIGURE 1 . Un graphe...

Si entre deux sommets du graphe  $G$  il y a au plus une arête et si  $G$  est sans boucle, le graphe est dit *simple*, sinon on parle de *multigraphe*. La suite traitera principalement de graphes simples.

L'ensemble des arêtes  $A_G$  d'un graphe simple  $G$  s'identifie à une partie symétrique de  $S_G \times S_G$  : à l'arête  $a \in A_G$  sont associés les couples  $(s, s')$  où  $(s, s')$  sont les extrémités de l'arête  $a$ .

#### ▷ *Exemples 1.1.*

1. Le *chemin*  $C_n$  à  $n$  sommets et  $n - 1$  arêtes est le graphe d'ensemble de sommets  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  et d'arêtes  $A = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n - 1, n)\}$ . Le chemin infini  $L_\infty$  a pour ensemble de sommets  $\mathbb{Z}$  et ensemble d'arêtes  $\{(k, k + 1), k \in \mathbb{Z}\}$ .
2. Le *lacet* ou *circuit*  $L_n$  à  $n$  sommets et  $n$  arêtes est le graphe d'ensemble de sommets  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  et d'arêtes  $A = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n - 1, n), (n, 1)\}$ . Les lacets  $L_3, L_4, L_5$  sont appelés resp. *triangle*, *carré* et *pentagone*.
3. L'*étoile*  $E_n$  à  $n$  branches est le graphe de sommets  $S = \{0, 1, 2, \dots, n\}$  et d'arêtes  $A = \{(0, 1), (0, 2), \dots, (0, n)\}$ .
4. Le *graphe complet* (ou *clique*)  $K_n$  à  $n$  sommets est le graphe de sommets  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  et d'arêtes  $A = \{(i, j), i, j \in S, i \neq j\}$ . Tout graphe à  $n$  sommets est sous-graphe d'un graphe  $K_n$ .

5. Pour  $n_1, n_2$  deux entiers naturels non nuls, le graphe complet biparti  $K_{n_1, n_2}$  est le graphe de sommets  $S = B_1 \sqcup B_2$  avec  $B_i$  de cardinal  $n_i, i = 1, 2$  et d'arêtes  $A = \{(b_1, b_2), b_1 \in B_1, b_2 \in B_2\}$ . Le graphe complet biparti  $K_{1, n}$  n'est rien d'autre que l'étoile  $E_n$ . Le graphe  $K_{3, 3}$  a une importance spéciale.
6. Le réseau  $R_d$  de dimension  $d$  est le graphe d'ensemble de sommets  $\mathbb{Z}^d$  et d'arêtes  $\{(k, k + \epsilon), k \in \mathbb{Z}^d\}$  où  $\epsilon$  est un vecteur de  $\mathbb{Z}^d$  avec une seule coordonnée non nulle valant  $\pm 1$ . La ligne infinie  $L_\infty$  coïncide avec  $R_1$ .  $\triangleleft$

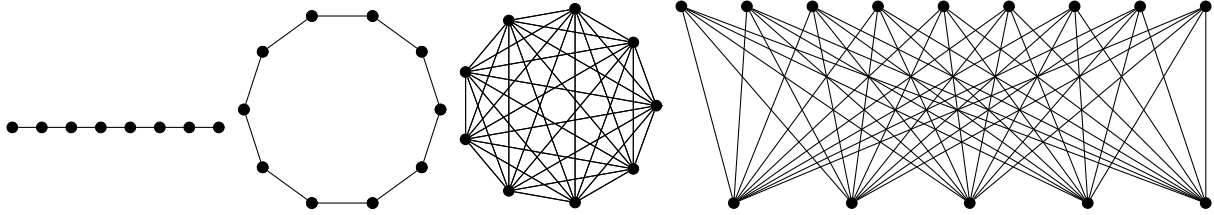


FIGURE 2 . (a) Le chemin  $C_8$ , (b) le lacet  $L_{10}$ , (c) le graphe complet  $K_9$ , (d) le graphe biparti  $K_{9,5}$ .

Un sous-graphe de  $G$  est un graphe  $H$  tel que  $S_H \subset S_G$  et  $A_H \subset A_G \cap (S_H \times S_H)$  : le graphe  $H$  est obtenu à partir du graphe  $G$  par suppressions d'arêtes et suppressions de sommets (accompagnées de la suppression de toutes les arêtes ayant pour extrémités un de ces sommets retirés). Un isomorphisme du graphe  $G_1$  sur le graphe  $G_2$  est la donnée de deux bijections  $\phi_S : S_{G_1} \rightarrow S_{G_2}$  et  $\Phi_A : A_{G_1} \rightarrow A_{G_2}$  telles que les extrémités de  $\Phi_A(a)$  soient les images par  $\Phi_S$  de celles de  $a$ . Considérer les graphes à isomorphisme près est essentiel : déterminer des invariants (calculables rapidement ou, autrement dit, de complexité contrôlée) d'isomorphie est important. On en verra quelques exemples de type spectral ou liés à la planarité.



FIGURE 3 . Deux graphes isomorphes.

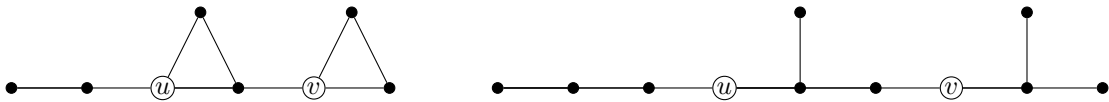


FIGURE 4 . Deux graphes sans automorphisme, pour lesquels néanmoins les sous graphes  $G \setminus u$  et  $G \setminus v$  sont isomorphes.

Le graphe est fini si  $S_G$  et  $A_G$  le sont. L'ordre du graphe est le cardinal  $\#S_G$ . La caractéristique d'Euler  $\chi_G$  du graphe  $G$  est la différence  $\chi_G = \#S_G - \#A_G$ .

Une représentation graphique du graphe  $G$  dans  $\mathbb{R}^d$  est une partie  $\mathcal{G} = i_S(S) \sqcup \sqcup_{a \in A_G} \mathcal{G}_a$  de  $\mathbb{R}^d$  où  $i_S$  est une injection de  $S$  dans  $\mathcal{G}$  et pour chaque arête  $a = \{s_1, s_2\}$   $\mathcal{G}_a$  est l'image par un homéomorphisme  $h_a$  d'un intervalle fermé (mettons  $[1, 2]$ ) sur son image  $\mathcal{G}_a$  dans  $\mathbb{R}^d$  avec  $h_a(i) = s_i$  pour  $i = 1$  ou  $2$ . En général, on suppose que  $\mathcal{G}_a = h_a([1, 2])$  est un segment, un arc lisse ou un arc polygonal et que les intersections  $\mathcal{G}_a \cap \mathcal{G}_{a'}$  sont soit vide soit un ensemble de points.

On a une représentation simple de  $G$  en dimension  $d = \#S_G$  : on identifie le sommet  $s$  et la fonction  $\delta_s$  de  $\mathbb{R}^{S_G}$ <sup>(1)</sup>, l'arête  $a = \{s_1(a), s_2(a)\}$  au segment  $[\delta_{s_1(a)}, \delta_{s_2(a)}] = \{t\delta_{s_1(a)} + (1-t)\delta_{s_2(a)}, t \in [0, 1]\}$ . L'espace sous-jacent à un graphe  $G$  sera tout espace homéomorphe à cette représentation dans  $\mathbb{R}^{S_G}$ .

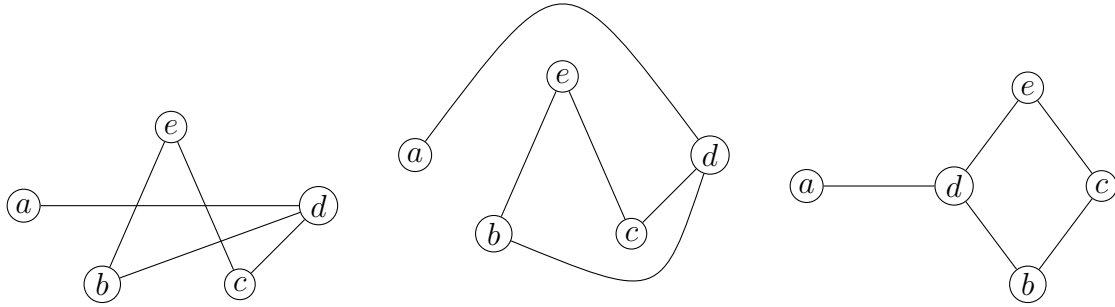


FIGURE 5 . Diverses représentations graphiques du graphe simple à 5 sommets  $a, b, c, d, e$  et 5 arêtes  $(a, d), (b, e), (b, d), (c, d), (e, c)$ .

Orienter l'arête  $a$  revient à déclarer un sommet comme l'*origine*  $\alpha(a)$  de l'arête et l'autre comme l'extrémité terminale  $\omega(a)$  : on écrira

$$a := \alpha(a)\omega(a) := \omega(a) - \alpha(a).$$

L'arête *opposée*  $\bar{a}$  de l'arête orientée  $a$  est l'arête orientée obtenue en ayant échangé origine et extrémité terminale de  $a$  :

$$\bar{a} = \omega(a)\alpha(a) = \alpha(a) - \omega(a), \quad \alpha(a) = \omega(\bar{a}), \quad \bar{\bar{a}} = a.$$

Orienter un graphe consiste à orienter chacune de ses arêtes. Un *graphe orienté* (ou *di-*

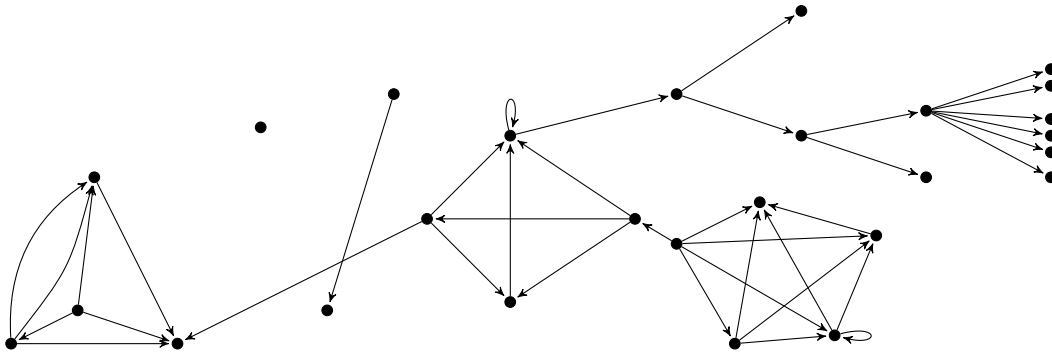


FIGURE 6 . Le graphe de la Fig. 1.1 orienté.

*graphe*<sup>(2)</sup>)  $G$  est la donnée d'un ensemble  $S_G$  de sommets et d'un ensemble  $A_G$  d'arêtes orientées dont les extrémités sont dans  $S_G$ . Un digraphe a un graphe (non orienté) sous-jacent, alors qu'orienter un graphe donne une classe particulière de digraphes : les variations sur ce qu'est un graphe varie avec les auteurs et les contextes.

<sup>(1)</sup>L'espace  $\mathbb{R}^{S_G}$  est considéré comme l'espace vectoriel de  $d$ -uplets avec  $d = \#S_G$  ou comme l'espace des fonctions de  $S_G$  dans  $\mathbb{R}$ . La fonction  $\delta_s$  est celle valant 1 sur  $s$ , 0 sinon : elle s'identifie au vecteur  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  dont la seule composante non nulle est la  $s$ -ième.

<sup>(2)</sup>L'expression anglaise *directed graph* a été contractée en *digraph*.

Au graphe  $G = (S, A)$ , on peut associer un graphe  $G'$  obtenu avec subdivision particulière : son ensemble de sommets est  $S' = S \sqcup A$  où on a rajouté un sommet  $s_a$  pour chaque arête  $a$  (géométriquement, on mettra ce point en un point intérieur de l'arête  $a$ ) et son ensemble d'arêtes  $A' = A \times \{1, 2\}$  où on a divisé en deux arêtes  $\{s_a^1, s_a\}, \{s_a^2, s_a\}$  chaque arête  $a = \{s_a^1, s_a^2\} \in A$ . Le graphe  $G'$  est simple (sans boucle), que  $G$  le soit ou pas. Si  $G$  n'a pas de sommet extrémité de deux arêtes seulement, on retrouve le graphe  $G$  à partir du graphe  $G'$  en enlevant les sommets de  $G'$  extrémités de deux arêtes et remplaçant les deux arêtes issues de chacun de ces sommets par une seule arête.

L'opération de contraction d'une arête du graphe  $G$  consiste à supprimer l'arête  $a = \{s_a^1, s_a^2\}$  et à identifier les sommets  $s_a^1, s_a^2$  en un unique sommet  $s$ . Le graphe obtenu de  $G$  par contraction de l'arête  $a$  est noté  $G \cdot a$  : il est en général non simple, ce qui incite à se ne pas écarter les graphes avec multi-arêtes (pour le calcul du nombre d'arbres maximaux d'un graphe simple du théorème 4.2 ou le critère de planarité de Kuratowski du théorème 5.2), même si nous nous limiterons le plus souvent à la considération de graphes simples.

**Lemme 1.1.** *Soit  $G$  un graphe.*

- (i) *Il existe une représentation de  $G$  dans  $\mathbb{R}^3$  avec des arêtes représentées par des segments et sans intersection entre intérieurs des arêtes.*
- (ii) *Il existe une représentation de  $G$  dans  $\mathbb{R}^2$  avec des arêtes représentées par des segments de droites et des intersections d'intérieurs d'arêtes en au plus un point (double).*

*Démonstration.* — Par récurrence sur le cardinal de  $S$ , on montre l'existence d'une injection  $i_S : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que

- les images de 4 points ne sont pas coplanaires,
- les images  $(i_S(s), i_S(s'))$  et  $(i_S(\tilde{s}), i_S(\tilde{s}'))$  sont disjointes si  $\{s, s'\}$  et  $\{\tilde{s}, \tilde{s}'\}$  sont distincts.

C'est clair si  $G$  a 1, 2, 3 ou 4 sommets. Supposons une telle représentation dans  $\mathbb{R}^3$  construite pour tout graphe  $G$  avec  $N - 1$  sommets. Soit  $G$  avec  $N$  sommets et  $H$  le graphe obtenu en ôtant un sommet  $s_N$  de  $G$  et toutes les arêtes ayant  $s_N$  comme extrémités : on note  $\mathcal{H}, i_H, \dots$  les éléments d'une représentation convenable de  $H$ . Chaque condition liée à l'ajout d'un point  $P$  supplémentaire pour le sommet  $s_N$  s'exprime par l'appartenance de  $P$  à un ouvert dense de  $\mathbb{R}^3$  :  $\Omega_N = \mathbb{R}^3 \setminus i_{S_H}(S_H)$  pour l'injectivité de  $i_{S_G}, \Omega_{s, s', s''}$  pour la non-coplanarité de  $s, s', s'', P$  et  $U_{s, s, s''}$  pour l'intersection vide de  $(s, s')$  et  $(s'', P)$ . Tout point  $P$  de l'intersection (non vide) de ces ouverts denses (en nombre fini)<sup>(3)</sup> non vide convient pour le choix de  $i_S(s_N)$ .

Pour l'énoncé plan, on considère la représentation du graphe complet  $K_N$  avec l'ensemble des sommets représentés par les racines  $N$ -ièmes de l'unité et les arêtes représentées par les segments entre deux quelconques de ces racines. Tout graphe  $G$  étant un sous-graphe du graphe complet avec  $\#S_G$  sommets admet une représentation graphique comme annoncé dans le lemme<sup>(4)</sup>.

Une perturbation de la représentation symétrique standard du graphe complet (où l'origine appartient à  $m$  arêtes dans  $K_{2m}$  comme on l'a fait pour le tracé de graphes dans  $\mathbb{R}^3$ ) convainc qu'un point multiple (hors des sommets) est de multiplicité au plus 2.  $\square$

<sup>(3)</sup>Le théorème de Baire énonce que l'intersection d'un nombre dénombrable d'ouverts denses est un ensemble dense, donc non vide

<sup>(4)</sup>Le graphe complet  $K_S$  sur l'ensemble de sommets  $S$  (fini ou infini) s'injecte dans  $\ell^2(S) = \{(x_s)_{s \in S}, \sum_{s \in S} x_s^2 < \infty\}$  avec  $i_{K_S}(s_0) = (\delta_{ss_0})$ .

Un *chemin* (orienté resp.) de *longueur*  $p - 1$  sur le graphe  $G$  est une suite d'arêtes (orientées)  $a_1, a_2, \dots, a_p$  telle que les arêtes  $a_i$  et  $a_{i+1}$  aient une extrémité commune ( $\alpha(a_{i+1}) = \omega(a_i)$ )<sup>(5)</sup> : c'est aussi la suite de sommets  $s_1 s_2 \dots s_{p+1}$  telle qu'il existe une arête  $a$  d'extrémités  $s_i$  et  $s_{i+1}$  pour  $i = 1, \dots, p$  (une arête orientée  $a$  avec  $\alpha(a) = s_i$  et  $\omega(a) = s_{i+1}$ ). Un *lacet* du graphe  $G$  est un chemin  $s_1 s_2 \dots s_{p+1}$  tel que  $s_1 = s_{p+1}$ . Le lacet est dit *élémentaire* (ou *circuit*) s'il est du type  $C_n$  (i. e. la suite des sommets  $s_1 s_2 \dots s_p$  est une injection dans  $S_G$ , sans aller et retour).<sup>(6)</sup>

Des parties de  $S_G$  (resp.  $A_G$ ) sont *indépendantes* si elles ne sont reliées par aucune arête (resp. n'ont pas de sommet incident commun). Des chemins de  $G$  sont dits *indépendants* s'ils n'ont aucun sommet commun, mises à part leurs extrémités.

## 1.2. Valence, diamètre

La *valence* (ou *degré*)  $v_s$  d'un sommet  $s$  est le nombre d'arêtes ayant ce sommet parmi ses extrémités : une boucle de sommet  $s$  compte pour 1 dans la valence de  $s$ . La *valence d'un graphe*  $v_G$  est le maximum des valences de ses sommets. Si la valence est constante égale à  $d$  sur les sommets, le graphe est dit ( $d$ -)homogène ou ( $d$ -)régulier.

La distance  $d(s, s')$  de deux sommets  $s, s'$  est le nombre d'arêtes minimal d'un chemin reliant ces deux sommets : si  $s$  et  $s'$  ne sont reliés par aucun chemin dans  $G$ , on pose  $d(s, s') = \infty$ . Le *diamètre* d'un graphe est la distance maximale entre deux sommets.

**Proposition 1.1.** Soit  $G$  un graphe simple.

- (i) La somme des valences de ses sommets est paire.
- (ii) Le graphe  $G$  a un nombre pair de sommets de valences impaires.

*Démonstration.* — Il suffit de compter les sommets, soit comme extrémités des arêtes (où on compte chaque sommet deux fois), soit avec les valences :

$$\sum_{s \in S_G} d_s = 2\#A_G. \quad \square$$

Il n'y a pas de moyen simple de dire si la suite  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  est la suite des valences des sommets d'un graphe à  $n$  sommets. On a néanmoins un algorithme basé sur le résultat suivant

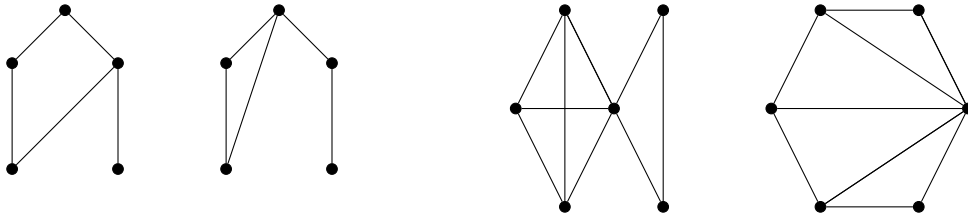


FIGURE 7 . Deux paires de graphes non isomorphes ayant mêmes suites de valences  $(1, 2, 3, 3, 1)$  et  $(2, 2, 3, 3, 5)$  resp..

<sup>(5)</sup>Des allers et retour, ie  $\dots s's \dots$  ou des non injectivités telles  $\dots ss' \dots ss' \dots$  ne sont pas exclues a priori

<sup>(6)</sup>On distinguera un sous graphe de  $G$  isomorphe à  $L_n$  (resp.  $C_n$ ) d'un lacet  $c$  (resp. un chemin  $\ell$ ), dont la représentation graphique donne lieu à une application  $t \in [0, 1] \rightarrow c(t)$  (resp.  $\ell(t)$  avec  $\ell(0) = \ell(1)$ ) injective par morceaux.



**Théorème 1.1.** Soit  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  une suite croissante d'entiers dans  $\{1, \dots, n-1\}$  et soit  $\mathbf{v}' = (v'_1, \dots, v'_{n-1})$  la suite obtenue à partir de  $\mathbf{v}$  en supprimant le dernier terme, en retranchant 1 aux  $v_n$  derniers termes et en la réordonnant si besoin afin qu'elle soit croissante.

Alors  $\mathbf{v}$  est une suite de valences et et seulement si  $\mathbf{v}'$  en est une.

*Démonstration.* — Admettons provisoirement le lemme

**Lemme 1.2.** Soit  $\mathbf{v}$  une suite de valences. Alors il existe un graphe  $G$  et une énumération de ses sommets réalisant  $\mathbf{v}$  et telle que  $s_n$  ait pour voisins les sommets  $s_{n-1}, s_{n-2}, \dots, s_{n-v_n}$ .

Supposons que  $\mathbf{v}'$  soit une suite de valences et soit  $G'$  un graphe réalisant  $\mathbf{v}'$ . Soit  $\mathbf{v}''$  la suite obtenue à partir de  $\mathbf{v}$  en supprimant le dernier de terme et en retranchant 1 aux  $v_n$  derniers termes de  $\mathbf{v}$  : soit  $G''$  le graphe obtenu à partir de  $G'$  par renommage des sommets et réalisant  $\mathbf{v}''$  : si on rajoute le sommet  $s_n$  à  $G''$  et les arêtes reliant  $s_n$  aux sommets de plus hauts indices de  $G''$ , on obtient un graphe  $G$  réalisant la suite  $\mathbf{v}$ .

Réciproquement, soit  $\mathbf{v}$  réalisé par un graphe  $G$  où on a nommé les sommets de telle sorte que  $s_n$  soit adjacent aux sommets  $s_{n-1}, s_{n-2}, \dots, s_{n-v_n}$ . Alors  $\mathbf{v}'$  est réalisé par le graphe  $G \setminus s_n$ .  $\square$

*Preuve du Lemme.* — Posons  $\sigma_\ell = s_{n-\ell}$ . Soit  $G$  réalisant la suite  $\mathbf{v}$ . Supposons que le graphe  $G$  ne satisfait pas la conclusion du lemme : il existe  $i$  tel que  $i \in \{1, \dots, v_n\}$  et  $\sigma_i$  ne soit pas voisin de  $\sigma_0$ . Il existe donc  $j$  tel que  $j > v_n$  et  $\sigma_j$  est adjacent à  $\sigma_0$ . Comme  $v_{n-i} \geq v_{n-j}$ , il existe  $k$  tel que  $\sigma_i$  soit adjacent à  $\sigma_k$  sans que  $\sigma_j$  ne le soit. On peut choisir  $k$  distinct de  $j$  : c'est clair si  $\sigma_i$  n'est pas adjacent à  $\sigma_j$ , sinon, comme  $\sigma_i$  et  $\sigma_0$  sont deux voisins de  $\sigma_j$  non voisins de  $\sigma_i$ , il existe au moins deux voisins de  $\sigma_i$  non voisins de  $\sigma_j$ , donc au moins un distinct de  $\sigma_j$ . On construit alors le graphe  $G'$  de mêmes sommets que  $G$  et où on a supprimé les arêtes  $\sigma_j\sigma_0$  et  $\sigma_k\sigma_i$  et ajouté les arêtes  $\sigma_i\sigma_0$  et  $\sigma_k\sigma_j$  :  $G$  et  $G'$  ont même suite de valences, mais  $\sigma_0$  possède un voisin de plus dans  $\{\sigma_{v_n}, \sigma_{v_n+1}, \dots, \sigma_1\}$  dans le graphe  $G'$  que dans le graphe  $G$ .

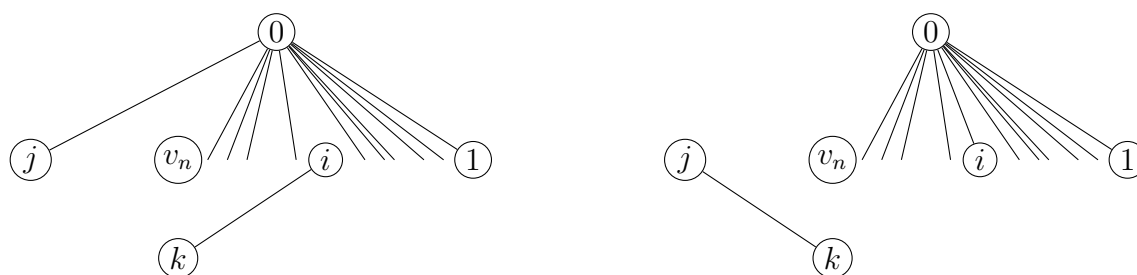


FIGURE 8 . La variable  $\ell = 0, 1, \dots, n-1$  repère le sommet  $\sigma_\ell = s_{n-\ell}$ .

Ainsi, parmi tous les graphes  $G$  ayant comme suite de valences  $\mathbf{v}$ , le graphe  $G^*$  ayant le maximum de voisins possibles pour  $\sigma_0$  dans  $\{\sigma_{v_n}, \sigma_{v_n-1}, \dots, \sigma_1\}$  a nécessairement tous ces sommets comme voisins de  $\sigma_0 = s_n$ .  $\square$

### 1.3. Connectivités

Un graphe est dit *connexe* si deux sommets quelconques (distincts) de  $G$  sont joignables par un chemin ; un digraphe est dit *fortement connexe* si deux sommets peuvent être joints

par un chemin orienté. Un graphe est l'union disjointe de graphes connexes disjoints, ses *composantes connexes*. Un graphe est connexe s'il ne compte qu'une composante connexe.

Un séparateur de  $G$  est un ensemble de sommets dont la suppression (accompagnée de la suppression des arêtes qui lui sont incidentes) transforme le graphe  $G$  en un graphe non connexe. Un graphe connexe  $G$  est dit séparable s'il existe un sommet  $s$  (dit *séparateur*, point ou nœud d'articulation) séparant  $G$ , inséparable dans le cas contraire.

Un graphe est dit au moins  $n$ -connexe si  $\#S_G > n$  et si  $G$  reste connexe lorsqu'on lui enlève  $n - 1$  quelconques sommets. Une formulation équivalente est donnée par le théorème de Menger :

**Théorème 1.2 (Menger (1927)).** *Un graphe est  $n$ -connexe si et seulement si deux sommets distincts quelconques peuvent être joints par  $n$  chemins indépendants*

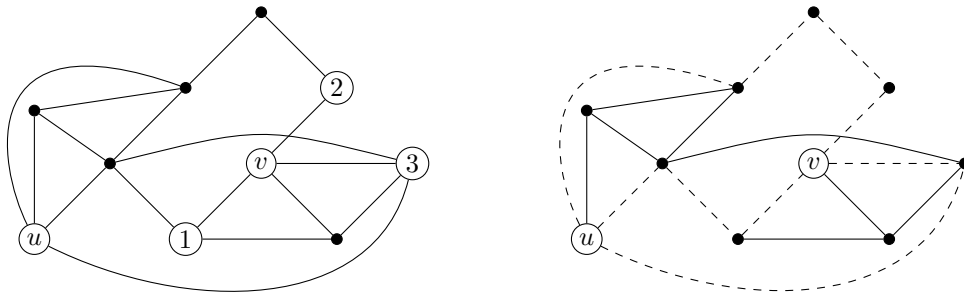


FIGURE 9 . Les deux sommets  $u$  et  $v$  sont séparés par l'ensemble des trois sommets  $\{1, 2, 3\}$  et joints par trois chemins indépendants.

La connectivité  $\kappa(G)$  est le plus grand  $n$  tel que  $G$  soit  $n$ -connexe. On a par exemple  $\kappa(K_n) = n - 1$ . Un graphe connexe  $G$  est séparable si et seulement si il est 2-connexe. Dans la Fig. 7, le premier graphe est 2-connexe, alors que le second ne l'est pas.

#### 1.4. Arbres

Un *arbre* est un graphe connexe sans lacet. Un graphe dont les composantes connexes sont des arbres est appelé *forêt*.

**Lemme 1.3.** (i) *Le chemin joignant deux sommets d'un arbre est unique.*

(ii) *Un arbre avec au moins 2 sommets a toujours au moins deux sommets de valence 1.*

(iii) *Le graphe obtenu par retrait d'une arête d'extrémités de valence au moins 2 à un arbre  $T$  est discontinu.*

(iv)  $\#A_T = \#S_T - 1$ .

*Démonstration.* — (i) Soient  $s$  et  $t$  deux sommets distincts de l'arbre  $T$ . Si  $\lambda_1 = s \dots t$  et  $\lambda_2 = s \dots t$  sont deux chemins distincts de  $T$  joignant  $s$  et  $t$ , alors  $\lambda_1 \overline{\lambda_2}$  est, après suppression des couples d'arêtes du type  $\overline{aa}$ , un lacet non vide, ce qui ne peut exister sur l'arbre  $T$ .

(ii) Soient  $s$  et  $t$  réalisant le sup de la distance  $d(s, t)$  : il existe un chemin  $s = s_1 s_2 \dots s_{n-1} s_n = t$ . Si  $s$  est de valence au moins 2 et  $\tilde{s}_2$  un voisin de  $s$  distinct de  $s_2$ , alors  $d(\tilde{s}_2, t) = d(s, t) + 1$ , ce qui contredit le caractère maximal de  $d(s, t)$ .

(iii) Supposons  $T \setminus a$  connexe. Soient  $s$  et  $t$  les extrémités de  $a$ . Les sommets  $s$  et  $t$  restent des sommets de  $T \setminus a$ . Si  $C$  est un chemin les joignant, alors  $Ca$  est un lacet dans  $T$ , ce qui n'est pas.

(iv) Si  $T$  a 1 sommet (soit 0 arête : ce cas est assez dégénéré) ou 2 sommets (soit 1 arête), la formule est vraie. On procède par récurrence. Soit  $T$  un arbre et  $a$  une arête terminale de  $T$  : alors  $T \setminus a$  est un arbre, ayant  $\#S_T - 1$  sommets et  $\#A_T - 1$  arêtes : on a donc  $\#A_T - 1 = \#S_T - 1 - 1$ , ce qui était énoncé.  $\square$

Une *arborescence* est un arbre  $T$  pointé en un sommet, dit *racine*,  $s_0$  : il existe une seule manière d'orienter l'arbre  $T$  tel qu'il existe un unique chemin orienté de  $s_0$  à tout sommet de l'arbre.

Un *arbre maximal* du graphe  $G$  est tout sous-graphe  $H$  de  $G$  qui est un arbre et tel que si on ajoute à  $H$  un sommet ou une arête de  $G$  on obtienne un sous-graphe de  $G$  qui ne soit plus un arbre. La première représentation du graphe de Petersen dans la Fig. 20 indique un arbre recouvrant.

**Lemme 1.4.** *Soit  $T$  un arbre maximal d'un graphe  $G$  connexe.*

(i) *L'arbre  $T$  contient tous les sommets de  $G$ .*

(ii) *Le nombre  $\#A_G - \#A_T$  d'arêtes de  $G$  hors de  $T$  ne dépend pas du choix de  $T$  : ce nombre, noté  $\beta_G$  et appelé nombre de Betti de  $G$ , vérifie*

$$\chi_G = \#S_G - \#A_G = 1 - \beta_G$$

*Démonstration.* — (i) Supposons  $S_G \setminus S_T$  non vide. Si  $s$  en est un sommet, soit  $C$  un chemin dans  $G \setminus S_T$  joignant  $s$  et  $S_T$  de longueur minimale. Alors  $T \sqcup C$  est un arbre contenant strictement  $T$ , contredisant la maximalité de  $T$ .

(ii) Vu  $\#S_T = \#S_G$  et  $\#S_T = \#A_T + 1$ , on a

$$\#A_G - \#A_T = \#S_G - \chi_G - \#S_T + 1 = 1 - \chi_G$$

qui est bien indépendant de l'arbre  $T$ .  $\square$

$\triangle$  **Remarque 1.1.** Un arbre maximal est appelé aussi arbre *recouvrant*. L'invariant  $\beta_G$  sera interprété dans la proposition 1.2 comme la dimension d'un espace de cycles.  $\nabla$

## 1.5. Chaînes et cycles

Soit  $G$  un graphe simple connexe. On choisit pour chaque arête une orientation et on note par  $\vec{A}_G$  l'ensemble de ces arêtes orientées positivement obtenues. L'espace  $C_0(G) = \mathbb{R}^{S_G}$  des fonctions de  $S$  dans  $\mathbb{R}$  a pour base  $(\delta_s)_{s \in S_G}$  avec  $\delta_s(s) = 1$  et  $\delta_s(s') = 0$  sinon. L'espace  $C_1(G) = \mathbb{R}^{A_G}$  des fonctions de  $A_G$  dans  $\mathbb{R}$  a une base  $(\delta_a)_{a \in \vec{A}_G}$  analogue. On notera, par souci de simplification, les sommes  $\sum_{s \in S} x_s \delta_s$  et  $\sum_{a \in \vec{A}_G} x_a \delta_a$  par les sommes formelles  $\sum_{s \in S} x_s s$  et  $\sum_{a \in \vec{A}_G} x_a a$  : de tels éléments sont appelés 0-chaîne et 1-chaîne respectivement et leur support est la partie  $\{s, x_s \neq 0\}$  et  $\{a, x_a \neq 0\}$  resp. Si  $\bar{a}$  est l'arête opposée à  $a$ , on notera  $\delta_{\bar{a}}$  la fonction  $-\delta_a$  : avec cette convention, que  $a$  soit orientée positivement ou non, on a toujours  $\delta_{\bar{a}} = -\delta_a$ .

**Définition 1.1.** Soit  $G$  un graphe orienté. L'opérateur  $\partial_G : \mathbb{R}^{A_G} \rightarrow \mathbb{R}^{S_G}$  est l'application linéaire définie par

$$\partial_G \delta_a = \delta_{\omega(a)} - \delta_{\alpha(a)}, \quad a \in \vec{A}_G.$$

$\triangle$  **Remarque 1.2.** L'opérateur  $\partial_G$  dépend de l'orientation choisie. Pour toute arête  $a$  (orientée positivement ou non), on a  $\partial_G \delta_a = \delta_{\omega(a)} - \delta_{\alpha(a)}$ .  $\nabla$

Un *cycle*  $c$  est une 1-chaîne de  $\mathbb{R}^{A_G}$  tel que  $\partial_G c = 0$ . L'ensemble des 1-cycles est noté  $Z_1(G) = \ker \partial_G$ .

▷ **Exemple 1.2.** La somme  $a_1 + a_2 + \dots + a_p$  associée au lacet orienté  $a_1 a_2 \dots a_p$  (pour lequel on a  $\alpha(a_1) = \omega(a_p)$ ) est un cycle. ◁

**Lemme 1.5.** Soit  $z \in \mathbb{R}^{A_G}$  un cycle non nul de  $G$ . Si  $G_z$  est le sous-graphe constitué des arêtes du support du cycle  $z$ , alors  $G_z$  contient au moins un lacet.

*Démonstration.* — Soit  $z = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_p a_p$  avec les  $x_i$  réels non nuls. Vu que  $\partial_G z = 0$ , le sommet  $\omega(a_1)$  apparaît dans une arête  $a_{j(1)}$  avec  $j(1) \neq 1$  : quitte à remplacer  $x_{j(1)} a_{j(1)}$  par  $-x_{j(1)} \overline{a_{j(1)}}$ , on peut supposer que  $\omega(a_1) = \alpha(a_{j(1)})$ . Pareillement, on introduit  $a_{j(2)}$  tel que  $\omega(a_{j(1)}) = \alpha(a_{j(2)})$ , puis  $a_{j(3)}, a_{j(4)}, \dots$ . Vu que  $G$  est fini, on obtient nécessairement des entiers  $k < \ell$  tels que  $\alpha(a_{j(k)}) = \omega(a_{j(\ell)})$  : le chemin  $a_{j(k)} a_{j(k+1)} \dots a_{j(\ell)}$  est un lacet de  $G$ . ◻

△ **Remarque 1.3.** Le raisonnement précédent écrit  $z = x_1 \ell_1 + z'$  avec  $\ell_1$  cycle induit par un lacet et  $z'$  cycle de support strictement plus petit que celui de  $z$ . En poursuivant sur  $z'$ , on obtient  $z = x_1 \ell_1 + y_2 \ell_2 + z''$ , puis finalement que  $z$  est la somme de lacets  $z = y_1 \ell_1 + y_2 \ell_2 + \dots + y_r \ell_r$ . ▽

Un arbre ne contient pas de lacet, donc

**Corollaire 1.1.** Si  $T$  est un arbre, alors  $Z_1(T)$  est nul.

On va maintenant étudier l'espace  $Z_1(G)$  pour un  $G$  quelconque. Pour en décrire facilement une base, on introduit un arbre maximal  $T$  de  $G$ . À l'arête  $b$  de  $A_{G,T} = A_G \setminus A_T$ , on associe l'unique lacet  $\ell_b$  de  $G$  tel que  $\ell_b = b c_b$  où  $c_b$  est l'unique chemin dans  $T$  d'extrémités identiques à celles de  $b$  : on notera pareillement par  $\ell_b$  la chaîne  $b + c_b$  de  $\mathbb{R}^{A_G}$ .

Soit  $z$  un 1-cycle. Il existe des scalaires  $(x_b)_{b \in A_{G,T}}$  tels que

$$z = \sum_{b \in A_{G,T}} x_b b + z' = \sum_{b \in A_{G,T}} x_b \ell_b + z''$$

où  $z'$  et  $z'' = z' - \sum_{b \in A_{G,T}} x_b c_b$  sont des 1-chaînes à support dans l'arbre  $T$ . Vu que les  $\ell_b$  sont des 1-cycles, il en est de même de  $z''$ , qui est donc nul puisque tout 1-cycle sur un arbre est nul. On obtient donc tout cycle  $z$  de  $G$  comme combinaison linéaire des  $\ell_b$ . La famille  $(\ell_b)_{b \in A_{G,T}}$  est libre : en effet si  $\sum_{b \in A_{G,T}} \alpha_b \ell_b = 0$ , on a  $\sum_{b \in A_{G,T}} \alpha_b b = -\sum_{b \in A_{G,T}} \alpha_b c_b$  où dans le membre de droite on a une 1-chaîne à support dans  $T$  et le membre de gauche hors de  $T$  : le membre de gauche est donc nul ce qui implique la nullité des  $x_b$ , et par suite  $\dim Z_1(G) = \#A_{G,T}$ . On a ainsi démontré

**Proposition 1.2.** Soit  $G$  un graphe simple et  $T$  un arbre maximal de  $G$ . Alors, la famille des chaînes  $\ell_b$ , où  $b$  parcourt l'ensemble  $A_G \setminus A_T$  est une base de  $\ker \partial_G$ .

avec pour corollaire

**Corollaire 1.2.** Soit  $G$  connexe. Le nombre de Betti  $\beta_G$  est la dimension de l'espace des 1-cycles  $Z_G$ . Il vérifie

$$\beta_G = 1 - \chi_G = 1 + \#A_G - \#S_G.$$

*Démonstration.* — On vient de montrer que pour  $T$  arbre maximal de  $G$ , la dimension  $\dim Z_1(G)$  est égal au nombre  $\#A_G - \#A_T$ . Or le lemme 1.3 énonce  $\#S_T = \#A_T + 1$  et le lemme 1.4  $\#S_G = \#S_T$ . ◻

## 1.6. Exercices

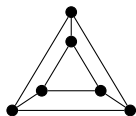
1. Faire la liste des graphes à 3 ou 4 sommets à isomorphisme près. Indiquer les listes de valences de sommets : existe-t-il des graphes à 4 sommets isovalents (*i. e.* avec même liste de valences) et non isomorphes.
2. Soit  $S = [1, \dots, n]$ . Quel est le nombre de graphes simples d'ensemble de sommets  $S$  ? (on n'identifiera pas les graphes isomorphes). Quel est le nombre de multigraphes à  $n$  sommets et au plus  $k$  arêtes entre deux sommets ?
3. (a) Prouver qu'un graphe fini dont chaque sommet est de valence au moins 2 possède un cycle. Existe-il un graphe infini sans cycle dont tous les sommets sont de valence au moins 2 ?  
(b) Prouver qu'un graphe (simple) à  $n \geq 3$  sommets et au moins  $n$  arêtes possède un cycle.
4. Prouver que dans tout graphe fini d'au moins deux sommets, il existe deux sommets de même degré.
5. Pour  $n$  donné, il existe deux graphes non isomorphes à  $n$  sommets possédant deux sommets de même degré et tous les autres de degré différents deux à deux.
6. Soit  $G$  connexe avec  $n$  sommets. Alors  $G$  a au moins  $n - 1$  arêtes.
7. Soit  $Q_n$  le graphe simple dit *hypercube de dimension  $n$*  dont chaque sommet est étiqueté par un nombre compris entre 0 et  $2^n - 1$ , avec une arête entre  $s_k$  et  $s_\ell$  si les écritures dyadiques de  $k$  et  $\ell$  diffèrent sur un seul chiffre. Dessiner  $Q_1$  et  $Q_2$ . Quel est le nombre d'arêtes de  $Q_n$  ?
8. Peut-on construire un graphe simple ayant  $n_0$  sommets et  $n_1$  arêtes pour a)  $(n_0, n_1) = (4, 7)$ , b)  $(n_0, n_1) = (5, 11)$ , c)  $(n_0, n_1) = (10, 46)$ .
9. Soit  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Le graphe de Petersen est le graphe simple ayant comme sommets les paires d'éléments de  $X$ , avec une arête entre deux sommets si les paires correspondantes sont disjointes. Donner une représentation graphique du graphe de Petersen et déterminer son nombre de sommets, d'arêtes et la suite des degrés. Quel est son diamètre ?
10. Le graphe  $L(G)$  des arêtes du graphe  $G$  a pour sommets les arêtes de  $G$  et une arête entre deux sommets si les arêtes correspondantes ont une extrémité commune. Tracer  $L(K_3)$ ,  $L(K_{1,3})$ ,  $L(C_5)$ ,  $L(E_5)$  et  $L(K_4)$ . En déduire la forme des graphes  $L(C_n)$ ,  $L(E_n)$  et  $L(L_n)$ .

Tracer les graphes des arêtes de tous les arbres dessinés dans ces notes.

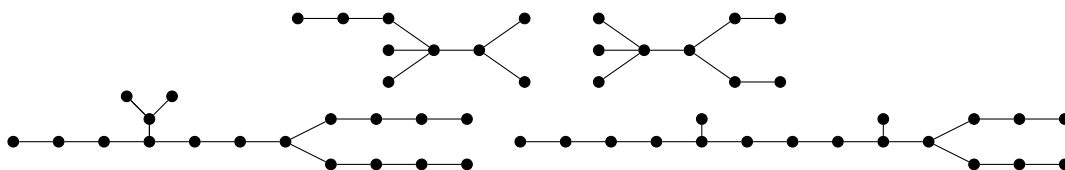
Tracer les graphes des arêtes des deux graphes suivants



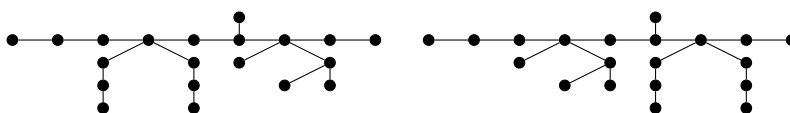
Déterminer, s'il existe, le graphe  $G$  dont le graphe  $L(G)$  associé est le graphe ci-dessous



11. Soit  $M$  la matrice associée au digraphe  $G$  : la matrice  $M$  est carrée d'ordre  $\#S$  et  $M_{ss'}$  est le nombre d'arêtes d'origine  $s$  et d'extrémité finale  $s'$ .  
Montrer que  $(M^p)_{ss'}$  est le nombre de chemins orientés de  $s$  à  $s'$  de longueur  $p$  et, si  $G$  est dépourvu de boucles,  $\text{tr } M^p/p$  est le nombre de lacets orientés de  $G$  de longueur  $p$ .
12. Supposons que le calcul matriciel se fasse dans l'algèbre de Boole  $\{0, 1\}$  avec  $1 + 1 = 1$  et les autres calculs comme dans les entiers. Montrer que  $(I_S + M)_{ss'}^p$  est nul suivant qu'il y ait un chemin orienté de  $s$  à  $s'$  ou non. Montrer que la suite des matrices  $(I_S + M)_{ss'}^p$  est croissante, stationnant pour un  $p < \#S$ . Montrer qu'il existe un chemin de  $s$  à  $s'$  de longueur  $k \leq \#S$  obtenu par suppression itérée de lacets inclus dans un chemin donné.
13. Soit, pour  $n \geq 3$ , le graphe  $W_n$ , dit *roue*<sup>(7)</sup> d'ordre  $n$ , constitué d'un circuit  $C_n$  complété d'un sommet  $s$  avec une arête entre  $s$  et chaque sommet de  $C_n$ . Montrer que  $W_n$  est 3-connexe
14. Le *graphe complémentaire*  $\overline{G}$  du graphe  $(G, S, A)$  a pour ensemble de sommets  $S$  et pour ensemble d'arêtes  $\{a \in S \times S \setminus \Delta_G, a \notin A\}$ .  
(i) Montrer que  $C_4$  (resp.  $L_5$ ) est isomorphe à son complémentaire. Qu'en est-il de  $C_n$  et  $L_n$  pour un entier  $n$  ?  
(ii) Montrer que si  $G$  est non connexe, alors  $\overline{G}$  est connexe. Montrer que la réciproque est fausse.
15. Soit  $F$  une forêt à  $p$  composantes connexes. Montrer que  $\#S_F = \#A_F + p$ .
16. Soit  $G$  un graphe connexe.  
(i) Majorer le nombre de sommets  $\#S_G$  en fonction du degré et du diamètre.  
(ii) Majorer le nombre d'arêtes  $\#A_G$  en fonction du degré et du nombre de sommets.
17. Montrer que  $\#S_G - \#A_G$  est invariant par subdivision. Montrer que  $\#S_G = \#A_G$  si  $G$  est un circuit et la réciproque est vraie pour des graphes  $G$  sans sommets de valence 1, , puis que  $\#S_G = \#A_G + 1$  si et seulement si  $T$  est un arbre.
18. Ces graphes sont-ils isomorphes ?



<sup>(7)</sup> *wheel* en anglais!



19. Tracer une représentation plane du squelette de la *coupole triangulaire* et de l'*icosaèdre tridiminué*<sup>(8)</sup>. Quelles sont leurs suites de valence ?
20. Un graphe est dit cubique si tous ses sommets sont de valence 3.
- Montrer qu'il existe un unique graphe cubique avec 4 sommets.
  - Montrer qu'un graphe cubique a un nombre pair de sommets.
  - Montrer que les transformations de la Fig. 10 permettent de passer d'un

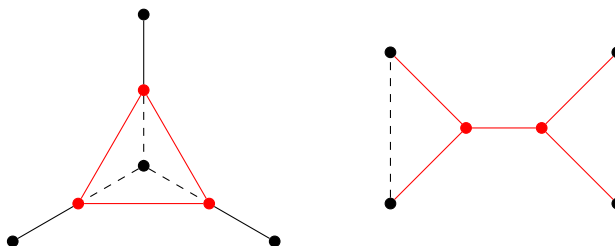


FIGURE 10 . Transformations  $Y\Delta$  et *pont*.

graphe cubique à  $s$  sommets à un graphe cubique à  $s + 2$  sommets.

- Montrer qu'il existe 2 graphes cubiques non isomorphes ayant 6 sommets.

21. Soit  $G$  et  $H$  deux graphes. Leur produit de Kronecker  $G \otimes H$  a pour ensemble de sommets  $S_G \times S_H$  et il y a une arête  $((s, t), (s', t'))$  si et seulement si  $(s, s')$  et  $(t, t')$  sont des arêtes de  $G$  et  $H$  resp. Le graphe  $G \otimes K_2$  est appelé le double biparti de  $G$ . Montrer que si  $G$  est biparti, son double est l'union de deux copies de  $G$ , alors que si  $G$  n'est pas biparti, alors  $G \otimes K_2$  est biparti.

<sup>(8)</sup>Ce sont des exemples de solides de Johnson, cf [mathworld.wolfram.com/JohnsonSolid.html](http://mathworld.wolfram.com/JohnsonSolid.html)

## CHAPITRE 2

### EULER ET HAMILTON

Ce chapitre s'intéresse à l'existence de certains lacets dans un graphe  $G$  connexe

- existence d'un plongement du lacet  $L_{\#A_G}$  dans  $G$ , *i. e.* une suite  $a_1 a_2 \dots a_{\#A_G}$  d'arêtes avec  $a_i$  et  $a_j$  distinctes pour  $i \neq j$ ,
- l'existence d'une injection de  $L_{\#S_G}$  dans  $G$ , *i. e.* une suite  $s_1 s_2 \dots s_{\#S_G}$  de sommets avec  $s_i$  et  $s_{i+1}$ , adjacents et  $s_i \neq s_j$  si  $i \neq j$ .

Un lacet du premier type, et les graphes qui en sont pourvus, est dit *eulérien*, celui du second type est dit *hamiltonien*.

#### 2.1. Graphe eulérien

Euler résolut le problème des ponts de Königsberg<sup>(1)</sup> : il n'est pas possible de trouver un itinéraire traversant chaque pont une et une seule fois. Ce résultat est souvent salué comme le premier relevant de la topologie, en en faisant Euler quasiment son fondateur<sup>(2)</sup>.

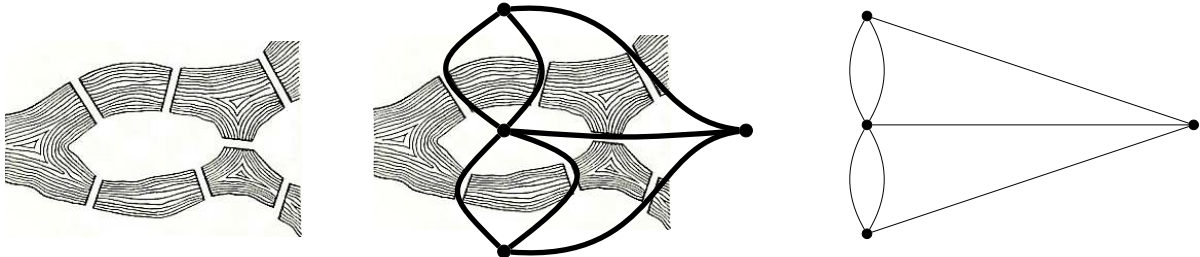


FIGURE 11 . Königsberg (la Pregel, les îles et les ponts) et le graphe modélisant la traversée des ponts.

**Définition 2.1.** Un chemin (resp. lacet) du graphe  $G$  connexe est dit *eulérien* s'il passe par chaque arête de  $G$  exactement une fois. Un graphe est dit *eulérien* s'il admet un lacet eulérien.

<sup>(1)</sup> Aujourd'hui Калининград en Russie, Königsberg était une ville royale de Prusse à l'époque d'Euler. Immanuel Kant (1724-1804) y a passé toute sa vie, les mathématiciens Christian Goldbach (1690-1764), Alfred Clebsch (1833-1872), David Hilbert (1862-1943) et Rudolf Lipschitz (1832-1903) y naquirent. Euler présenta sa solution devant l'académie de Saint-Petersbourg le 26 août 1735, qui donna lieu à publication sous le titre *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* en 1741 dans les *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* (8, p. 128-140).

<sup>(2)</sup> La relation d'Euler (9) reliant nombres de faces, d'arêtes et de sommets d'un polyèdre convexe ou d'un graphe planaire est tout autant caractéristique d'une vision de topologue.



▷ **Exemples 2.1.**

1. Le graphe de la Fig. 11 modélisant les îles et ponts de Königsberg n'est pas eulérien : chaque sommet représente une composante connexe terrestre de la Fig. 11, chaque pont étant représenté par une arête.
2. La maison n'est pas eulérienne mais admet un chemin eulérien. ◁

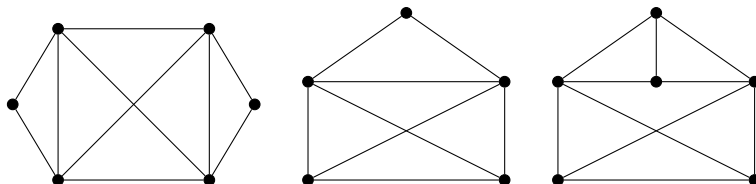


FIGURE 12 . (a) Un graphe eulérien, (b) la maison admettant un chemin eulérien, mais sans lacet eulérien, (c) un graphe sans chemin eulérien.

**Théorème 2.1 (Euler (1735) et Hierholzer (1873)).** *Un graphe est eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de valence paire*

*Un graphe, non eulérien, admet un chemin eulérien si tous ses sommets sont de valence paire, à l'exception de deux sommets de valence impaire (qui seront les extrémités du chemin eulérien).*

*Démonstration.* — Si  $G$  a un lacet eulérien  $\gamma$ , alors en le sommet  $s$  le lacet  $\gamma$  y arrive autant de fois qu'il en sort : la valence de  $s$  est donc paire. L'argument vaut aussi pour un chemin eulérien.

Réciproquement, soit  $G$  un graphe dont les sommets sont de valence paire. Considérons un lacet  $\gamma$  de  $G$  qui soit eulérien en restriction au graphe déduit de  $G$  et de cardinal maximal  $\#A_\gamma$ . Supposons  $\gamma$  non eulérien dans  $G$ , *i. e.*  $\#A_\gamma < \#A_G$ . Ôtons de  $G$  les arêtes du graphe  $\gamma$ . Le graphe (non vide) obtenu  $G_\gamma$  a ses sommets de valence paire, sans être nécessairement connexe. Il existe un lacet  $\varphi$  dans  $G_\gamma$  (puisqu'il en est sur tout graphe dont les sommets sont à valence paire), ayant un sommet commun avec  $\gamma$ . Alors  $\gamma \cup \varphi$  est un lacet eulérien de longueur strictement plus grande que  $\gamma$ , au contraire de l'hypothèse. Ainsi  $\gamma$  parcourt l'ensemble des arêtes de  $G$ .

Si  $G$  a tous ses sommets de valence paire à l'exception de deux d'entre eux  $s$  et  $s'$ , alors le graphe  $G'$ <sup>(3)</sup> obtenu de  $G$  par ajout d'une arête entre  $s$  et  $s'$  a tous ses sommets de valence paire et est donc eulérien : un lacet eulérien de  $G'$  a une trace sur  $G$  qui est un chemin eulérien (d'extrémités  $s$  et  $s'$ ). ◻

La construction du lacet eulérien sur le graphe eulérien  $G$  peut se faire suivant l'algorithme dit de Fleury (1883) : démarrons avec un sommet  $s_0$  et  $C_0 = \emptyset$ , puis répétons l'étape suivante

Supposons  $C_j = s_0 a_1 s_1 a_2 \dots a_j s_j$  construit. Choisissons  $a_{j+1}$  dans le graphe  $G_j = G \setminus \{a_1, \dots, a_j\}$  tel que  $s_j$  soit un sommet de  $a_{j+1}$  et  $a_{j+1}$  n'est pas une arête séparatrice du graphe  $G_j$ .

Il est toujours possible de répéter cette étape : en effet, le graphe  $G_j$  est connexe et a tous ses sommets de valence paire, sauf au plus les deux sommets  $s_0$  et  $s_j$  exactement :

<sup>(3)</sup>Si  $G$  est simple,  $G'$  ne l'est pas nécessairement : le concept de graphe eulérien ne présuppose pas que le graphe  $G$  soit simple.

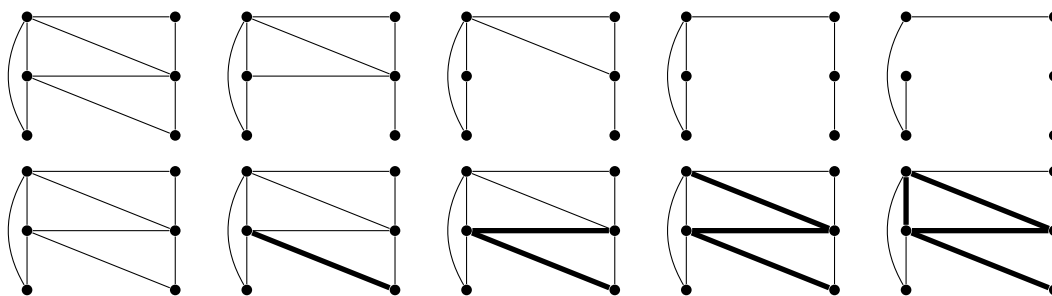


FIGURE 13 . Algorithme de Fleury : la suite des graphes  $G_j$  et la construction du lacet eulérien.

il existe un chemin  $E_j = s_j a \dots$  eulérien sur  $G_j$  démarrant en  $s_j$ . S'il est pris pour  $a_{j+1}$  l'arête initiale de  $E_j$ , le graphe  $G_{j+1} = G_j \setminus a_{j+1}$  couvert par le chemin  $E_j \setminus a$  est connexe.

Ainsi, le chemin  $C_n = s_0 a_1 s_1 a_2 \dots a_n s_n$  obtenu au terme du processus de Fleury est eulérien.

## 2.2. Graphe hamiltonien

**Définition 2.2.** Un chemin (resp. circuit) du graphe  $G$  connexe est dit *hamiltonien* s'il passe par chaque sommet de  $G$  exactement une fois. Un graphe est dit *traçable* s'il admet un chemin hamiltonien, *hamiltonien connexe* si pour tout couple de sommets distincts il existe un chemin hamiltonien avec pour extrémités ce couple de sommets, *hamiltonien* s'il contient un circuit hamiltonien.

▷ **Exemples 2.2.**

1. Pour  $n \geq 3$ , le circuit  $C_n$  est hamiltonien.
2. Pour  $n \geq 3$ , le graphe complet  $K_n$  est hamiltonien : un lacet hamiltonien est  $123 \dots n1$ . Le lacet hamiltonien n'est pas unique.
3. Le graphe associé à un polyèdre régulier (tétraèdre, cube, octaèdre, icosaèdre, dodécaèdre) est hamiltonien.

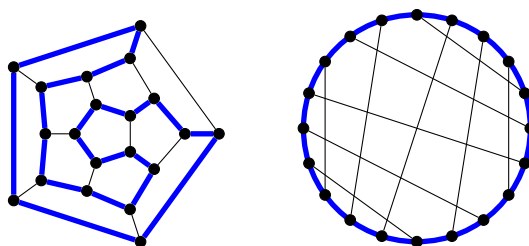


FIGURE 14 . Le graphe du dodécaèdre est hamiltonien.

4. Le graphe de Petersen n'est pas hamiltonien.
5. La recherche d'un chemin hamiltonien est la modélisation du problème du voyageur de commerce (trouver un chemin incluant chaque ville de sa tournée une et une seule fois). Il apparaît aussi dans le design de cartes électroniques (où les sommets représentent les transistors). ◁

Déterminer si un graphe est hamiltonien ou pas est un problème difficile, au contraire de la caractérisation eulérienne. La condition nécessaire de la proposition suivante n'est pas suffisante comme le graphe de Petersen l'atteste, alors que la condition suffisante d'Ore

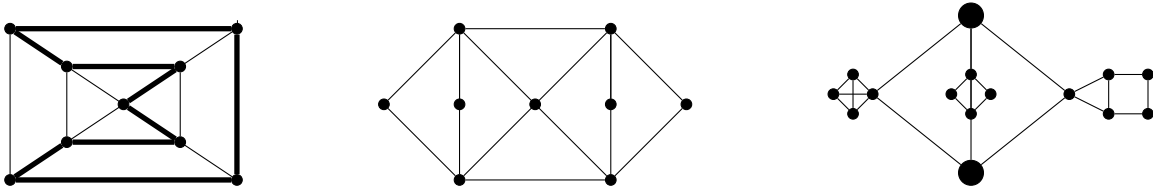


FIGURE 15 . Un graphe hamiltonien non eulérien, un graphe eulérien non hamiltonien et un graphe non hamiltonien ne vérifiant pas la condition nécessaire de la Prop. 2.1.

n'est pas plus nécessaire : elle n'est pas satisfaite par le graphe du dodécaèdre (Fig. 14) qui est 3-régulier à 20 sommets.

**Proposition 2.1.** *Si  $G$  est un graphe simple hamiltonien, alors pour toute partie  $S$  non vide de  $S_G$ , le nombre de composantes connexes de  $G \setminus S$  est au plus  $\#S$ .*

*Démonstration.* — Soit  $S$  partie non vide de  $S_G$ ,  $s$  un sommet de  $S$  et  $C = (s = s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, s_n = s)$  un circuit hamiltonien. Soient  $G_1, \dots, G_k$  les composantes connexes de  $G \setminus S$ . Si  $k > 1$ , pour  $i = 1, \dots, k$ , désignons par  $\sigma_i = s_{n(i)}$  le dernier sommet de  $G_i$  dans le circuit  $C$  et  $\tau_i$  le sommet suivant  $\sigma_i$  dans  $C$ . Le sommet  $\tau_i$  est dans  $S$ , sinon il serait dans la composante connexe de  $G \setminus S$  contenant  $\sigma_i$ , soit  $G_i$ , ce qui contredirait le caractère maximal de  $n(i)$ . On a donc  $k$  sommets dans  $S$ , soit la conclusion  $k \leq \#S$ .  $\square$

**Théorème 2.2 (Ore (1960)).** *Soit  $G$  un graphe connexe tel que pour tous sommets  $s$  et  $t$  non voisins  $v_s + v_t \geq \#S_G$ . Alors le graphe  $G$  est hamiltonien.*

*Démonstration.* — On raisonne par l'absurde, en considérant un graphe  $G$  sans lacet hamiltonien vérifiant  $v_s + v_t \geq \#S_G$  pour tous sommets  $s$  et  $t$  non adjacents, l'ordre  $\#S_G$  étant minimal et le nombre d'arêtes  $\#A_G$  étant maximal une fois  $\#S_G$  fixé. Le graphe  $G$ , non hamiltonien, n'est pas complet : soit  $s$  et  $t$  deux sommets de  $G$  non adjacents. La propriété de minoration de la somme des degrés de deux sommets non adjacents est encore valable pour le graphe  $G_{st}$  obtenu de  $G$  par ajout d'une arête  $\{s, t\}$  : par extrémalité du choix de  $G$ , le graphe  $G_{st}$ , vérifiant  $\#S_{G_{s,t}} = \#G$  et  $\#A_{G_{s,t}} = \#A + 1$ , a un lacet hamiltonien  $C$ . Les sommets  $s$  et  $t$  sont adjacents dans  $C$ , sinon  $C$  serait un lacet hamiltonien dans  $G$ . On peut écrire  $C = s_1 s_2 \dots s_n s_1$  avec  $s_1 = s$  et  $s_n = t$ . Soit  $I_s$  l'ensemble des indices  $i$  de  $\{1, \dots, \#S_G\}$  tels que  $s_{i+1}$  soit adjacent à  $s$  dans  $G$  et  $I_t$  l'ensemble des indices  $i$  de  $\{1, \dots, \#S_G\}$  tels que  $s_i$  soit adjacent à  $t$  dans  $G$ . La condition sur les degrés de  $s$  et  $t$  s'écrit  $\#I_s + \#I_t \geq \#S_G$ . Vu que  $n \notin I_s \cup I_t$ , on a  $I_s \cup I_t \subset \{1, 2, \dots, n-1\}$ , d'où  $I_s \cap I_t$  n'est pas vide : soit  $h$  un entier de cette intersection. Alors le chemin  $s_1 s_{h+1} s_{h+2} \dots s_n s_h s_{h-1} s_{h-2} \dots s_2 s_1$  est un chemin hamiltonien de  $G$ , ce qui est contradictoire avec l'hypothèse non hamiltonienne de  $G$ .  $\square$

### 2.3. Problèmes P et NP

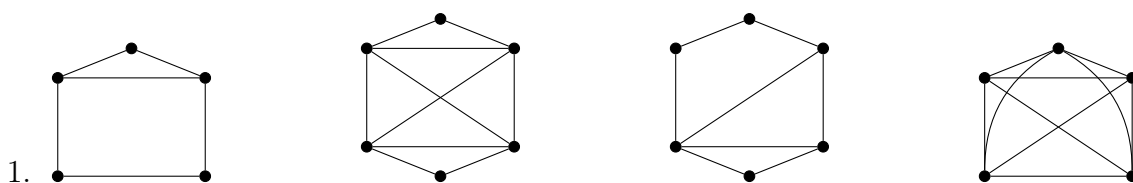
Un problème est de classe  $P$  (*Polynomial*) si on en connaît un algorithme de résolution de longueur polynomiale en la taille des données alors qu'un problème est de classe  $NP$  (*Non déterministe Polynomial*) si on ne connaît pas nécessairement de tel algorithme, bien qu'il existe un algorithme polynomial pour vérifier si une réponse proposée est effectivement une solution. Brièvement dit, on a d'une part les problèmes *faciles à résoudre*,

d'autre part les problèmes à *solutions faciles à vérifier*. C'est une grande conjecture d'établir que ces deux types de problèmes sont effectivement différents (un problème qui nous paraît difficile à résoudre peut très bien ne pas l'être en fait) : c'est l'une des dix conjectures énoncées pour le XXI<sup>e</sup> siècle en 2000 et dont la solution a été dotée par la fondation Clay d'un prix de un million de dollars US.

L'existence d'un lacet eulérien dans un graphe est un problème de classe  $P$  : il suffit d'examiner la parité de la valence de chaque sommet. Au contraire, celle d'un parcours hamiltonien est de classe  $NP$  : on ne sait pas prouver actuellement en un temps polynomial (*i. e.* autrement qu'en listant tous les parcours) qu'un tel parcours existe, même s'il est facile de vérifier le caractère hamiltonien ou non hamiltonien d'un parcours donné.

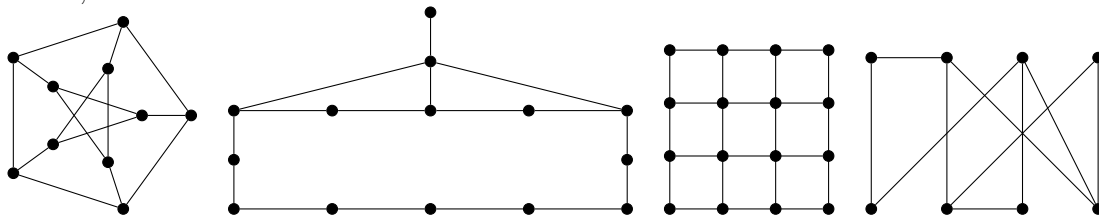
La question des problèmes  $P$  et  $NP$  n'est pas seulement théorique car les informaticiens considèrent généralement qu'un problème non  $P$  est impraticable dès que la longueur de ces données devient un peu importante, même s'il est vrai que  $N^{1000} > 1,02^N$  pour des  $N$  déjà conséquents.

## 2.4. Exercices



1. Ces graphes admettent-ils des lacets eulériens ? des chemins eulériens ? Les tracer.
2. Montrer que le problème du chemin hamiltonien sur le graphe  $G$  est équivalent au problème du circuit hamiltonien sur le graphe  $K_{\{*\},G}$  obtenu en ajoutant un sommet  $*$  à  $G$  et un arête entre  $*$  et tout sommet de  $G$ .
3. Soit  $G$  et  $L(G)$  son graphe des arêtes (*cf.* exercice 1.6.10).
  - (i) Si  $G$  eulérien, le graphe  $L(G)$  est-il eulérien ? Est-il hamiltonien ?
  - (ii) Si  $G$  hamiltonien, le graphe des arêtes  $L(G)$  est-il eulérien ?
4. Un graphe  $G$  est dit *biparti* si l'ensemble des sommets  $S$  admet une partition  $S = S_1 \cup S_2$  telle que toute arête ait une extrémité dans  $S_1$  et l'autre dans  $S_2$ .
  - (i) Montrer que si  $\#S_1 \neq \#S_2$  alors  $G$  n'est pas hamiltonien.
  - (ii) Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement si un lacet quelconque est de longueur paire.
5. Dessinez un graphe connexe d'ordre au moins 5 qui est (a) hamiltonien et eulérien, (b) hamiltonien et non eulérien, (c) non hamiltonien et eulérien, (d) non hamiltonien et non eulérien.

6. Indiquer si ces graphes sont hamiltoniens : si oui, préciser un lacet hamiltonien, sinon, en donner la raison.



7. Soit  $G$  un graphe connexe avec  $2k$  sommets de degré impair. Montrer qu'il existe  $k$  chemins (localement) eulériens recouvrant les arêtes de  $G$  (cf Fig. 16).

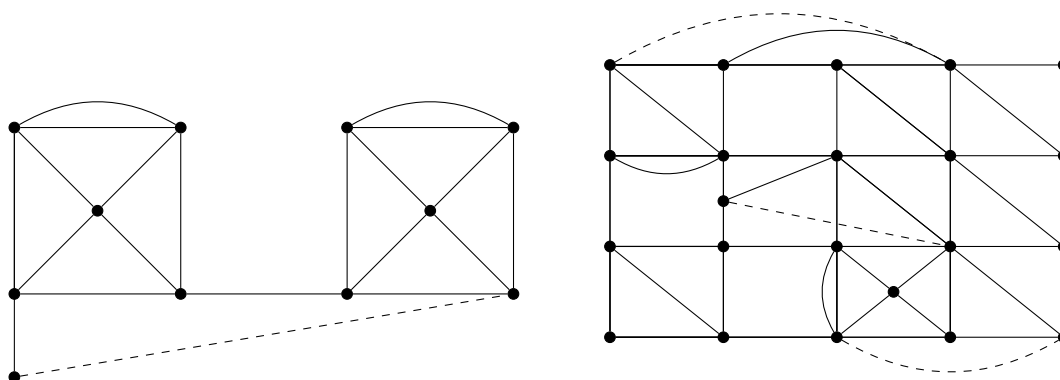
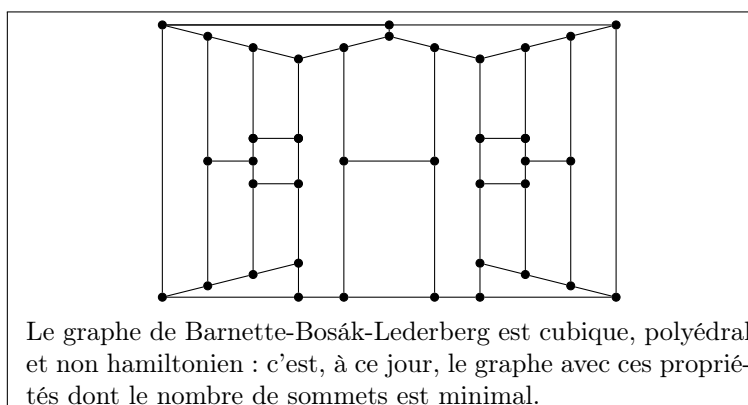


FIGURE 16 . Deux graphes avec 2 et 6 sommets de valence impaire.

8. Un groupe de 9 étudiants se réunit chaque jour autour d'une table ronde. Combien de jours peuvent-ils se réunir si l'on souhaite que personne n'ait deux fois le même voisin ?  
 Reprendre la question précédente, si l'on dispose d'une table à 5 places et d'une table à 4 places.
9. Montrer que le graphe  $K_n$  a  $(n - 1)!/2$  lacets hamiltoniens.
10. Un graphe connexe est dit *unicyclique* s'il possède un unique lacet.  
 Dessiner tous les graphes unicycliques avec 5 sommets. Pour chacun d'entre eux, donner le diamètre et dire s'ils sont eulériens et/ou hamiltoniens.



## CHAPITRE 3

# THÉORIE DE RAMSEY

La théorie de Ramsey énonce l'existence de structures régulières dans des ensembles arbitraires de taille suffisante, résultat résumé dans la boutade : *le désordre complet est impossible*<sup>(1)</sup>. Ainsi, pour un entier  $n$ , il existe un entier  $R(n)$  tel qu'un dîner à  $N$  convives avec  $N \geq R(n)$  rassemble au moins  $n$  convives qui se connaissent mutuellement ou bien  $n$  convives sans aucun lien de connaissance entre eux. Pour la fonction  $R$  optimale (*i. e.* la plus petite de ces fonctions), on montre  $R(3) = 6$ ,  $R(4) = 18$  et l'encadrement  $R(5) \in [43, 49]$ , sans que la valeur de  $R(5)$  ne soit connue<sup>(2)</sup>.

L'exemple basique de la théorie de Ramsey peut être exprimé en terme de coloriage : soit  $n$  un entier, il existe un entier  $R(n)$  tel que pour  $N \geq R(n)$ , tout graphe complet  $K_N$  à  $N$  sommets aux arêtes coloriées en rouge ou bleu admette comme sous-graphe un graphe complet  $K_n$  unicolore.

La théorie de Ramsey appartient au domaine de la combinatoire. Ses énoncés utilisent souvent le principe des tiroirs<sup>(3)</sup> (attribué à Dirichlet) : soient  $n$  paires de chaussettes distribuées dans  $m$  tiroirs, alors, si  $n > m$ , il existe un tiroir qui contient au moins deux paires ; ou encore, un ensemble de cardinal  $1 + kr$  dont les éléments sont coloriés avec  $r$  couleurs admet une partie unicolore de  $k + 1$  éléments. Mais certains de ses résultats (et preuves) font appel à la théorie des systèmes dynamiques (théorie ergodique en particulier) et l'analyse de Fourier (pour des preuves donnant de bien meilleures estimations sur certaines constantes que).

Dans les travaux originaux de Ramsey, les structures coloriées sont les arêtes de graphes. La théorie additive de Ramsey porte sur des coloriage de parties de monoïdes additifs ( $\mathbb{N}, \mathbb{Z}_p$  par ex.) : on en donnera un exemple avec le théorème de Schur.

### 3.1. Le théorème de Ramsey (1930)

Commençons par montrer  $R(3, 3) = 6$  soit la proposition

**Proposition 3.1.** *(i) Pour tout bicoloriage des arêtes du graphe  $K_6$ , il existe un triangle de la première couleur ou un de la seconde.*

---

<sup>(1)</sup>Un autre exemple venant conforter cette assertion est l'assertion de Bolzano assurant existence dans toute suite bornée d'une sous-suite convergente. Pour un autre exemple, *cf.* l'exercice ci-dessous sur le résultat de Erdős-Szekeres.

<sup>(2)</sup>L'[Encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers](http://oeis.org) [The On-line encyclopedia of integer sequences, oeis.org] contient la liste A120414 des *nombres  $R(n)$  de Ramsey conjecturés* : 0, 1, 2, 6, 18, 45, 102, 213, 426, 821, 1538, 2820, 5075, 8996, 15743, 27247, 46709, 79405, 133996, 224640, 374400, ... , soit  $R(n) = \text{ceil}((3/2)^{(n-3)}n(n-1))$ .

<sup>(3)</sup>Les anglophones parlent de *casiers* (pigeonholes).

(ii) Il existe un bicoloriage du graphe complet  $K_5$  sans aucun triangle d'une des deux couleurs.

*Démonstration.* — L'assertion (ii) est prouvée par la Fig. 17.

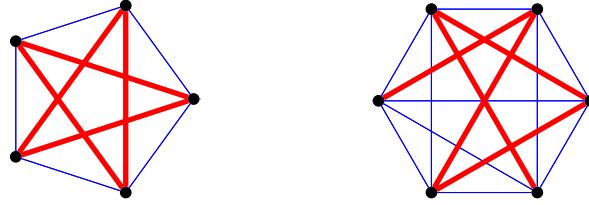


FIGURE 17 . Graphes bicoloriés (fin/gras) sans triangle unicolore pour  $K_5$  et avec pour le  $K_6$ .

Pour (i), soit  $s$  un sommet de  $K_6$  :  $s$  est l'extrémité de cinq arêtes dont 3 au moins sont de la même couleur, disons bleue, connectant  $s$  aux sommets  $r, t, u$ . Si une des arêtes  $(r, t), (r, u), (t, u)$  est bleue,  $K_6$  a un triangle bleu. Sinon, ces trois arêtes sont rouges et déterminent un triangle rouge, ce qui achève la preuve.  $\square$

**Théorème 3.1 (Pour deux couleurs).** Soient  $m, n$  des entiers et soit  $K_N$  un graphe complet avec  $N \geq \binom{m+n-2}{n-1} = \frac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!}$ . Alors, pour tout coloriage des arêtes de  $K_N$  avec deux couleurs, il existe soit un sous-graphe  $K_m$  de la première couleur, soit un sous-graphe  $K_n$  de la seconde couleur.

*Démonstration.* — On fait une récurrence sur  $m + n$ . Lorsque  $m = 1$  ou  $n = 1$ , la conclusion est évidente :  $R(m, 1) = R(1, n) = 1$ . Soit donc  $m, n$ , avec  $m, n \geq 2$ , et supposons l'énoncé du théorème démontré pour tous les couples  $(\mu, \nu)$  avec  $\mu + \nu < m + n$ . On suppose que les couleurs du coloriage sont rouge et bleu.

Soit  $K_N$  un graphe complet avec  $N \geq \binom{m+n-2}{n-1}$  et soit  $s$  un sommet de  $K_N$ . Ce sommet est adjacent à au moins

$$\binom{m+n-2}{n-1} - 1 = \binom{m+n-3}{m-2} + \binom{m+n-3}{m-1} - 1$$

sommets. Par le principe des tiroirs,  $s$  est adjacent à au moins  $\binom{m+n-3}{m-2}$  sommets par des arêtes bleues, ou  $\binom{m+n-3}{n-1}$  sommets par des arêtes rouges. Dans le premier cas, il existe un sous-graphe complet  $K'$  avec au moins  $\binom{m+n-3}{m-2}$  sommets connectés à  $s$  par une arête bleue. Par l'hypothèse de récurrence pour  $(m-1, n)$ ,  $K'$  contient soit un sous-graphe complet  $K'_b$  avec  $m-1$  sommets connectés par des arêtes bleues, soit un sous-graphe complet  $K'_r$  avec  $n$  sommets. Dans le dernier cas, nous en avons terminé avec  $K'_r$  qui a au moins  $n$  sommets tous reliés par des arêtes rouges, alors qu'autrement on trouve un  $K_b$  bleu en complétant  $K'_b$  (ayant au moins  $m-1$  sommets) par  $s$  et toutes les arêtes (bleues!) joignant  $s$  à  $K'_b$  :  $K_b$  est complet avec au moins  $m$  sommets. Nous avons conclu dans le cas où  $s$  est relié à au moins  $\binom{m+n-3}{m-2}$  sommets par des arêtes bleues. Le cas où  $s$  est relié à  $\binom{m+n-3}{m-1}$  sommets rouges est traité de manière similaire.  $\square$

$\triangle$  **Remarque 3.1.** On peut reformuler le théorème précédent en l'existence d'une fonction  $R$  de deux variables telles que tout graphe complet  $K_N$  aux arêtes bi-coloriées en rouge et bleu et de taille  $N$  au moins  $R(n, m)$  admette soit un sous-graphe complet à  $n$  sommets à arêtes rouges, soit un sous-graphe complet à  $m$  sommets à arêtes bleues :

$R(m, n) \leq \binom{m+n-2}{n-1}$ . Cette borne est optimale seulement pour des très petites valeurs de  $m$  et  $n$ . Par exemple, on sait que  $R(5, 5)$  ( $\leq \binom{8}{4} = 70$ ) est compris entre 43 et 49<sup>(4)</sup>.

On peut exprimer la contrainte de Ramsey sans introduire de coloriage :  $R(m, n)$  est l'entier minimum tel que tout graphe à  $R(m, n)$  sommets contienne soit un sous-graphe complet d'ordre  $m$ , soit  $n$  sommets totalement indépendants (*i. e.* sans aucune arête entre deux de ces sommets). On se ramène à l'énoncé colorié en considérant un graphe  $G$  à  $N$  sommets comme sous-graphe du graphe complet  $K_N$ , avec des arêtes bleues pour celles présentes dans le graphe  $G$  et rouges pour les arêtes inexistantes sur le graphe  $G$ .

**Théorème 3.2 (Ramsey pour  $r$  couleurs).** *Soient  $r, n_1, \dots, n_r$  des entiers. Il existe un entier  $R(n_1, \dots, n_r; r)$  tel que pour tout graphe complet  $K_N$  avec  $N \geq R(n_1, \dots, n_r; r)$  sommets et avec un  $r$ -coloriage de ses arêtes, il existe une couleur  $j \in [1, \dots, r]$  et un sous-graphe complet  $K_{n_j}$  unicolore de couleur  $j$ .*

*Démonstration.* — Le théorème bicolore de Ramsey précédent énonce l'existence d'une fonction  $R(m, n; 2) = R(m, n)$  unicolore, ce qui permet d'initier une récurrence. Nous allons prouver, pour  $r \geq 3$

$$R(n_1, \dots, n_r; r) \leq R(n_1, \dots, n_{r-2}, R(n_{r-1}, n_r; 2); r-1).$$

Soit  $K_t$  un graphe complet  $r$ -colorié avec  $t = R(n_1, \dots, n_{r-2}, R(n_{r-1}, n_r; 2); r-1)$ . Identifions les couleurs  $r-1$  et  $r$  : par l'hypothèse de récurrence, le graphe  $K_t$   $(r-1)$ -colorié contient soit un  $K_{n_i}$  unicolore colorié avec la couleur  $i \in [1, r-2]$  soit un  $K_{R(n_{r-1}, n_r; 2)}$  colorié avec les deux couleurs  $r$  et  $r-1$ . Dans le premier cas, nous en avons terminé. Dans le second cas, nous avons un graphe complet bi-colorié auquel on peut appliquer le théorème de Ramsey à 2 couleurs : il existe un sous-graphe complet  $K_{n_\rho}$  unicolore soit de couleur  $\rho = r-1$  soit de couleur  $\rho = r$ , ce qui achève aussi la preuve.  $\square$

On a

$$\begin{aligned} R(n, n) &\leq \binom{2n-2}{n-1} = 4^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \leq 4^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right) \left(1 - \frac{1}{2k}\right)} \\ &= 4^{n-1} \sqrt{\prod_{\ell=2}^{2n-1} \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)} = \frac{4^{n-1}}{\sqrt{2n-1}}. \end{aligned}$$

Trouver un minorant  $b$  de  $R(n)$  exige de montrer que tout graphe à  $b$  sommets ne contient ni graphe complet  $K_n$ , ni partie de  $n$  sommets indépendants. La minoration suivante, établie par Erdős, est un exemple de la méthode probabiliste : la preuve permet d'assurer l'existence d'un graphe sans jamais le construire, uniquement en montrant qu'une partie est non vide, car correspondant à un événement de probabilité non nulle.

**Théorème 3.3.** *Pour  $n \geq 3$ ,*

$$R(n, n) > 2^{n/2}.$$

*Démonstration.* — Soit  $N = 2^{n/2}$ . Considérons un coloriage aléatoire de  $K_N$  où chaque arête est coloriée indépendamment en rouge ou bleu avec la probabilité  $p = 1/2$ . La probabilité pour un coloriage de  $K_N$  d'induire un coloriage monocouleur sur un graphe  $K_n$

<sup>(4)</sup>Le nombre  $G_n$  de graphes à  $n$  sommets étiquetés est  $G_n = 2^{\binom{n}{2}} = 2^{(n(n-1)/2)}$  : le nombre  $K_n$  des graphes connexes n'a pas de formule simple, mais l'asymptotique  $K_n = G_n(1 - 2n2^{-n} + o(2^{-n}))$ . Presque tout graphe à  $n$  sommets est donc connexe. Cette formule indique bien comme l'ensemble de graphes de taille  $n = 43$  est *énorme* et explique la difficulté à préciser  $K(5) = R(5, 5)$  !



associé à un  $n$ -uplet de sommets est  $2/2^{\binom{n}{2}} = 2p^{\binom{n}{2}}$ . Il y a  $\binom{N}{n}$   $n$ -uplets de sommets, ainsi la probabilité qu'un coloriage de  $K_N$  ait un sous-graphe  $K_n$  unicolore est au plus

$$\binom{N}{n} \frac{2}{2^{\binom{n}{2}}} < \frac{2N^n}{n!2^{n(n-1)/2}} = \frac{2^{1+n/2}}{n!} < 1$$

pour  $n \geq 3$ . Par suite, l'événement complémentaire a une probabilité non nulle, *i. e.* il y a un coloriage n'ayant aucun  $K_n$  unicolore. En résulte  $R(n, n) > 2^{n/2}$ .  $\square$

### 3.2. Le théorème de Schur (1916)

**Théorème 3.4 (Schur).** *Soit  $n > 1$ . Il existe un entier  $S(n)$  tel que pour tout entier premier  $p > S(n)$  la congruence  $x^n + y^n \equiv z^n \pmod{p}$  a une solution  $(x, y, z)$  avec  $p$  ne divisant par  $xyz$ .*

$\triangle$  **Remarque 3.2.** La condition  $xyz$  non divisible par  $p$  évite les solutions triviales du type  $x \equiv 0 \pmod{p}$  et  $y \equiv z \pmod{p}$ . Vu que  $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ , on peut se limiter à  $n$  premier à  $p$ . Ce théorème de Schur énonce que l'équation de Fermat  $x^n + z^n = z^n$  dans  $\mathbf{Z}_p$  a des solutions non triviale pour  $p$  assez grand.  $\nabla$

Le théorème précédent est un corollaire du théorème combinatoire suivant

**Théorème 3.5 (Schur).** *Soit  $r \geq 1$ . Alors il existe un entier  $S(r)$  tel que si  $N \geq S(r)$  et si les entiers  $[1, N]$  sont colorés avec  $r$  couleurs, il existe alors trois entiers  $x, y, z$  dans  $[1, N]$  de la même couleur tels que  $z = x + y$ .*

*Démonstration.* — Soit  $c : [1, N] \rightarrow [1, r]$  un coloriage à  $r$  couleurs des  $N$  premiers entiers. On lui associe le coloriage  $\hat{c}$  des arêtes du graphe complet  $K_N$  avec  $\hat{c}(i, j) = c(|i - j|)$  pour  $i, j \in [1, N]$ . D'après le théorème de Ramsey pluri-chromatique, si  $N \geq R(3, \dots, 3; r)$ , il existe un triangle unicolore  $T = \{i, j, k\}$  de couleur  $c_0$  dans  $K_N$  : si  $i < j < k$  et on a posé  $x = j - i, y = k - j, z = k - i$  tous entiers de  $[1, N]$ , on a  $x + y = z$  et  $c_0 = c(x) = c(y) = c(z)$ , *i. e.*  $x, y, z$  également colorés. On a donc prouvé le théorème avec  $S(r) = R(3, \dots, 3; r)$ .  $\square$

*Preuve du théorème de Schur.* — Soit  $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ . Le groupe  $\mathbb{Z}_p^*$  est cyclique : si  $g$  en est un générateur, tout élément de  $\mathbb{Z}_p^*$  est de la forme  $g^{nk+i}$  avec  $0 \leq i < n$ . Considérons le  $n$ -coloriage de  $[1, p - 1]$  induit par la partition constituée des parties

$$(1) \quad B_i = \{x \in [1, p - 1], x \equiv g^i g^{nk} \pmod{p}, nk + i \in [1, p - 1]\}$$

pour  $i = 0, \dots, n - 1$ . L'intersection  $B_i \cap B_j = \emptyset$  résulte de l'unicité de la décomposition  $m = nk + i$  dans  $[1, p - 1]$ .

Si  $p - 1 \geq S(n)$ , il existe un triplet unicolore d'entiers  $X, Y, Z$  dans  $[1, p - 1]$  vérifiant  $Z = X + Y$ , soit pour les entiers  $i, k_X, k_Y, k_Z$  tels que  $X \equiv g^i g^{k_X n}, Y \equiv g^i g^{k_Y n}, Z \equiv g^i g^{k_Z n}$

$$g^i (g^{k_X})^n + g^i (g^{k_Y})^n \equiv g^i (g^{k_Z})^n \pmod{p}$$

et par suite,

$$(g^{k_X})^n + (g^{k_Y})^n \equiv (g^{k_Z})^n \pmod{p},$$

ce qui donne la solution  $g^{k_X}, g^{k_Y}, g^{k_Z}$  à la congruence de Fermat  $x^n + y^n \equiv z^n \pmod{p}$ .  $\square$

**Théorème 3.6.** *Avec les notations du théorème 3.4, on peut prendre  $S(n) \leq 16n^2$ .*

Ce théorème résulte d'une preuve basée sur l'étude de sommes de racines de l'unité, *i. e.* avec de l'analyse de Fourier sur le groupe (additif)  $\mathbb{Z}_p$ . Soit la somme  $S_k$  définie par

$$S_k = \sum_{x \in \mathbb{Z}_p} e^{2\pi i \frac{kx^n}{p}}.$$

et ne dépendant que de la classe de  $k$  dans  $\mathbb{Z}_p$ . Faisons les remarques suivantes

- Si  $a \in \mathbb{Z}_p^*$ , alors  $S_k = S_{ka^n}$  puisque le changement de variable  $x \rightarrow xa^n$  dans  $\mathbb{Z}_p^*$  transforme  $S_k$  en  $S_{ka^n}$ .
- On a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_p} e^{2\pi i \frac{km}{p}} = \sum_{k=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{km}{p}} = \begin{cases} p & \text{si } m \text{ est divisible par } p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_p} |S_k|^2 = \sum_{x, y, k \in \mathbb{Z}_p} e^{2\pi i \frac{k(x^n - y^n)}{p}} = pN$$

où  $N$  est le cardinal de  $\{(x, y) \in \mathbb{Z}_p^2, x^n = y^n\}$ , *i. e.* le nombre de solutions de l'équation  $x^n = y^n$  dans  $\mathbb{Z}_p^2$ .

- $N \leq 1 + n(p-1)$ , vu que si  $x \in \mathbb{Z}_p^*$ , alors les  $y$  vérifiant  $x^n = y^n$  sont de la forme  $y = ux$  avec  $u^n = 1$ .
- Si  $G_n = \{a^n, a \in \mathbb{Z}_p^*\}$ , alors  $\#G_n \geq (p-1)/n$  d'après la partition (1).

**Lemme 3.1.** Si  $k \in \mathbb{Z}_p^*$ , alors  $|S_k| \leq \sqrt{2pn}$ .

*Démonstration.* — Vu les observations précédentes ,

$$\#G_n |S_k|^2 = \sum_{a^n \in G_n} |S_{ka^n}|^2 \leq \sum_{\ell \in \mathbb{Z}_p^*} |S_\ell|^2 \leq pN - p \leq p(1 + n(p-1)) - p \leq np^2.$$

Ainsi

$$|S_k|^2 \leq \frac{n^2 p^2}{p-1} \leq 2n^2 p. \quad \square$$

*Fin de la preuve du théorème de Schur.* — Soit  $M$  le nombre de triplets ordonnés  $x, y, z$  dans  $\mathbb{Z}_p$  vérifiant  $x^n + y^n = z^n$ . En utilisant (3.2), on a

$$M = \sum_{x, y, z \in \mathbb{Z}_p} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{k(x^n + y^n - z^n)}{p}} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} S_k^2 \overline{S_k}$$

Le terme dominant dans le dernier membre de l'égalité précédente est  $S_0$ , vu que

$$M \geq p^2 - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-1} |S_k|^3 \geq p^2 - (2n^2 p)^{3/2} \geq \frac{1}{2} p^2$$

si l'entier premier  $p$  est assez large, par exemple  $p \geq 16n^2$ . Par ailleurs, le nombre de solutions  $x, y, z$  avec  $x$  ou  $y$  nuls est au plus  $1 + 3np < \frac{1}{2} p^2$ . En découle l'existence d'au moins une solution  $x, y, z \in \mathbb{Z}_p$  avec  $xyz \neq 0$ .  $\square$

$\triangle$  **Remarque 3.3.** La preuve via Fourier donne la minoration  $p \geq 16n^2$ , alors que la preuve via le théorème de Ramsey donne  $p \geq S(n) = R(n, \dots, n; 3)$  avec  $R(n, \dots, n; 3) \leq 3n!$ .

### 3.3. Les théorèmes de Van der Waerden (1927) et Szemerédi (1975)

Une progression arithmétique [PA] de longueur  $k$  est une suite de nombres  $(a, a + d, \dots, a + (k - 1)d)$ , que l'on notera  $a + [0, k - 1]d$ .

**Théorème 3.7 (Van der Waerden).** *Si l'ensemble des entiers  $\mathbb{N}$  est colorié avec  $r$  couleurs, alors, pour tout entier  $k$ , il existe une PA unicolore de longueur  $k$ .*

Nous montrerons ici sa version finitaire :

**Théorème 3.8.** *Soit des entiers  $r$  et  $k$ . Alors il existe un entier  $W(r, k)$  tel que si  $N \geq W(r, k)$  et  $[1, N]$  a un coloriage à  $r$  couleurs, alors il existe une PA unicolore [PAM] de longueur  $k$ .*

$\triangle$  **Remarque 3.4.** Le coloriage **1 2 3 4 5 6 7 8** ne contient aucune PA de longueur 3, ainsi  $W(2, 3) > 8$  : on montre que  $W(2, 3) = 9$ , bien petit en comparaison de la majoration  $W(2, 3) < 325$  donnée par la preuve ci-dessous. Il est conjecturé que  $W(2, k) < 2^{k^2}$ , la meilleure borne connue étant due à T. Gowers  $W(2, k) < 2^{2^{2^{2^{k+9}}}}$ .  $\nabla$

Une partie  $B$  de  $K$  entiers consécutifs est appelé un *bloc de taille  $K$* . Le translaté du bloc  $B$  par  $d$  est le bloc  $B + d = \{x + d, x \in B\}$ . Tout  $r$ -coloriage  $c : [1, N] \rightarrow [1, r]$  induit un  $r$ -coloriage sur toute partie  $A$  contenue dans  $[1, N]$ , qui sera noté  $c(A)$ . Il y a  $r^K$  coloriages à  $r$  couleurs d'une partie à  $K$  éléments.

Commençons par montrer le théorème pour  $r = 2, k = 3$ .

*Démonstration.* — Supposons donné un coloriage  $c$  de  $[1, 325]$ . Divisons  $[1, 325]$  en 65 blocs  $B_1, B_2, \dots, B_{65}$  de longueur 5. Chaque bloc a  $2^5 = 32$  2-coloriages possibles, il y a donc deux blocs, soit  $B_i, B_{i+d}$  avec  $1 \leq i < i+d \leq 33$  même coloriage (*i. e.*  $x$  et  $x+d$  ont même couleur pour tout  $x \in B_i$ ). Parmi les 3 premiers entiers de  $B_i$ , deux, soit  $a, a + e$  sont de même couleur, disons rouge. Ainsi la partie  $\{a, a + e, a + d, a + e + d\}$  est unicolore rouge. Vu que  $\{a, a + e, a + 2e\} \subset B_i$  et  $\{a + d, a + e + d, a + 2e + d\} \subset B_{i+d}$ , les entiers  $a + 2e$  et  $a + 2e + d$  sont de même couleur : soit ils sont rouges, et alors on a trouvé la PA  $a, a + e, a + 2e$  unicolore de longueur 3, soit ils sont de l'autre couleur, disons bleu. L'entier  $a + 2e + 2d$  est dans  $B_{i+d} + d = B_{i+2d}$  avec  $i + 2d \leq 65$  vu que  $i + d \leq 33$  et  $d \leq 32$ . Si  $a + 2e + 2d$  est bleu, alors la PA  $a + 2e, a + 2e + d, a + 2e + 2d$  est bleue, sinon la PA  $a, a + e + d, a + 2e + 2d$  est rouge. On a bien montré l'existence d'une PAM pour tout 2-coloriage de  $[1, 325]$ . C'est donc aussi le cas pour tout 2-coloriage de  $[1, N]$  avec  $N \geq 325$ . Il a donc été démontré que  $W(2, 3) \geq 325$ .  $\square$

Pour le cas général, qui résultera d'une double récurrence, introduisons la notion de  $n$ -uplet de PA avec point base commun  $a$  : c'est une partie  $A$  de la forme  $A = (a + [0, k - 1]d_1) \cup \dots \cup (a + [0, k - 1]d_n)$ . Ce  $n$ -uplet sera dit polychromatique si chaque PA  $a + [1, k - 1]d_i, 1 \leq i \leq n$  est unicolore, avec des couleurs différentes deux à deux. Si les translatés  $A + d, \dots, A + (k - 1)d$  d'une telle partie sont identiquement colorés, alors la partie  $A \subset (A + d) \cup \dots \cup (A + (k - 1)d)$  contient une  $(n + 1)$ -uplet de PA, ou est une PAM. En effet, la couleur du point base  $a$  est la même que celle d'une PA, soit  $a + [1, k - 1](d + d_i)$ , et par suite  $a + [0, k - 1](d + d_i)$  est une PAM de longueur  $k$ . Sinon,  $A$  contient le  $(n + 1)$ -uplet de PA  $a + [0, k - 1]d, a + [0, k - 1](d + d_1), \dots, a + [0, k - 1](d + d_n)$ , qui est polychromatique.

**Lemme 3.2.** *Soient  $r, k$  entiers et supposons  $W(r, k-1)$  défini. Alors pour tout entier  $n$ , il existe un entier  $W(r, n, k-1)$  tel que si  $N \geq W(r, n, k-1)$  et si  $[1, N]$  est  $r$ -colorié, alors il existe un  $n$ -uplet polychromatique de PA de longueur  $k-1$  ou une PAM de longueur  $k$ .*

*Preuve du Lemme.* — Le cas  $n = 1$  est clair. Supposons l’assertion du Lemme vraie pour  $n-1$  et posons  $N_1 = W(r, n-1, k-1)$ . Ainsi, tout bloc de longueur  $N_1$  contient une PAM de longueur  $k$ , et nous en avons fini ou un  $(n-1)$ -uplet polychromatique de longueur  $k-1$ . Dans ce dernier cas, posons  $N_2 = 2W(r^{N_1}, k-1)$  et considérons  $N_2$  blocs consécutifs de longueur  $N_1$ . Vu qu’il y a  $r^{N_1}$  coloriages de chaque bloc, il existe une PA de longueur  $k-1$  — de blocs également coloriés  $B+d, \dots, B+(k-1)d$ . Vu que  $\#B = W(r, n-1, k-1)$ , il existe un  $(n-1)$ -uplet de PA, soit  $A \subset B$  polychromatique. Alors la partie  $A \cup \dots \cup A + (k-1)d$  contient une  $n$ -uplet polychromatique de longueur  $k-1$ , ou une PAM de longueur  $k$  comme remarqué précédemment. Cela achève la récurrence.  $\square$

*Fin de la preuve du théorème de Van der Waerden.* — On a clairement  $W(r, 2) = r + 1$  pour tout  $r$ . Supposons l’existence de  $W(r, k-1)$  pour chaque  $r$ . Alors le lemme précédent assure l’existence de  $W(r, n, k-1)$  pour chaque  $n$ . Pour  $n = r$ , il existe pour tout  $r$ -coloriage de  $[1, W(r, e, k-1)]$  un  $r$ -uplet de PA polychromatique. La couleur du point base doit coïncider avec celle d’une des  $k-1$  PA puisqu’il y a  $r$  couleurs. Alors, de même que précédemment, il contient une PAM de longueur  $k$ . On peut donc prendre  $W(r, k) = W(r, r, k-1)$ , achevant ainsi la récurrence.  $\square$

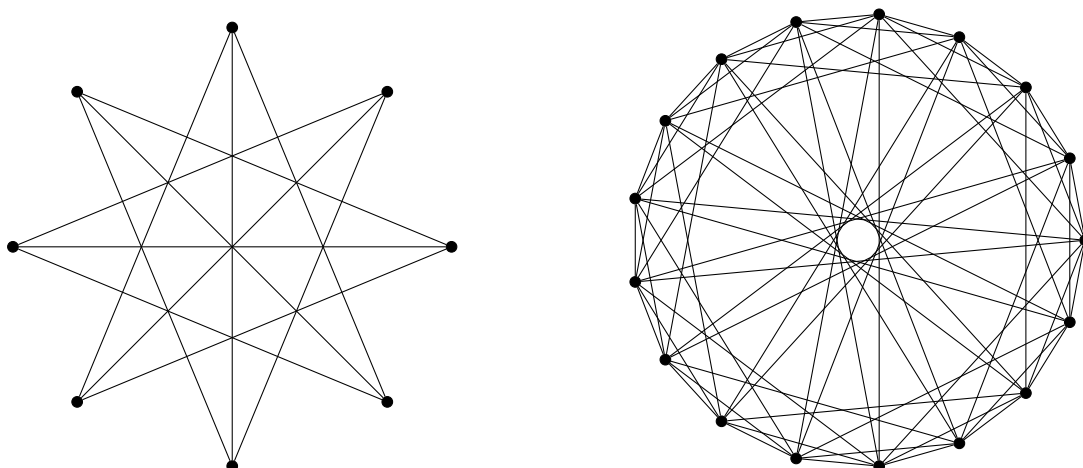
Le théorème de Van der Waerden est un corollaire du théorème de Szemerédi :

**Théorème 3.9 (Szemerédi).** *Soit  $\delta > 0$  et  $k \geq 3$ . Il existe  $S(k, \delta)$  tel que toute partie  $A$  de  $[1, N]$  contienne une PA de longueur  $k$  dès que  $N \geq S(k, \delta)$  et  $\#A \geq \delta N$ .*

Il suffit en effet de poser  $\delta = 1/r$  : tout coloriage à  $r$  couleurs contient une partie colorée d’au moins  $\delta N$  éléments.

### 3.4. Exercices

1. Soit  $G$  un graphe. Montrer que  $G$  ou son complémentaire  $\overline{G}$  est connexe. En déduire que tout bicoloriage de  $K_n$  admet un arbre maximal unicolore à  $n$  sommets.
2. (1) En considérant le premier graphe de la Fig. 18, montrer que  $R(3, 4) > 8$ , puis que  $R(3, 4) = 9$ .  
(2) Le second graphe de la Fig. 18 est le graphe l’ensemble de sommets  $\mathbb{Z}_{17}$  avec une arête entre  $i$  et  $j$  si et seulement si  $i - j$  égale  $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ . Montrer que  $R(4, 4) > 17$ , puis que  $R(4, 4) = 18$ .
3. Soit  $G$  un graphe. Montrer l’existence d’un entier  $N(G)$  tel que tout graphe complet bicolorié  $K_n$  avec  $n \geq N(G)$  contienne une copie de  $G$  unicolore.

FIGURE 18 . Deux graphes utiles pour le calcul de  $R(3,4)$  et  $R(4,4)$ .

4. (1) Soit  $L = 2^{2\ell-1} - 1$  et  $K_L$  le graphe à  $L$  sommets avec un bicoloriage de ses arêtes.
- (1.α) : On construit une suite  $(s_i \in S_i), i = 1, \dots, 2\ell - 1$  telle que  $S_1 = S(K_L)$  et  $S_{i+1}$  est l'ensemble des sommets autres que  $s_i$  donnés par la partie unicolore d'arêtes issues de  $s_i$  de cardinal maximal. Montrer que cette construction est bien possible et que  $\#S_i \geq 2^{2\ell-i} - 1$  pour  $i = 1, \dots, 2\ell - 1$ .
- (1.β) : Colorions  $s_i$  de la couleur de l'arête le joignant à  $S_{i+1}$  : de la partition en deux parties unicolores de l'ensemble des sommets  $\{s_1, \dots, s_{2\ell-1}\}$  résultant de ce coloriage, montrer que celle de cardinal maximal fournit un graphe complet unicolore de cardinal  $\ell$ . En déduire que le nombre de Ramsey  $R(\ell, \ell)$  est majoré par  $2^{2\ell-1} - 1$ .
- (2) Montrer que  $R(\ell, \dots, \ell; r) \leq 2^{(\ell-1)r-1}$ .
5. Soient des entiers  $m \geq 1$  et  $n \geq 2$ . Montrer qu'il existe  $L \geq 1$  tel que pour tout ensemble fini  $E$  de cardinal au moins  $L$  et toute application  $f : E \times E \rightarrow [1, m]$ , il existe  $m_0 \in [1, m]$  et des éléments distincts  $x_1, \dots, x_n$  de  $E$  tels que  $f(x_i, x_j) = m_0$  pour  $1 \leq i < j \leq n$ .
6. Soit  $S_N = (a_i)_{i=1, \dots, N}$  une suite de réels distincts. En considérant le bi-coloriage où l'arête  $(a_i, a_j)$  est rouge si et seulement si  $(a_i - a_j)/(i - j) > 0$ , verte sinon, montrer que  $S_N$  contient une sous-suite monotone de longueur  $n$  dès que  $N \geq R(n)$ . [Erdős et Szekeres ont montré que c'était le cas dès que  $N \geq (n - 1)^2 + 1$ ].
7. Soit  $\sigma$  une permutation des entiers  $[1, r]$ . Montrer que  $R(n_{\sigma(1)}, \dots, n_{\sigma(r)}; r) = R(n_1, \dots, n_r; r)$ .
8. Montrer la majoration

$$R(3, \dots, 3; r) \leq 3r!$$

pour la meilleure constante de Ramsey  $R(3, \dots, 3; r)$ .

Préciser cette majoration en  $R(3, \dots, 3; r) \leq er! + 1$  en remarquant

$$R(3, \dots, 3; r+1) - 1 \leq (r+1)(R(3, \dots, 3; r) - 1) + 1.$$

9. Soit  $G$  un graphe à  $s$  sommets et  $a$  arêtes. Si  $G$  n'a pas de triagle,  $a \leq s^2/4$ .
10. Soit  $G$  un graphe avec  $s$  sommets et  $a$  arêtes. Montrer que le nombre des triangles de  $G$  est minoré par  $\frac{4a}{3s} \left( a - \frac{s^2}{4} \right)$ .
11. Montrer que tout bicoloriage des arêtes de  $K_n$  avec  $n \geq 6$  admet au moins  $\frac{1}{20} \binom{n}{3}$  triangles unicolores.
12. Montrer que pour tout bicoloriage de  $\mathbb{N}$ , il existe une infinité de triplets  $x, y, x+y$  unicolores (*indication* : le théorème de Schur assure de l'existence d'un tel triplet : le recolorier de manière strictement bicolore, et rechercher un autre triplet de Schur, etc)
13. Montrer que pour tout bicoloriage de  $\mathbb{N}$  est possible de trouver un triplet  $(x, y, x+y)$  monocoloré avec  $x$  et  $y$  distincts (*indication* : raffiner le coloriage de telle manière que  $x$  et  $2x$  soient toujours de couleurs distinctes).
14. Montrer que pour tout bicoloriage de  $\mathbb{N}^*$  contient une infinité de triplets  $(x, y, xy)$  monocolorés (non triviaux :  $x, y > 1$ ).

# CHAPITRE 4

## SPECTRES DE GRAPHES

Un graphe, avec ses propriétés géométriques, peut se lire à travers des structures linéaires : matrice d'adjacence, matrice d'incidence, opérateur bord, opérateur laplacien. Ces applications linéaires, à coefficients booléens ou réels (modélisant le *coût* de liaisons par ex.) opèrent sur des espaces vectoriels  $\mathbb{C}^{S_G}$ ,  $\mathbb{C}^{A_G}$  munis eux-mêmes de produits hermitiens à poids

$$(2) \quad \|(u_s)\|^2 = \sum_{s \in S_G} p_s |u_s|^2, \quad \|(v_a)\|^2 = \sum_{a \in A_G} p_a |v_a|^2$$

Ainsi les classes de matrices associées à des graphes sont très nombreuses. En retour, comme l'analyse spectrale à la Perron-Frobenius le montre, des graphes sont introduits pour étudier les propriétés spectrales de certaines matrices.

Nous nous limitons à traiter ici la matrice d'adjacence de graphes (orientés ou non) et les laplaciens avec potentiels (associés à des graphes non orientés). Nous ne faisons qu'effleurer le problème inverse : quelles propriétés géométriques et combinatoires du graphe  $G$  sont lisibles dans la matrice d'adjacence  $M_G$  ou le laplacien  $\Delta_G$  ? Le graphe est-il caractérisé spectralement par son spectre (de la matrice d'adjacence, de son laplacien, ...) ? Quels exemples de graphes isospectraux non isomorphes ?

### 4.1. Matrice d'adjacence

**Définition 4.1.** Soit  $G$  un graphe. La matrice d'adjacence  $M_G$  du graphe  $G$  est la matrice carrée d'ordre  $\#S_G$  avec  $(M_G)_{st}$  le nombre d'arêtes entre le sommet  $s$  et le sommet  $t$  : la matrice  $M_G$  est symétrique.

La matrice d'adjacence  $M_G$  du digraphe  $G$  est définie pareillement :  $(M_G)_{st}$  compte les arêtes (orientées) d'origine  $s$  et d'extrémité finale  $t$  ; la matrice  $M_G$  n'est pas nécessairement symétrique.

Si les sommets de  $G$  sont énumérés suivant une bijection  $e : S_G \rightarrow \{1, \dots, \#S_G\}$  la matrice  $M_G$ , définie comme tableau de nombres indexé par  $S_G \times S_G$ , est en correspondance

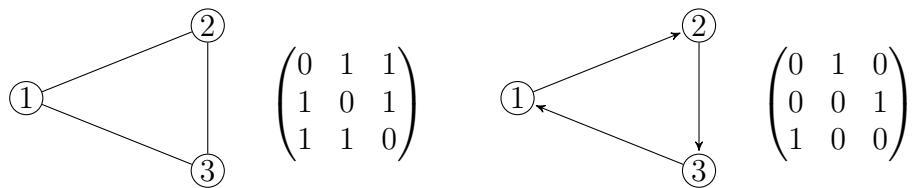


FIGURE 19 . Les matrices d'un graphe (non orienté) et d'un digraphe.

biunivoque avec une matrice  $M_G(e)$  (classique!), dont les coefficients sont indexés par des entiers :  $(M_G(e))_{e(s),e(t)} = (M_G)_{st}$ ,  $s, t \in S_G$ . Le lemme suivant indique la relation entre les matrices déterminées par deux énumérations d'un même graphe.

**Lemme 4.1.** *Soit  $G$  un graphe et  $i, j : S_G \rightarrow \{1, \dots, \#S_G\}$  deux énumérations de ses sommets. Les matrices d'adjacence  $M_G(i)$  et  $M_G(j)$  correspondantes sont conjuguées l'une de l'autre :  $M_G(i) = P_\sigma^{-1} M_G(j) P_\sigma$ , avec  $P_\sigma$  la matrice de permutation associée à la permutation  $\sigma = j \circ i^{-1}$  de  $\{1, \dots, \#S_G\}$ .*

*Démonstration.* — La matrice de permutation  $P = P_\sigma$  est caractérisée par  $P_{k\ell} = 1$  si  $k = \sigma(\ell)$ , 0 sinon : ainsi, vu que  $\sigma \circ i = j$ ,  $P_{j(s)i(t)} = 1$  si  $s = t$ , 0 sinon. S'en déduit

$$M_G(i)_{i(s)i(t)} = P_{i(s)j(s)}^{-1} M_G(j)_{j(s)j(t)} P_{j(t)i(t)},$$

soit  $M_G(i) = P^{-1} M_G(j) P$ . □

Ce Lemme justifie la définition suivante

**Définition 4.2.** Le spectre du graphe (resp. digraphe)  $G$  est le spectre de sa matrice d'adjacence, où ont été répétées les valeurs propre suivant leur multiplicité dans le polynôme caractéristique. Deux graphes sont dits *isospectraux* s'ils ont mêmes spectres.

Ainsi le spectre du graphe  $G$  est un ensemble de  $n$  complexes. La matrice d'adjacence d'un graphe (non orienté) est symétrique : elle est donc diagonalisable dans une base orthonormée de  $\mathbb{R}^{S_G}$  avec le produit scalaire standard (tous les poids  $p_s$  dans (2) égaux à 1) et le spectre est un ensemble de  $n$  nombres réels.

▷ **Exemples 4.1.**

1. Les matrices des graphes de la Fig. 19 ont respectivement pour polynôme caractéristique

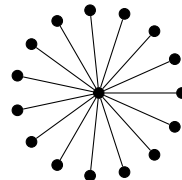
$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2, \quad \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1),$$

et spectres

$$\{2, -1_2\}, \quad \{1, -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{3}/2\}.$$

2. L'étoile  $E_n$  à  $n$  branches (et  $n + 1$  sommets) a pour matrice d'adjacence

$$M_{E_n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

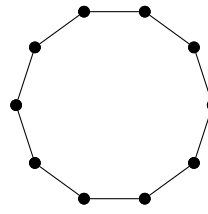


avec  $\{\sqrt{n}, 0_{n-1}, -\sqrt{n}\}$  comme spectre. Son noyau a pour équation  $x_0 = 0, x_1 + \dots + x_n = 0$  et la valeur propre  $\pm\sqrt{n}$  a pour vecteur propre  $(\pm\sqrt{n}, 1, \dots, 1)$ <sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup>Une fois le noyau déterminé, on cherche les vecteurs propres associés à une valeur propre non nulle dans l'orthogonal du noyau, soit parmi les vecteurs de la forme  $(\alpha, \beta, \dots, \beta)$ .



3. Le lacet  $L_n$  a pour matrice la matrice

$$M_{L_n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$


Posons  $\omega_n = e^{2i\pi/n}$  et  $\lambda_t = 2 \cos(2\pi t)$ . Le lacet  $C_n$  a pour spectre  $\{\lambda_{k/n}, k = 1, \dots, n\}$  avec comme vecteurs propres associés  $(v_k = (\omega_n^{kj}/\sqrt{n})_{j=1}^n)_{k=1}^n$ <sup>(2)</sup>. Cette famille est une base orthonormée de  $\mathbb{C}^n$  avec le produit scalaire (hermitien)  $\langle z, z' \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \overline{z'_j}$ .

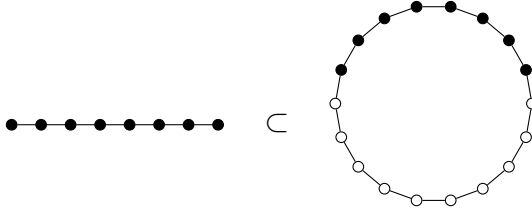
Cet exemple donne une version de la transformée de Fourier discrète<sup>(3)</sup>

$$\mathcal{F}_n : w = (w_j) \in \mathbb{C}^n \rightarrow \left( \langle w, v_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \omega_n^{-kj} w_j \right) \in \mathbb{C}^n$$

avec transformée inverse

$$\mathcal{F}_n^{-1} : \xi = (\xi_k)_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n \rightarrow \left( \langle \xi, \overline{v_j} \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \omega_n^{kj} \xi_k \right) \in \mathbb{C}^n.$$

4. Le chemin  $C_n$  a pour matrice la matrice bidiagonale

$$M_{C_n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$


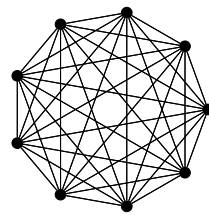
Le chemin  $C_n = x_1 x_2 \dots x_n$  est un sous-graphe du lacet  $L_{2(n+1)}$  : si celui-ci est représenté comme  $x_0 x_1 x_2 \dots x_n \tilde{x}_0 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \dots \tilde{x}_n$ , la symétrie  $S$  laissant fixe  $x_0$  et  $\tilde{x}_0$  et transformant  $x_i$  en  $\tilde{x}_i$  pour  $i = 1, \dots, n$  induit sur  $\mathbb{C}^{X_{L_{2(n+1)}}}$  un opérateur commutant à  $M_{L_{2(n+1)}}$ , un vecteur  $v$  de  $\mathbb{C}^{X_{C_n}}$  s'identifiant à une fonction  $V_v$   $S$ -antisymétrique sur  $L_{2(n+1)}$  : cette fonction  $V$  est nulle en  $x_0$  et  $\tilde{x}_0$ ,  $M_{C_n} v$  s'identifiant à la fonction  $M_{L_{2(n+1)}} V_v$ . Ainsi, si  $\theta_n = 1/(n+1)$ , le spectre de  $M_{C_n}$  est  $\{2 \cos(\pi k \theta_n), k = 1, \dots, n\}$  avec vecteurs propres respectifs  $(v_k = (\sin(\pi k j \theta_n) / \sqrt{2(n+1)})_{j=1}^n)_{k=1}^n$ .

<sup>(2)</sup>  $\lambda_{k/n} = \lambda_{(n-k)/n}$ , aussi, pour  $k = 1, \dots, n/2 - 1$  ou  $(n-1)/2$  suivant que  $n$  est pair ou impair, le sous-espace engendré par  $v_k$  et  $v_{n-k}$  est l'espace propre associé à la valeur propre  $\lambda_k$  de dimension 2. Alors  $v_k + v_{n-k} = (2(\cos(2\pi k j/n)) / \sqrt{n})_{j=1}^n$  et  $i(v_k - v_{n-k}) = (-2(\sin(2\pi k j/n)) / \sqrt{n})_{j=1}^n$  en constituent une base de vecteurs réels. Le vecteur  $v_n$  est réel, avec valeur propre  $\lambda_1 = 2$  et si  $n$  est pair, le vecteur propre  $v_{n/2}$  est réel :  $v_{n/2} = ((-1)^j)_{j=1}^n$ . Le spectre du lacet  $C_n$  est donc  $\{2, \lambda_{1/n}, \lambda_{2/n}, \dots, \lambda_{(n/2-1)/n}, -2\}$  si  $n$  est pair,  $\{2, \lambda_{1/n}, \lambda_{2/n}, \dots, \lambda_{(n-1)/(2n)}\}$  sinon, les valeurs propres étant de multiplicité 2 sauf 2 et -2.

<sup>(3)</sup> On comparera avec la transformée de Fourier qui a associé à  $f$  la fonction  $\hat{f}$  définie par  $\hat{f}(\xi) = \langle f, e^{i2\pi x \xi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x \xi} dx$ , avec la formule d'inversion  $f(x) = \langle \hat{f}, e^{-2i\pi x \xi} \rangle$ .

5. Le graphe complet  $K_n$  a pour matrice la matrice

$$M_{K_n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



avec spectre  $\{n-1, (-1)_{n-1}\}$  : la valeur propre  $n-1$  a pour vecteur propre  $(1, \dots, 1)$  et l'espace propre associé à la valeur propre  $-1$  a pour équation  $x_1 + \dots + x_n = 0$ .

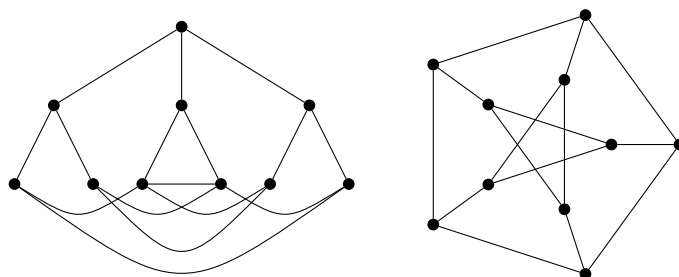


FIGURE 20 . Deux représentations du graphe de Petersen.

6. Le graphe de Petersen a pour spectre  $\{3, 1_5, (-2)_4\}$ .

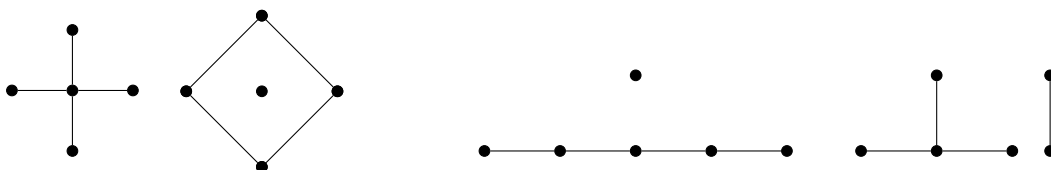


FIGURE 21 . Deux paires de graphes isospectraux avec le nombre minimal de sommets : la première parmi les graphes non connexes, la seconde parmi les forêts.

7. Dans la Fig. 21, les deux premiers graphes ne sont pas isomorphes (l'un est connexe, l'autre pas), avec même spectre  $\{-2, 0_3, 2\}$  : en faisant la listes de graphes avec leur spectre, on constate qu'il n'y a pas de paire de graphes non isomorphes isospectraux parmi les graphes à au plus 4 sommets. Les deux forêts sont isospectrales (les plus petits forêts isospectrales avec un des graphes ayant un seul sommet de valence au moins 3), de spectre  $\{0_2, \pm 1, \pm\sqrt{3}\}$ .

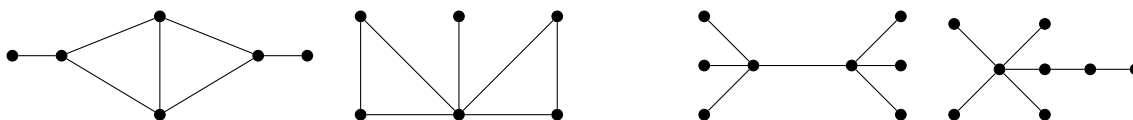


FIGURE 22 . Deux paires de graphes connexes isospectraux non isomorphes.

8. Dans la Fig. 22, les deux premiers graphes ont pour suite de valence  $(1_2, 3_4)$  et  $(1, 2_4, 5)$  : ils sont donc non isomorphes. Ils sont cependant isospectraux, avec polynôme caractéristique

$$(\lambda + 1)^2(\lambda - 1)(\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda + 1).$$

Les deux derniers graphes, de suites de valences  $(1_6, 4_2)$  et  $(1_5, 2_2, 5_1)$ , sont des arbres non isomorphes et avec même polynôme caractéristique  $\lambda^4(\lambda^4 - 7\lambda^2 + 9)$ . On vérifie qu'un graphe connexe (resp. un arbre) d'au plus 5 (resp. 7) sommets est caractérisé par son spectre<sup>(4)</sup>.

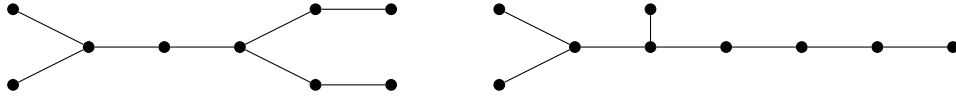


FIGURE 23 . Deux arbres isospectraux avec même suites de valences et non isomorphes.

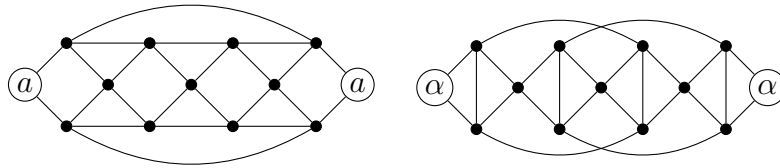


FIGURE 24 . Une paire de graphes 4-homogènes isospectraux (où les sommets  $a$ , resp.  $\alpha$ , sont à identifier) non isomorphes, l'un planaire, l'autre pas.

9. Dans la Fig. 23, la paire isospectrale contient des graphes non isomorphes isovalents. La Fig. 24, les deux graphes sont réguliers de degré 4 (ils ont donc même suite de valence  $(4_{12})$ ) et sont isospectraux, de spectre  $\{-2_5, 0_3, 2_3, 4\}$  : l'un étant planaire, l'autre pas, ils sont non isomorphes.
10. Dans la Fig. 7, les paires de graphes isovalents ne sont pas isospectraux, avec polynôme caractéristiques respectifs

$$\lambda(\lambda^4 - 5\lambda^2 + 2), \quad (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^3 - 4\lambda - 2).$$

et

$$(\lambda + 1)^3(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 7), \quad (\lambda + 1)^3(\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 4).$$

Leur nombre de triangles ne coïncidant pas, ces graphes ne peuvent être isospectraux d'après la Prop. 4.1.

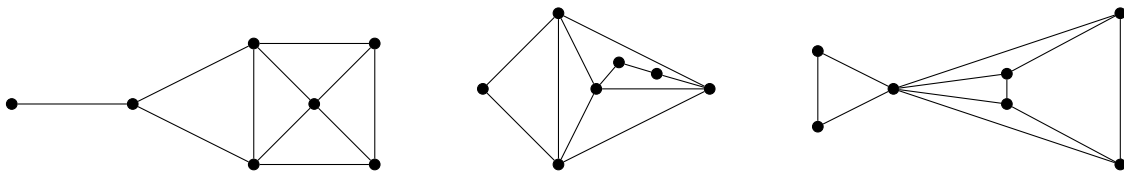


FIGURE 25 . Une triade isospectrale de polynôme caractéristique  $(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 8)\lambda^2$ .

11. La Fig. 25 exhibe la plus petite triade isospectrale. Pour tout  $n$ , il existe  $n$  graphes isospectraux et non isomorphes deux à deux.  $\triangleleft$

Les invariants de conjugaison des matrices peuvent-ils restituer des informations géométriques sur le graphe ?

<sup>(4)</sup>Pour d'autres exemples, voir l'exercice 1.6.1.6. On montre que les arbres avec au plus un seul sommet de valence au moins 3 sont spectralement déterminés.

**Proposition 4.1.** Soit  $P_G$  le polynôme caractéristique de la matrice d'adjacence  $M_G$ . Si  $P_G(\lambda) = \det(\lambda - M_G) = \lambda^{n_0} - p_1\lambda^{n_0-1} - p_2\lambda^{n_0-2} - p_3\lambda^{n_0-3} - \dots - p_{n_0}$ , alors

$$\deg P_G = \#S_G, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = \#A_G, \quad p_3 = 2\#T_G,$$

où  $\#T_G$  est le nombre des triangles dans  $G$ .

*Démonstration.* — Les éléments diagonaux de  $M_G$  étant nuls, la trace de  $M_G$ , soit  $p_1$  l'est aussi. Mis à part les mineurs à coefficients tous nuls, un mineur d'ordre 2 contribuant à  $p_2$  est de la forme  $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ , chacun correspondant à une paire de sommets voisins (ou, de manière équivalente, une arête). La somme de ces 1 donne  $p_2$  qui est ainsi le nombre des arêtes de  $G$ . Pour les mineurs d'ordre 3 avec des coefficients non tous nuls, on a trois possibilités

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

les deux premiers mineurs étant nuls et le troisième, valant  $-2$  et correspondant à trois sommets adjacents deux à deux : on obtient donc  $p_3$  comme le double du nombre de ces triangles.  $\square$

## 4.2. Matrices positives

On note par  $\|\cdot\|_\infty$  la norme  $\infty$  sur  $\mathbb{C}^n$  et la norme matricielle associée sur l'espace des matrices  $M$  d'ordre  $n$

$$\|\mathbf{z}\|_\infty = \sup_{\ell=1,\dots,n} |z_\ell|, \quad \|M\|_\infty = \sup_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|M\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{z}\|} = \sup_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1,\dots,n} |M_{ij}|.$$

Rappelons que le rayon spectral  $\rho_M$  de la matrice  $M$  est le module maximum de ses valeurs propres : il est égal à la limite (indépendante du choix de norme matricielle) de  $\|M^n\|^{1/n}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

**Proposition 4.2.** Soit  $M$  matrice à coefficients positifs ou nuls. Si  $v$  est un vecteur propre de  $M$  à coefficients tous strictement positifs, alors la valeur propre associée  $\lambda_v$  est égale à  $\rho_M$ .

*Démonstration.* — Soit  $\text{diag } \mathbf{v}$  la matrice diagonale  $\text{diag}(v_1, \dots, v_n)$  si  $v = (v_1, \dots, v_n)$ . Alors le vecteur  $w = (1, \dots, 1)^t$  est vecteur propre de  $P = (\text{diag } \mathbf{v})^{-1}M \text{diag } \mathbf{v}$ , matrice à coefficients positifs qui vérifie  $\sum_j p_{ij} = \lambda_v$  pour  $i = 1, \dots, n$  et qui a même rayon spectral que  $M$ . Soit  $z \in \mathbb{C}^n$  un vecteur propre de  $P$  avec valeur propre  $\lambda$ . Vu  $Pz = \lambda z$ ,

$$(3) \quad |\lambda z_i| = |(Pz)_i| = \left| \sum_j p_{ij} z_j \right| \leq \sum_j p_{ij} \|z\|_\infty = \lambda_v \|z\|_\infty, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ainsi  $|\lambda| \leq \lambda_v$  et la conclusion :  $\lambda_v = \rho_P = \rho_M$ .  $\square$

$\triangle$  **Remarque 4.1.** Si  $z$  est non colinéaire à  $w$ , une des inégalités (3) pour un  $i$  est stricte, ainsi la valeur propre  $\lambda_v$  est simple, au sens où l'espace propre  $\ker(M - \lambda_v)$  est uni-dimensionnel. Il en est de même pour  $\ker(M - \lambda_v)^k$ . Si ce n'était pas le cas,  $M$  aurait un bloc de Jordan  $J(\lambda_v)$  non trivial, pour lequel  $(J(\lambda_v)/\lambda_v)^n$  est non borné lorsque  $n \rightarrow \infty$  : par conjugaison il en est de même pour  $(M/\lambda_v)^n$ . Par ailleurs, l'inégalité centrale

de (3) implique que  $\|Pz\|_\infty \leq \lambda_v \|z\|_\infty$ , soit  $\|P/\lambda_v\|_\infty \leq 1$  et donc  $\|(P/\lambda_v)^n\|_\infty \leq 1$ . Par suite,  $\|(M/\lambda_v)^n\|_\infty$  est uniformément borné : contradiction !  $\triangleleft$

▷ **Exemples 4.2.**

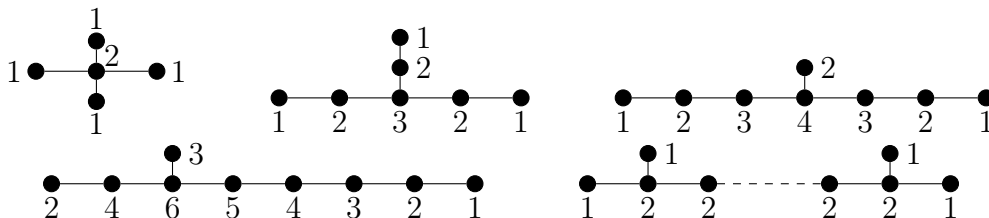


FIGURE 26 . Graphes avec indice égal à 2.

1. Les graphes de la Fig. 26 ont un vecteur propre positif avec valeur propre associée égale à 2 : leur indice est donc égal à 2. Ce sont les seuls graphes de ce type, en plus du lacet.
2. Pour un graphe  $G$   $d$ -homogène, le vecteur  $(1, \dots, 1)^t$  est strictement positif : vu la constance de la valence, c'est un vecteur propre de  $M$  pour la valeur propre  $d$ . Par suite,  $M$  a comme rayon spectral  $\rho_M = d$ .  $\triangleleft$

**Théorème 4.1 (Perron (1907) & Frobenius (1912)).** Soit  $M$  matrice à coefficients positifs.

(i) Le rayon spectral  $\rho_M$  est valeur propre de  $M$ .

(ii) Si  $M$  est à coefficients strictement positifs, la valeur propre  $\rho_M$  est simple et a un vecteur propre à coefficients strictement positifs. Cette valeur propre admet comme caractérisation variationnelle

$$(4) \quad \rho_M = \inf_{\mathbf{x} > 0} \|(\text{diag } \mathbf{x})^{-1} M \text{diag } \mathbf{x}\|_\infty$$

Toute autre valeur propre est de module strictement inférieur au rayon spectral  $\rho_M$ .

▷ **Exemples 4.3.**

1. Les matrices  $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  ont comme spectres respectifs  $\{2, -1\}$ ,  $\{2, -2\}$  et  $\{1_2\}$ .
2. Soit  $G$  un graphe bipartite :  $S_G = S_1 \cup S_2$ . Sa matrice d'adjacence est de la forme

$$M_G = \begin{pmatrix} 0 & M_{12} \\ M_{12}^t & 0 \end{pmatrix}$$

Si  $v = (v_1, v_2)$  est vecteur propre avec valeur propre  $\lambda$  (par exemple pour le vecteur positif vecteur propre pour la valeur propre  $\rho_M$ ), alors  $\tilde{v} = (v_1, -v_2)$  est vecteur propre pour la valeur propre  $-\lambda$ .  $\triangleleft$

*Démonstration.* — Les valeurs propres de  $M$ , racines du polynôme caractéristique  $P_M$ , sont des fonctions continues de  $M$  : la première partie du théorème résulte de la seconde.

Soit  $\Sigma = \{\mathbf{x} = (x_i), x_i > 0, \sum_i x_i = 1\}$  et la fonction  $\Phi_M$  définie sur  $\Sigma$  par

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = \|(\text{diag } \mathbf{x})^{-1} M \text{diag } \mathbf{x}\|_\infty$$

où  $\text{diag } \mathbf{x}$  est la matrice diagonale de coefficients diagonaux  $(x_1, \dots, x_n)$ . Le bord de  $\bar{\Sigma}$  correspond aux  $\mathbf{x}$  avec au moins une coordonnée nulle. Si  $x_{j_0} = \varepsilon$ , il y a au moins un

$j \neq j_0$  pour lequel à  $x_j \geq (1 - \varepsilon)/n$ . Ainsi  $\Phi_M(\mathbf{x}) \geq x_{j_0}^{-1} M_{j_0 j} x_j \geq (1 - \varepsilon) M_{j_0 j} (n\varepsilon)^{-1}$  :  $\Phi_M(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$  lorsque  $\mathbf{x} \rightarrow \partial\Sigma$  et le minimum de  $\Phi_M$  sur  $\Sigma$  est atteint en un  $\mathbf{v}$  de  $\Sigma$ .

Montrons que ce  $\mathbf{v}$  est un vecteur propre de  $M$  avec valeur propre  $\lambda = \inf_{\mathbf{x} \in \Sigma} \Phi_M(\mathbf{x})$ . Via le difféomorphisme

$$\varphi_v : \mathbf{x} = (x_i) \in \Sigma \rightarrow \mathbf{y} = \left( \frac{x_i}{v_i \sum_{\ell} (x_{\ell}/v_{\ell})} \right) \in \Sigma,$$

on a

$$\Phi_M(\mathbf{x}) = \|(\text{diag } \mathbf{y})^{-1} (\text{diag } \mathbf{v})^{-1} M \text{diag } \mathbf{v} \text{diag } \mathbf{y}\|_{\infty} = \Phi_P(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} = \varphi_v(\mathbf{x}),$$

avec  $P = (\text{diag } \mathbf{v})^{-1} M \text{diag } \mathbf{v}$  : on est ramené à montrer que  $\mathbf{w} = \varphi_v(\mathbf{v}) = (1/n, \dots, 1/n)$  est vecteur propre de  $P$  du fait de sa minimisation de  $\Phi_P$  :

$$(5) \quad \Phi_P(\mathbf{y}) = \sup_i \sum_j y_i^{-1} P_{ij} y_j \geq \Phi_P(\mathbf{w}), \quad \mathbf{y} \in \Sigma.$$

avec

$$\Phi_P(\mathbf{w}) = \|P\|_{\infty} = \sup_i \sum_j P_{ij}$$

Supposons  $K_P = \{k, \sum_j P_{kj} < \Phi_P(\mathbf{w})\}$  non vide. Pour  $\mathbf{y}(\eta)$  tel que  $y(\eta)_i = C_{\eta}(1 + \eta)$  si  $i \notin K_P$  et  $y(\eta)_i = C_{\eta}$  sinon avec  $C_{\eta} > 0$  choisi telle que  $\mathbf{y}(\eta) \in \Sigma$ , on a si  $i \notin K_P$

$$\sum_j y(\eta)_i^{-1} P_{ij} y(\eta)_j = \sum_{j \notin K_P} P_{ij} + (1 + \eta)^{-1} \sum_{j \in K_P} P_{ij} = \Phi_P(\mathbf{w}) - \eta(1 + \eta)^{-1} \sum_{j \in K_P} P_{ij}$$

et si  $i \in K_P$

$$\sum_j y(\eta)_i^{-1} P_{ij} y(\eta)_j = \sum_{j \notin K_P} P_{ij}(1 + \eta) + \sum_{j \in K_P} P_{ij} = \sum_j P_{ij}(1 + \eta) - \eta \sum_{j \in K_P} P_{ij}$$

ce qui donne  $\Phi_P(\mathbf{y}(\eta)) < \Phi_P(\mathbf{w})$  pour  $\eta > 0$  suffisamment proche de zéro, contrairement à la propriété (5). Ainsi  $K_P$  est vide, soit

$$\Phi_P(\mathbf{w}) = \sum_j P_{ij}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$\mathbf{w}$  est un vecteur propre de  $P$  avec valeur propre  $\Phi_P(\mathbf{w})$  et donc  $\mathbf{v}$  un vecteur propre de  $M$  <sup>(5)</sup>

Le théorème en résulte, grâce à la prop. 4.2. □

**Définition 4.3.** La matrice  $M$  à coefficients positifs ou nuls est dite primitive si une de ses puissances a tous ses coefficients non nuls.

**Corollaire 4.1.** Soit  $M$  matrice à coefficients positifs ou nuls primitive.

Le rayon spectral  $\rho_M$  de  $M$  est valeur propre simple et a un vecteur propre à coefficients strictement positifs. Toute autre valeur propre est de module strictement inférieur au rayon spectral  $\rho_M$ .

<sup>(5)</sup>L'existence du vecteur propre  $v \in \Sigma$  résulte du théorème de Brouwer appliqué à la transformation du simplexe  $\bar{\Sigma}$  qui à  $v$  associe  $Mv/\|Mv\|_1$  :

**Théorème (Brouwer)** Soit  $C$  convexe compact de  $\mathbb{R}^d$ . Toute application continue de  $C$  dans lui-même admet un point fixe dans  $C$ .

La démonstration présentée ici est élémentaire et est reprise de notes de Suyeon Kim qui l'attribue à V. Drinfeld (2006). La caractérisation de  $v$  par min-max apparaît chez H. Wielandt (1950).

*Démonstration.* — Soit  $k$  tel que  $M^k$  soit à coefficients tous positifs. D'après le théorème 4.1,  $M$  a  $\rho_M$  comme valeur propre. Si elle n'était pas simple,  $(\rho_M)^k$  serait valeur propre multiple de  $M^k$ , ce qui n'est pas. De même si  $M$  avait une valeur propre  $\lambda$  de module  $\rho_M$  distincte de  $\rho_M$ , la matrice  $M^k$  aurait  $\rho_M^k$  comme valeur propre non simple si  $\lambda/\rho_M$  était une racine  $k$ -ième de l'unité ou une valeur propre de module  $\rho_{M^k} = (\rho_M)^k$  distincte de  $\rho_{M^k}$ , ce que le théorème 4.1 prohibe aussi.  $\square$

**Définition 4.4.** L'indice  $r_G$  du graphe  $G$ , est défini comme la plus grande valeur propre de sa matrice d'adjacence.

La caractérisation variationnelle (4) du rayon spectral d'une matrice à coefficients strictement positifs  $M$  permet de comparer les indices de graphes et de sous-graphes.

**Corollaire 4.2.** Si  $H$  est un sous-graphe de  $G$ , alors  $r_H \leq r_G$ .  
En particulier, si  $G$  a  $\#S_G$  sommets et au moins une arête,

$$1 \leq r_G \cos(r_G \leq \#S_G - 1$$

et si  $G$  est connexe de diamètre  $d_G$

$$r_G \geq 2 \cos(\pi/(d_G + 2)).$$

*Démonstration.* — Soit  $J$  la matrice d'ordre  $\#S_G$  avec tous ses coefficients égaux à 1. On a  $\rho_M = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_{M+\varepsilon J}$ . Par ailleurs, si  $H$  est un sous-graphe de  $G$ , le graphe  $H_G$  obtenu en complétant  $H$  par  $\#S_G - \#S_H$  sommets (sans aucune arête supplémentaire) a comme spectre celui de  $H$  augmenté de 0 de multiplicité  $\#S_G - \#S_H$  : la matrice de  $H_G$  est dominée coefficient à coefficient par celle de  $G$ . Utilisant la caractérisation variationnelle (4), on obtient l'inégalité entre les rayons spectraux

$$\rho_{M_{H_G} + \varepsilon J} \leq \rho_{M_G + \varepsilon J}$$

d'où en passant à la limite lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $r_H = r_{H_G} \leq r_G$ . Les autres inégalités proviennent d'une part du plongement d'un graphe à  $n = \#S_G$  sommets dans le graphe complet  $K_n$  qui vérifie  $r_{K_n} = n - 1$  et l'inclusion d'un graphe connexe à deux sommets (une arête!, avec spectre  $\{-1, 1\}$ ) dans un graphe avec au moins une arête, d'autre part du plongement dans  $G$  d'un chemin de longueur  $d_G$  à  $d_G + 1$  sommets, dont le spectre a été calculé dans l'exemple 4.1.4.  $\square$

$\triangle$  **Remarque 4.2.** On aurait pu utiliser le principe variationnel des matrices symétriques énonçant que la plus grande valeur propre  $\lambda_{\max}$  d'une matrice symétrique  $S$  est le maximum de  $\langle v, Av \rangle$  sur les  $v$  de norme (euclidienne) 1. Pour la matrice d'adjacence  $A_H$ , son indice  $r_H$  est de la forme  $\langle v, A_H v \rangle$  pour un  $v$  à coordonnées positives (comme le garantit le théorème de Perron-Frobenius). On a ainsi

$$r_H = \langle v, A_H v \rangle \leq \langle v, A_G v \rangle \leq \sup_{\|w\|_2=1} \langle w, A_G w \rangle = r_G. \quad \nabla$$

### 4.3. Laplacien

On considère les espaces  $E_0 = \mathbb{C}^{S_G} \simeq \mathbb{C}^{n_0}$  et  $E_1 = \mathbb{C}^{M_G} \simeq \mathbb{C}^{n_1}$  munis du produit scalaire hermitien canonique

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n_j} u_i \bar{v}_i, \quad u, v \in \mathbb{C}^{n_j}, j = 0, 1.$$

Le graphe  $G$  est supposé sans boucle, avec une ou plusieurs arêtes entre deux sommets<sup>(6)</sup>. Une orientation de  $G$  permet de définir l'opérateur  $\partial_G : E_1 \rightarrow E_0$  (cf. section 1.5). Son adjoint  $\partial_G^* : E_0 \rightarrow E_1$  vérifie

$$\partial_G^*(s) = \sum_{\omega(a)=s} a - \sum_{\alpha(a)=s} a$$

**Définition 4.5.** Le laplacien  $\Delta_G$  associé au graphe  $G$  est l'opérateur défini sur  $E_0$  par

$$\Delta_G = \partial_G \partial_G^*.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} \Delta_G(s) &= - \sum_{d(s,t)=1} t + d_s s, \\ \langle \Delta_G u, u \rangle &= - \sum_{d(s,t)=1} u_t \bar{u}_s + \sum_{s \in S} d_s |u_s|^2 = \sum_{d(s,t)=1} [-u_t \bar{u}_s + |u_s|^2] \\ (6) \quad &= \frac{1}{2} \sum_{d(s,t)=1} [-u_t \bar{u}_s - u_s \bar{u}_t + |u_s|^2 + |u_t|^2] \\ (7) \quad &= \frac{1}{2} \sum_{s,t \in S_G} (M_G)_{st} |u_s - u_t|^2 = \sum_{a=\{s,t\} \in A_G} |u_s - u_t|^2 \end{aligned}$$

Le laplacien  $\Delta_G$  ne dépend pas de l'orientation utilisée pour définir  $\partial_G$ . Si le graphe est homogène de degré  $d$ , on a la relation entre matrice d'adjacence et laplacien

$$\Delta_G = -M_G + dI_{\mathbb{C}^{S_G}}$$

**Lemme 4.2.** *Le spectre du laplacien est constitué de valeurs propres positives,  $\lambda = 0$  étant toujours valeur propre de multiplicité égale au nombre de composantes connexes de  $G$ .*

*Démonstration.* — La positivité résulte de  $\langle \Delta_G u, u \rangle = \|\partial_G^* u\|^2$ . D'après (7), une fonction  $u \in \ker \Delta_G$  est localement constante, au sens où elle prend mêmes valeurs aux extrémités d'une arête : elle est constante sur toute composante connexe de  $G$ . Par suite, les fonctions  $\mathbf{1}_U$ , où  $U$  parcourt les composantes connexes de  $G$ , constituent une base du noyau  $\ker \Delta_G$ .  $\square$

#### ▷ Exemples 4.4.

1. Le lacet  $L_n$  et le graphe complet  $K_n$  sont de degré constant, resp. 2 et  $n-1$ . Ainsi, d'après les calculs des spectres des exemples 4.1

$$\sigma_{\Delta_{L_n}} = \{4 \sin^2(\pi k/n), k = 0, 1, \dots, n-1\}, \quad \sigma_{\Delta_{K_n}} = \{0, n_{n-1}\}$$

2. Bien que l'étoile ne soit pas homogène, le calcul de son spectre est néanmoins simple :  $\sigma_{\Delta_{E_n}} = \{0, 1_{n-1}, n+1\}$ . On a  $\ker M_{E_n} = \ker(\Delta_{E_n} - 1)$  et  $\ker(\Delta_{E_n} - n - 1) = \mathbf{C}(n, 1, \dots, 1)$ .
3. Pour le chemin  $C_n$ , introduisons  $\omega = e^{2i\pi/n}$ ,  $\Omega_k = \{1, \omega, \dots, \omega^{k-1}\}$  et la symétrie  $\sigma : z \rightarrow \omega^{-1} \bar{z}$  sur  $L_{2n} \simeq \Omega_{2n}$ . Via la bijection du chemin  $C_n \simeq \Omega_n$  avec le quotient  $L_{2n}/\sigma$ , l'espace  $\mathbf{C}^{C_n}$  s'identifie au sous-espace des vecteurs  $v$   $\sigma$ -pairs de  $\mathbf{C}^{L_{2n}}$  i. e. tels que  $v_z = v_{z\omega^{-1}}$ ,  $z \in \Omega_{2n-1}$ . Le laplacien sur  $L_{2n}$  vérifie  $(\Delta_{L_{2n}} v)_z = 2v_z - v_{z\omega} - v_{z\omega^{-1}}$ .

<sup>(6)</sup>Des multigraphes peuvent apparaître dans la démonstration du théorème 4.2 sur le dénombrement des arbres maximaux.



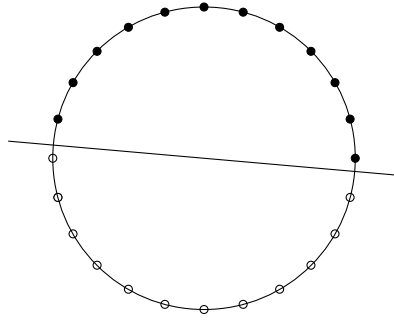


FIGURE 27 . Les graphes  $L_{2n}$ ,  $C_n$  et la droite axe de la symétrie induisant la symétrie  $z \rightarrow \omega^{-1}\bar{z}$  sur  $L_{2n}$ .

Pour  $v$   $\sigma$ -pair, on a

$$(\Delta_{L_{2n}}v)_1 = 2v_1 - v_\omega - v_{\omega^{-1}} = 2v_1 - v_\omega - v_1 = v_1 - v_\omega$$

et pareillement  $(\Delta_{L_{2n}}v)_{\omega^{n-1}} = v_{\omega^{n-1}} - v_{\omega^{n-2}}$ .

Ainsi  $\Delta_{L_{2n}}$  opère sur le sous-espace pair  $\mathbb{C}^{L_{2n}} \cap \ker(\sigma^* - 1) \simeq \mathbb{C}^{C_n}$  comme le laplacien  $\Delta_{C_n}$  sur  $\mathbb{C}^{C_n}$  ; le spectre de  $\Delta_{C_n}$  est  $2 - \omega^j - \omega^{-j} = 4 \sin^2(\pi j/(2n)), j = 0, \dots, n - 1$  avec vecteurs propres respectifs  $(\omega^{jk} + \omega^{-j(k+1)})_{k=0}^{n-1}$ .

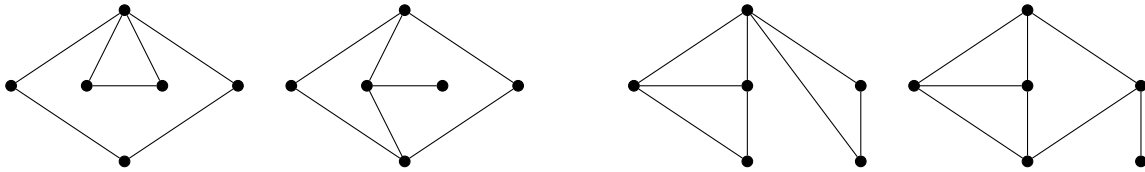


FIGURE 28 . Les deux seules paires de graphes connexes isospectraux pour le laplacien avec au plus 6 sommets.

4. Le problème d'isospectralité pour le laplacien se pose comme pour la matrice d'adjacence. La Fig. 28 contient les deux seules paires isospectrales relativement au Laplacien parmi les graphes connexes avec au plus 6 sommets Ces paires ne sont pas isospectrales relativement aux matrices d'adjacence : pour la première paire, il suffit de compter les nombres de triangles et user la Prop. 4.1<sup>(7)</sup>.

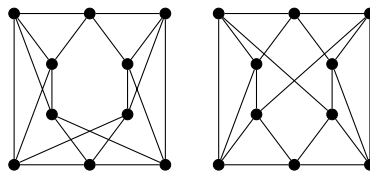


FIGURE 29 . Paire de graphes 4-réguliers isospectraux (pour la matrice d'adjacence et le laplacien), avec spectre de matrice d'adjacence  $\{4, 1, -1, \pm\sqrt{5}, (1 \pm \sqrt{7})/2\}$ .

5. Les problèmes d'isospectralité pour la matrice d'adjacence et le laplacien sont en général distincts, sauf dans le cas de graphes  $d$ -réguliers pour lesquels  $\Delta_G = d - M_G$ .

<sup>(7)</sup>La matrice d'adjacence permet aussi de détecter si un graphe est bipartite ou pas, suivant que le spectre est symétrique par rapport à l'origine ou, de manière équivalente, toutes les traces  $\text{tr } A^{2k+1}$  sont nulles. Le premier graphe, comme tout graphe ayant des triangles, ne peut être bipartite alors que le second graphe de cet exemple l'est.

Un exemple de graphes isospectraux pour les deux matrices est donné dans la Fig. 29. Les graphes contiennent tous deux 8 triangles (ce nombre identique est annoncé par la Prop. 4.1), mais avec des configurations locales différentes : dans le premier graphe, il y a des triplets de triangles avec une arête commune, alors que pour le second les triplets de triangle sont en éventail. Les deux graphes ne sont donc pas isomorphes.  $\triangleleft$

Comme pour la matrice d'adjacence, le laplacien contient des informations géométriques du graphe.

Rappelons que le mineur  $M_{ij}(M)$  de la matrice  $M$  d'ordre  $n$  est le déterminant de la matrice obtenue à partir de  $M$  en supprimant la  $i$ -ième ligne et la  $j$ -ième colonne.

**Lemme 4.3.** *Si les lignes de  $M$  ont une somme nulle alors*

$$(-1)^i M_{ij}(M) = (-1)^k M_{kj}(M), \quad i, k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

*Démonstration.* — Écrivons  $M = (L_1 L_2 \dots L_n)^t$  où, par hypothèse  $L_1 + L_2 + \dots + L_n = 0$ . On a en particulier  $L_2 = -L_1 - L_3 - \dots - L_n$ . Ainsi

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} L_{2j} \\ L_{3j} \\ \vdots \\ L_{nj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -L_{1j} - L_{3j} - \dots - L_{nj} & & \\ & L_{3j} & \\ & & \ddots \\ & & & L_{nj} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} L_{1j} \\ L_{3j} \\ \vdots \\ L_{nj} \end{vmatrix} = -M_{2j}. \quad \square$$

Ce lemme s'applique aux matrices représentant (dans une base orthonormée) le laplacien puisque  $\Delta_G(1, 1, \dots, 1)^t = 0$  et l'opérateur  $\Delta_G$  est symétrique : les cofacteurs  $(-1)^{i+j} M_{ij}(\Delta_G)$  sont indépendants de  $(i, j)$ .

**Théorème 4.2.** *Soit  $G$  un graphe connexe sans boucle, avec un nombre fini (nul ou pas) d'arêtes entre deux sommets. Le nombre  $\tau(G)$  d'arbres recouvrant  $G$  est égal à tout cofacteur  $(-1)^{i+j} M_{ij}(\Delta_G)$  de la matrice du laplacien  $\Delta_G$ . Ce nombre est aussi égal à  $\det[M(\Delta_G) + Jn^{-2}] = n^{-1} \lambda_2(G) \dots \lambda_n(G)$ .*

*Démonstration.* — Si  $(s, t)$  est un couple de sommets adjacents de  $G$ , le graphe  $G \setminus s-t$  désigne le graphe de même ordre que  $G$ , mais avec toutes les arêtes joignant  $s$  et  $t$  enlevées, alors que le graphe  $G \cdot s-t$  désigne le graphe d'ordre  $\#S_G - 1$  où ont été ôtées toutes les arêtes joignant  $s$  et  $t$  et ces deux sommets confondus en un seul. Si  $s-t$  est le côté d'un triangle de  $G$ ,  $G \cdot s-t$  n'est pas simple, même si  $G$  l'est : c'est pour cela que la preuve de ce théorème se place dans l'espace des graphes sans boucles avec un nombre fini de sommets entre deux sommets, où la notion de Laplacien ((7) par ex.) et quelques autres est prolongée de manière cohérente et sans difficulté.

Par ailleurs, un graphe  $G$  non connexe n'a pas d'arbre recouvrant (mais des sous-arbres maximaux : si  $G$  est connexe, un arbre maximal est recouvrant). En décomposant  $S_G = S_{G_1} \sqcup S_{G_2}$  avec  $G_1$  et  $G_2$  indépendants, ce qui donne une forme diagonale  $\Delta_G = \begin{pmatrix} \Delta_{G_1} & 0 \\ 0 & \Delta_{G_2} \end{pmatrix}$ , le mineur  $M_{11}(G)$  contient dans le coin SE une sous-matrice non régulière (du fait de l'existence de la valeur propre 0 pour  $\Delta_{G_2}$ ) et est donc nul : si  $G$  est non connexe, il n'y a pas d'arbres recouvrant et on a l'égalité de  $\tau(G) = 0$  et du mineur  $M_{11}(G)$ , tous deux nuls.

On fait une récurrence sur le nombre  $\#A_G$ . Pour  $\#A_G = 1$  et  $\#S_G = 2$ , l'assertion du théorème est assurée.

Soit  $G$  avec  $\#A_G > 1$ . Soient  $s$  et  $t$  deux sommets de  $G$  joints par  $d$  arêtes avec  $d \geq 1$ . Avec une bonne numérotation on peut supposer que les sommets  $s, t$  sont  $s_1$  et  $s_2$ . Les matrices  $\Delta_{G \setminus s-t}$  et  $\Delta_{G \cdot s-t}$  ont une forme similaire à celle de  $\Delta_G$  : en particulier, leurs sous-matrices constituées des  $\#S_G - 2$  dernières lignes et colonnes sont les mêmes. Les coefficients sur la deuxième ligne  $(\Delta_G)_{2,j}, j > 2$  et  $(\Delta_{G \setminus s-t})_{2,j}, j > 2$  sont aussi identiques, avec  $(\Delta_G)_{2,2} = (\Delta_{G \setminus s-t})_{2,2} + d$  où  $d$  est le nombre d'arêtes entre  $s_1$  et  $s_2$ . L'égalité

$$M_{11}(\Delta_{G \setminus s-t}) + dM_{11}(\Delta_{G \cdot s-t}) = M_{11}(\Delta_G)$$

résulte des développements suivant la première ligne des déterminants  $M_{11}(\Delta_G)$  et  $M_{11}(\Delta_{G \setminus s-t})$  : tous les termes sont les mêmes, sauf les premiers, qui diffèrent exactement du terme  $dM_{11}(\Delta_{G \cdot s-t})$  vu la relation entre les valences  $(\Delta_G)_{2,2} - d = d_{s_2, G} - d = d_{s_2, G \setminus s-t} = (\Delta_{G \setminus s-t})_{2,2}$ . Le théorème résulte alors des égalités assurées par l'hypothèse de récurrence

$$M_{11}(\Delta_{G \setminus s-t}) = \tau(G \setminus s-t), \quad M_{11}(\Delta_{G \cdot s-t}) = \tau(G \cdot s-t)$$

et du lemme géométrique suivant.

Si  $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  sont les valeurs propres de  $\Delta_G$ , la matrice  $M(\Delta_G) + J/n^2$  a comme spectre  $\{n^{-1}, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ . Par ailleurs, la dérivée de  $\det(t - \Delta_G) = t \prod_{j=2}^n (t - \lambda_j)$  vaut  $\sum_{i=1}^n (M_{ii}(t - \Delta_G))$ , soit en prenant en  $t = 0$ ,  $(-1)^{n-1} n M_{11}(\Delta_G) = (-1)^{n-1} \prod_{j=2}^n \lambda_j = (-1)^{n-1} n \det[M(\Delta_G) + J/n^2]$ .  $\square$

**Lemme 4.4.** *Soit  $s, t$  un couple de sommets joints par  $d$  arêtes dans le multigraphe sans boucle  $G$ . Alors  $\tau(G \setminus s-t) + d\tau(G \cdot s-t) = \tau(G)$ .*

*Démonstration.* — Un arbre recouvrant  $G$  contient soit nulle arête joignant  $s$  et  $t$ , induisant un arbre recouvrant  $G \setminus s-t$ , soit au moins une des arêtes joignant  $s$  à  $t$ , induisant par confusion de  $s$  et  $t$  un arbre recouvrant  $G \cdot s-t$ , graphe provenant de  $d$  arbres recouvrant  $G$  par cette opération de fusion : ce décompte donne l'identité du lemme.  $\square$

**Corollaire 4.3 (Cayley, 1897).** *Le nombre de sous-arbres recouvrant le graphe complet  $K_n$  vaut  $n^{n-2}$ .*

*Démonstration.* — Le graphe  $K_n$  étant homogène de valence  $n - 1$  et avec spectre  $\{-1_{n-1}, n - 1\}$ , le spectre de son laplacien  $M(\Delta_{K_n}) = n - 1 - M(K_n)$  est  $\{n_{n-1}, 0\}$  avec  $\ker J = (\ker \Delta_{K_n})^\perp$ , d'où  $\tau(K_n) = n^{n-2}$ .



FIGURE 30 . Les deux types d'arbres couvrants  $K_4$  : le premier en étoile, au nombre de 4 suivant la place du centre de l'étoile, le second un chemin déterminé par une extrémité (4 choix), la première arête (trois choix) et la seconde (2 choix), soit,  $4 \cdot 3 \cdot 2/2 = 12$  arbres différents : on a bien  $4 + 12 = 4^2$  arbres couvrants.

Donnons un dénombrement direct. Numérotions les sommets de  $K_n$  de 1 à  $n$ . Nous allons coder un arbre  $A$  par une suite  $s_A$  de  $n - 2$  nombres appartenant à  $1, \dots, n$ , obtenus en considérons une suite d'arbres  $A(j)$  avec  $A(0) = A$  : le  $j$ -ème élément de  $s_A$  est le numéro du sommet adjacent au sommet  $n_j$  de valence 1 de plus petit numéro de l'arbre  $A(j - 1)$  et  $A(j) = A(j - 1) \setminus \{n_j\}$ . De par cet encodage, les sommets apparaissant dans  $s_A$  sont exactement les sommets de  $A$  valence au moins 2.

Réciproquement, si on se donne une suite  $s = (s_1, \dots, s_{n-2})$ , on construit l'arbre correspondant  $A_s$  en considérant le plus petit élément  $i_1$  de  $\{1, \dots, n\} \setminus \{s_1, \dots, s_{n-2}\}$ , qui fournit l'arête  $\{i_1, s_1\}$ , puis l'élément  $i_2$  plus petit de  $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, s_2, \dots, s_{n-2}\}$  donnant l'arête  $\{i_2, s_2\}$ . L'élément  $i_k$  sera le plus petit de  $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k, s_{k+1}, \dots, s_{n-2}\}$ .

Le nombre d'arbres recouvrant de  $K_n$  est donc celui des suites de longueur  $n - 2$  à éléments dans  $\{1, \dots, n\}$ , soit  $n^{n-2}$ .  $\square$

**Proposition 4.3 (Principe du min-max).** *Soit  $H$  un opérateur hermitien de l'espace  $E$  de dimension  $N$ , de spectre  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ . On note par  $G_k$  l'ensemble des sous-espaces de dimension  $k$  de  $E$ . Alors*

$$(8) \quad \lambda_k = \min_{V \in G_k} \max_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{\langle Hv, v \rangle}{\|v\|^2}, \quad k = 1, \dots, N.$$

*Démonstration.* — Soit  $(b_1, \dots, b_N)$  une base orthonormée de vecteurs propres associées aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  et  $V_k = \text{Vect}(b_1, \dots, b_k)$ . Alors, si  $v = \sum_{i=1}^k x_i b_i$ , on a

$$\langle Hv, v \rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_k \sum_{i=1}^k x_i^2 = \lambda_k \|v\|^2$$

soit

$$\lambda_k \leq \max_{\substack{v \in V_k \\ v \neq 0}} \frac{\langle Hv, v \rangle}{\|v\|^2}.$$

avec égalité vu que  $b_k \in V_k$  et  $\langle Hb_k, b_k \rangle = \lambda_k$ .

Soit  $V$  un sous-espace de dimension  $k$ . L'orthogonal  $V_{k-1}^\perp = \text{Vect}(b_{k+1}, \dots, b_n)$ , de dimension  $n - k + 1$ , rencontre  $V$  en un sous-espace de dimension au moins 1 : un vecteur non nul de ce sous-espace vérifie  $\langle Hv, v \rangle \geq \lambda_k \|v\|^2$ , d'où  $\max_{v \in V} \frac{\langle Hv, v \rangle}{\|v\|^2} \geq \lambda_k$ , ce qui conclue la preuve.  $\square$

**Corollaire 4.4.** *Soit  $H$  sous-graphe de  $G$ . Alors*

$$\lambda_{\max}(H) \leq \lambda_{\max}(G),$$

*Démonstration.* — Pour  $u$  fonction définie sur  $S_H$ , notons par  $\tilde{u}$  son prolongement à  $S_G$ , nul sur  $S_G \setminus S_H$ . Pour  $v$  vecteur propre de  $\Delta_H$  associé à la valeur propre  $\lambda_{\max}(H)$ , on a d'après (7)

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(H) \langle v, v \rangle &= \langle \Delta_H v, v \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\{s,t\} \in A_H} (v(s) - v(t))^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{\{s,t\} \in A_G} (\tilde{v}(s) - \tilde{v}(t))^2 \\ &= \langle \Delta_G \tilde{v}, \tilde{v} \rangle \leq \lambda_{\max}(G) \langle \tilde{v}, \tilde{v} \rangle \end{aligned}$$

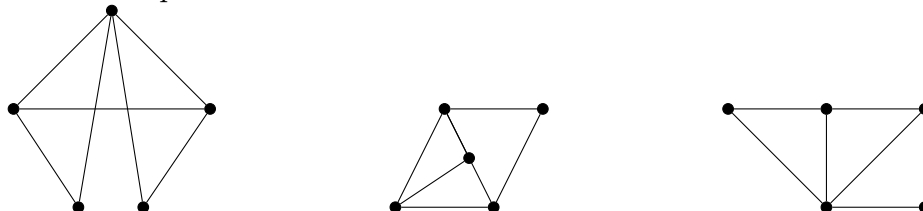
On en déduit le résultat vu que  $\langle \tilde{v}, \tilde{v} \rangle = \langle v, v \rangle$ .  $\square$

#### 4.4. Exercices

1. Soit  $M$  la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les graphes ci-dessous peuvent-ils être associés à  $M$  ?



2. Un graphe  $G$  est dit biparti si l'ensemble de ses sommets est partitionné en deux parties  $X_{1G}$  et  $X_{2G}$  telles que toute arête ait une extrémité dans  $X_{1G}$  et une dans  $X_{2G}$ . Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $M_G$ , alors  $-\lambda$  est aussi valeur propre. On pourra remarquer que l'involution  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \rightarrow (\mathbf{x}_1, -\mathbf{x}_2)$  induit un isomorphisme entre les espaces propres  $E_\lambda$  et  $E_{-\lambda}$

3. Calculer les spectres de la matrice d'adjacence et du Laplacien pour le graphe bipartite complet  $K_{m,n}$ . (Réponse :  $\{\pm\sqrt{nm}, 0_{n+m-2}\}$  et  $\{n+m; n_{m-1}, m_{n-1}, 0\}$ )

4. Le graphe  $L(G)$  des arêtes du graphe  $G$  a été défini dans l'exercice 1.6.10. Soit  $B_G$  la matrice d'incidence de  $G$  à  $\#S_G$  lignes et  $\#A_G$  colonnes, le coefficient d'indice  $(a, s)$  étant égal à 1 si  $s$  est extrémité de  $a$ , nul sinon. Montrer que

$$B_G B_G^t = M_G + \text{diag}(d_s), \quad B_G^t B_G = 2 + M_{L(G)},$$

et en déduire que le spectre de  $M_{L(G)}$  est minoré par  $-2$ .

Montrer que

$$\det(M_G + \text{diag}(D_s) - \lambda) = (-\lambda)^{\#S_G - \#A_G} \det(M_{L(G)} + 2 - \lambda)$$

et en déduire, lorsque  $G$  est régulier de degré  $d$ , le lien entre les spectres de  $G$  et  $L(G)$ .

5. Parmi les graphes de l'exercice 1.6, y-a-t-il des paires isospectrales ?

6. Compter le nombre de circuits de longueur  $n$  dans le graphe  $K_n$ . Quel est le nombre des circuits de longueur  $2n$  dans  $K_{n,n}$  ?

7. Soit sur le graphe  $G$  une pondération  $P = (P_a)_{a \in A_G}$  des arêtes par des poids positifs et  $V = (V_s)_{s \in V_G}$  un potentiel. Montrer que la forme quadratique  $Q_{V,W}$  définie par

$$Q_{V,P}(u) = \sum_{a \in A_G} P_a |u_{s_1(a)} - u_{s_2(a)}|^2 + \sum_{s \in S_G} V_s |u_s|^2, \quad u = (u_s) \in \mathbb{C}^{S_G}$$

définit un unique opérateur hermitien  $H_{P,V}$  tel que  $Q_{P,V}(u) = \langle H_{P,V}u, u \rangle, u \in \mathbb{C}^{S_G}$ . Donner l'expression de  $H_{P,V}u$  et montrer que les valeurs propres de  $H_{P,V}$  sont continues relativement au poids  $P$  et au potentiel  $V$ .

8. Vérifier le théorème de Perron-Frobenius pour des matrices carrées d'ordre 2.

9. Soit  $M$  matrice à coefficients positifs ou nuls de rayon spectral  $\rho_M$ .
- (1) Montrer qu'il existe un vecteur  $(z_j)$  à coefficients positifs non tous nuls tel que  $\sum_i M_{ik}z_i = \rho_M z_k$ .
  - (2) Soit  $(u_j)$  un vecteur à coefficients positifs non nuls et notons  $\mu_i = u_i^{-1} \sum_k M_{ik}u_k$ . Montrer que

$$\sum_i (\mu_i - \rho_M) u_i z_i = 0$$

et en déduire

$$\inf_i u_i^{-1} \sum_k M_{ik}u_k \leq \rho_M \leq \sup_i u_i^{-1} \sum_k M_{ik}u_k.$$

10. Le produit cartésien  $G \times H$  des deux graphes  $G$  et  $H$  est le graphe ayant pour ensemble de sommets le produit cartésien  $S_G \times S_H$ , avec la paire de sommets  $\{(s, t), (s', t')\}$  liée par une arête dans  $G \times H$  si  $G$  a pour arête  $\{s, s'\}$  et  $t = t'$  ou  $H$  a comme arête  $\{t, t'\}$  et  $s = s'$ .  
 Montrer que le spectre du laplacien sur  $G \times H$  est constitué des valeurs propres  $\lambda + \mu$  où  $\lambda$  (resp.  $\mu$ ) parcourt le spectre de  $\Delta_G$  (resp.  $\Delta_H$ ).  
 L'hypercube  $H_d$  de dimension  $d$  est le produit cartésien de  $d$  copies du graphe  $K_2$ . Montrer que le graphe  $H_d$  est  $d$ -homogène et que son laplacien  $\Delta_{H_d}$  a pour spectre les entiers pairs  $2k$  de  $[0, d]$ , avec multiplicités respectives  $C_d^k$ .

11. (i) Tracer les complémentaires des graphes  $L_4 \sqcup K_1$  et  $E_5$  <sup>(8)</sup>. En comptant les triangles, montrer que leurs matrices d'adjacence ne sont pas isospectrales.  
 (ii) Montrer que la paire de graphes



ainsi que celle de leurs complémentaires, est isospectrale : le polynôme caractéristique de la première paire est  $\lambda^7 - 6\lambda^5 + 9\lambda^3 - 4\lambda$ , celui de la paire des complémentaires  $\lambda^7 - 15\lambda^5 + 22\lambda^4 + 12\lambda^3 - 24\lambda^2$ .

12. (i) Soit  $G$  un graphe simple connexe et  $\overline{G}$  son graphe complémentaire. Montrer que

$$\Delta_G + \Delta_{\overline{G}} = \#S_G Id - J$$

où  $J$  est la matrice dont tous les coefficients sont des 1.  
 Montrer qu'un élément propre  $(v, \lambda)$  de  $\Delta_G$  avec  $v$  orthogonal au vecteur constant (vecteur propre pour valeur propre 0) est élément propre de  $\Delta_{\overline{G}}$  pour la valeur propre  $n - \lambda$ . En déduire que, si  $\lambda_1 = 0 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  est le spectre de  $\Delta_G$ , alors  $\Delta_{\overline{G}}$  a pour spectre  $0, (n - \lambda_{n-i+2})_{2 \leq i \leq n}$ .  
 En remarquant que  $\overline{K_{m,n}} = K_m \cup K_n$ , montrer que le laplacien  $\Delta_{K_{m,n}}$  a pour spectre  $(0, m_{n-1}, n_{m-1}, n + m)$ .

<sup>(8)</sup>C'est la première paire isospectrale de la Fig. 21.

13. Soit  $s, t$  deux sommets non adjacents d'un graphe  $G$ . Montrer que la valeur deuxième valeur propre du laplacien vérifie

$$\lambda_2 \leq \frac{d_s + d_t}{4}.$$

14. Calculer les spectres des graphes  $G$  tracés dans l'exercice 1.6.10, ainsi que ceux de leurs graphes d'arêtes.
15. Montrer que le polynôme caractéristique d'un arbre est pair ou impair, suivant la parité du nombre de ses sommets.
16. Calculer le spectre de la matrice d'adjacence du produit de Kronecker  $G \otimes H$  en fonction des spectres de  $G$  et  $H$ .

17. Le laplacien normalisé  $\mathcal{L}_G$  d'un graphe  $G$  connexe avec au moins 2 sommets est défini par  $\mathcal{L}_G = D_G^{-1/2}(D_G - A_G)D_G^{-1/2}$ . Si  $G$  est réduit à un point on pose  $\mathcal{L}_G = (0)$  et pour  $G$  non connexe on pose  $\mathcal{L}_G = \oplus_i \mathcal{L}_{G_i}$  si  $G = \sqcup_i G_i$  est la partition de  $G$  en composantes connexes. On note  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  les valeurs propres du  $\mathcal{L}_G$  si  $G$  a  $n$  sommets.

Calculer les spectres de  $\mathcal{L}_G$  pour  $G = K_n, E_n, L_n$  et  $C_n$ .

Montrer que les valeurs propres de  $\mathcal{L}_G$  sont positives ou nulle et que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \leq n$ , avec égalité si  $G$  n'a pas de sommets isolés.

Montrer que  $\lambda_1 = 0$  est valeur propre de  $\mathcal{L}_G$ , de multiplicité le nombre de composantes connexes de  $G$ .

Pour  $n \geq 2$ , montrer que  $\lambda_1 \leq n/(n-1)$ , avec égalité si et seulement si  $G = K_n$  et que  $\lambda_n \geq n/(n-1)$  si  $G$  n'a pas de sommets isolés.

Montrer que

$$\lambda_1 = \inf_{\sum_s d_s u_s = 0} \frac{\sum_{a=\{s,t\}} (v_s - v_t)^2}{\sum_s d_s v_s^2}, \quad \|\mathcal{L}_G\| = \lambda_n = \sup_{(v_s) \neq 0} \frac{\sum_{a=\{s,t\}} (v_s - v_t)^2}{\sum_s d_s v_s^2} \leq 2$$

Montrer que  $\lambda_n = 2$  si et seulement si  $G$  a une composante bipartite et que si est  $G$  bipartite connexe,  $\lambda$  est valeur propre de  $\mathcal{L}_G$  si et seulement si  $2 - \lambda$  est valeur propre.

Les calculs de polynômes caractéristiques et de spectres ont été faits avec le logiciel sage (cf [www.sagemath.org/](http://www.sagemath.org/)), logiciel libre facilement installable sur divers systèmes et parfois très performant. Par exemple, on a codé le premier graphe de la Fig. 22 suivant

```
g=Graph(1:[0,2,3],4:[2,3,5],2:[3])
g.adjacency_matrix().characteristic_polynomial().factor()
g.adjacency_matrix().eigenvalues()
g.spectrum()
```

Pour calculer des spectres, on peut aussi utiliser le logiciel R (avec son packet `polynom`) cher aux statisticiens (qui n'est pas un outil de calcul formel, d'où le nombre 0 apparaissant comme `9.992007e-15!`) :

```
A=matrix(c(0,1,0,0,0,0,1,0,1,1,0,0,0,1,0,1,1,0,0,1,1,0,1,0,
0,0,1,1,0,1,0,0,0,0,1,0),nrow=6, byrow=T)
eigen(A)
poly.calc(eigen(A)$values)
```

## CHAPITRE 5

### GRAPHES PLANAIRES

Un graphe  $G$  est dit *planaire* s'il admet une représentation plane où les seules intersections possibles d'arêtes sont en leurs sommets. Considérant la sphère  $S^2$  comme la complétion du plan obtenue par ajout d'un point dit  $\infty$ , un graphe est planaire si et seulement si il admet une représentation sur la sphère  $S^2$ .

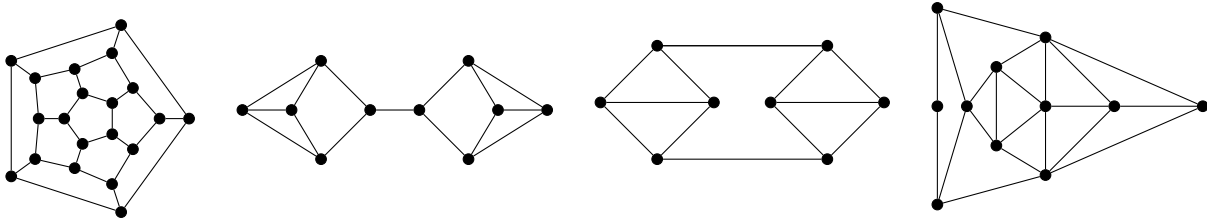


FIGURE 31 . Le premier graphe provient de la projection du squelette d'un polyèdre (en fait le dodécaèdre) sur une sphère, les autres ne sont pas de ce type.

▷ **Exemples 5.1.**

1. Le bord  $\partial P$  d'un polyèdre convexe  $P$  de  $\mathbb{R}^3$  est constitué de sommets, d'arêtes et de faces (qui sont des polygones convexes) : l'ensemble des sommets et arêtes constituent le squelette  $\Sigma_P$  (1-dimensionnel) du polyèdre, qui est naturellement un graphe. Si  $M$  est un point intérieur de  $P$  et  $S$  une sphère contenant  $P$ , par la projection de centre  $M$  sur la sphère  $S$ , on obtient une représentation planaire du squelette  $\Sigma_P$ .
2. Les graphes biparties  $K_{2,n}$  sont planaires, alors que le graphe complet  $K_n$  n'est pas planaire dès que  $n \geq 5$ . ◁

△ **Remarque 5.1.** Un même graphe planaire peut avoir plusieurs représentations planaires distinctes, *i. e.* qu'on ne puisse amener à coïncider par "déformation élastique du plan". ▽

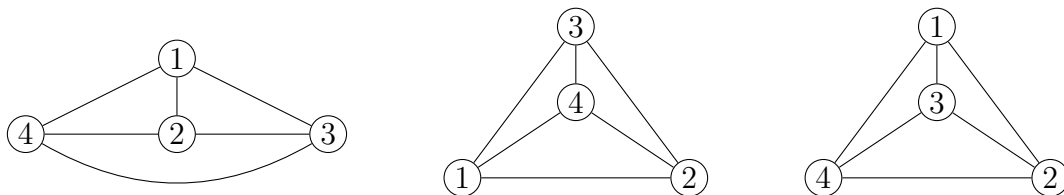


FIGURE 32 . Différentes représentations planaires du graphe  $K_4$ .



**Lemme 5.1.** *Un arbre est planaire.*

*Démonstration.* — Une récurrence sur le nombre des sommets en convainc. □

**Lemme 5.2.** *Soit  $G$  séparable, avec  $G_1$  et  $G_2$  ses sous-graphes séparés par le sommet séparateur  $s$ .  $G$  est planaire si et seulement si  $G_1$  et  $G_2$  le sont.*

*Démonstration.* — Par restriction d’une représentation planaire de  $G$ , on obtient une représentation planaire de tout sous-graphe de  $G$ .

Réciproquement si  $G_1$  et  $G_2$  sont planaires, on peut supposer la représentation planaire de  $G_1$  (resp.  $G_2$ ) incluse dans le demi-plan  $\{x \geq 0\}$  ( $\{x \leq 0\}$  resp.) avec  $s = (0, 0)$ . L’union de ces deux représentations planaires en donnent une pour  $G$  qui est donc planaire. □

Rappelons le théorème de Jordan (1887) : pour toute courbe continue fermée simple  $\Gamma$  du plan, le complémentaire  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  possède exactement deux composantes connexes. Ce théorème a été complété par Schönflies (1906) : pour toute courbe continue fermée simple  $\Gamma$  du plan, il existe un homéomorphisme du plan qui transforme  $\Gamma$  en le cercle du plan.<sup>(1)</sup>

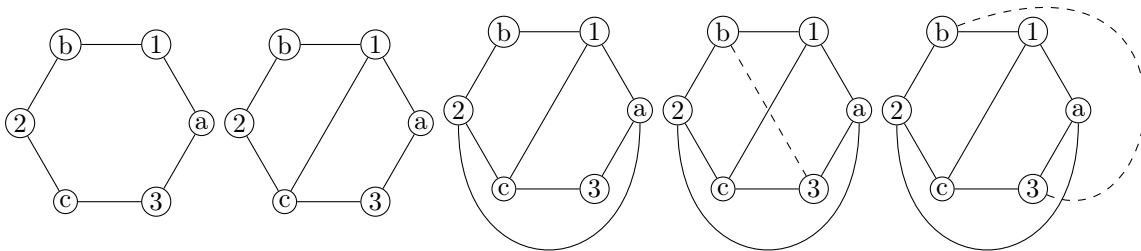


FIGURE 33 . Le graphe  $K_{3,3}$  n’est pas planaire en invoquant le théorème de Jordan. Pour s’en tenir à l’argument seul, on a dessiné les arêtes comme des segments ou des arcs différentiables : ils sont supposés continus seulement.

Il peut être utilisé pour montrer que le graphe  $K_{3,3}$  n’est pas planaire. Supposons par l’absurde qu’il le soit. On note  $\{1, 2, 3\}, \{a, b, c\}$  sa bipartition. (1) Le lacet  $\gamma = a1b2c3a$  détermine deux composantes connexes dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ . (2) On peut supposer que la composante bornée contient l’arc  $1c$ . (3) Le sommet  $a$  est dans la composante non bornée de  $\mathbb{R}^2 \setminus 1c2b1$ . Alors l’arête  $a2$  est incluse dans cette composante. (4) L’arête  $3b$  n’est pas dans la composante bornée  $B_\gamma$  de  $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$  :  $\overline{B_\gamma} \setminus 1c$  a deux composantes, celle contenant  $2$  et celle contenant  $b$  et un chemin de  $2$  à  $b$  intersecte le chemin  $1c$ . (5) De même, l’arête  $3b$  n’est pas dans l’autre composante de  $B_\gamma$ . Ainsi, en conclusion, le graphe  $K_{3,3}$  n’est pas planaire.

<sup>(1)</sup>L’extension naturelle du théorème de Jordan en dimension supérieure (*i. e.* le complémentaire d’une sphère topologique a deux composantes connexes) est vraie, mais pas celle de Schönflies : il existe des plongements continus de la sphère dans  $\mathbb{R}^3$  dont les composantes du complémentaire ne sont pas homéomorphes à la boule !

### 5.1. La relation d'Euler

Soit  $G$  un graphe dessiné suivant  $\mathcal{G}$  sur le plan  $P$ , sans intersection d'arêtes. Le complémentaire  $P \setminus \mathcal{G}$  est une union de composantes connexes, appelées faces. Une seule composante est non bornée : elle appelée *face infinie*. Toute autre composante est bordée par un lacet, courbe simple constituée d'un nombre fini d'arêtes.

**Lemme 5.3.** *Si  $G$  est un graphe planaire et  $\Delta$  une face d'une représentation planaire  $\mathcal{G}$  de  $G$ , il existe une représentation planaire  $\tilde{\mathcal{G}}$  de  $G$  telle que  $\Delta$  privée d'un point soit homéomorphe à la face infinie de  $\tilde{\mathcal{G}}$ . En particulier pour tout sommet  $s$  de  $G$  (pour toute arête de  $G$  resp.), il existe une représentation de  $G$  telle que le sommet (resp. l'arête) appartienne à la face infinie.*

*Démonstration.* — La projection stéréographique  $\pi_N$  applique homéomorphiquement  $S^2 \setminus \{N\}$  sur le plan euclidien. Soit  $m$  un point de la face  $\Delta$ . Par une composition  $\rho$  convenable de rotations sur la sphère, on peut amener le point  $\pi_N^{-1}(m)$  de la sphère sur le pôle nord  $N$ . La bijection du plan (privé d'un point)  $\pi_N \circ \rho \circ \pi_N^{-1}$  amène  $m$  sur  $\infty$ .  $\square$

$\triangle$  **Remarque 5.2.** Les représentations planes du graphe  $K_4$  de la Fig. 32 ont des faces à l'infini distinctes, de bords respectifs  $\{(1, 4), (4, 3), (3, 1)\}$ ,  $\{(1, 3), (3, 2), (2, 1)\}$  et  $\{(1, 2), (2, 4), (4, 1)\}$ .  $\nabla$

Pour un graphe  $G$  avec représentation planaire  $\mathcal{G}$ , on note par  $\#F = \#F_{\mathcal{G}}$  leur nombre des faces de  $\mathcal{G}$ .

**Théorème 5.1 (Euler (1750)).** *Soit  $G$  un graphe planaire connexe. Alors*

$$(9) \quad \#S_G - \#A_G + \#F_G = 2.$$

$\triangle$  **Remarque 5.3.** En terme de caractéristique d'Euler  $\chi_G$  du graphe  $G$ , on a donc  $\chi_G = 2 - \#F_G$ . La caractéristique d'Euler  $\chi_P$  d'un polyèdre  $P$  de  $\mathbb{R}^3$  est définie par  $\chi_P = \#S_P - \#A_P + \#F_P$  où  $\#S_P, \#A_P, \#F_P$  notent resp. les nombres de sommets, d'arêtes et de faces du bord de  $P$ . Si  $G_P$  est le graphe obtenu par projection sur une sphère du squelette du polyèdre convexe  $P$ , l'identité (9) énonce  $\chi_P = 2$  ou encore  $\chi_{G_P} = 2 - \#F_{\mathcal{G}_P} = \chi_P - \#F_{\mathcal{G}_P}$  où  $\mathcal{G}_P$  est la représentation planaire de  $G_P$  obtenue par projection.  $\nabla$

*Démonstration.* — Posons  $E_G = \#S_G - \#A_G + \#F_G$  pour un graphe planaire  $G$ . Pour un arbre  $T$ , on a  $\#S_T = \#A_T + 1$  et  $\#F_T = 1$ , soit  $E_T = 2$ .

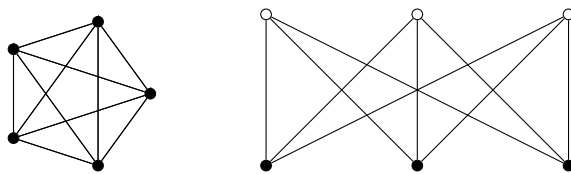
Soit  $T$  un arbre maximal de  $G$ . On passe de  $T$  à  $G$  par une suite de graphes  $G_0 = T, G_1, \dots, G_{\beta_G} = G$  en rajoutant successivement une des  $\beta_G$  arêtes de  $A_G \setminus A_T$ . On a les relations

$$\#A_{G_{j+1}} = \#A_{G_j} + 1, \quad \#S_{G_{j+1}} = \#S_{G_j}, \quad \#F_{G_{j+1}} = \#A_{G_j} + 1,$$

et donc  $E_{G_{i+1}} = E_{G_i}$ . Et par suite  $E_G = E_{G_{\beta_G}} = E_T = 2$ .  $\square$

Comme corollaire, on a

**Proposition 5.1.** *Les graphes  $K_5$  et  $K_{3,3}$  ne sont pas planaires.*

FIGURE 34 . (a) le graphe complet  $K_5$ , (b) le graphe bipartite  $K_{3,3}$ .

*Démonstration.* — Supposons qu'il existe une représentation plane de  $K_5$ , avec  $s = 5$ ,  $a = 10$ ,  $f$  le nombre de sommets, d'arêtes et de faces associés. Vu que chaque face est bordée par au moins 3 arêtes, chaque arête étant commune à deux faces, on a  $3f \leq 2a$ . On en déduit

$$2 = s - a + f \leq s - a + 2a/3 = s - a/3 = 5 - 10/3 = 5/3 < 2,$$

ce qui est absurde.

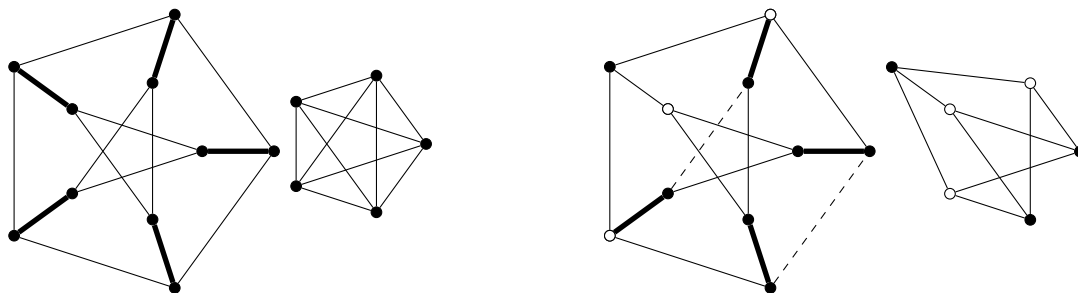
Pour le graphe  $K_{3,3}$  qui est bipartite, chaque face est bordée par au moins 4 arêtes : l'inégalité  $2f \leq a$  résultante amène à une contradiction analogue si on suppose  $K_{3,3}$  planaire.  $\square$

## 5.2. Le théorème de Kuratowski

Un *mineur* du graphe  $G$  est un graphe obtenu à la suite de contraction d'arêtes (fusionnant les extrémités), de suppression d'arêtes (sans fusionner les extrémités) et de suppression de sommets (et des arêtes adjacentes).

$\triangle$  *Remarque 5.4.* Un mineur d'un graphe simple n'est pas nécessairement simple.  $\nabla$

**Théorème 5.2 (Kuratowski (1930)).** *Un graphe est planaire si et seulement si il ne contient pas de graphes de type  $K_5$  et  $K_{3,3}$  parmi ses mineurs.*

FIGURE 35 . Le graphe de Petersen n'est pas planaire : il a comme mineurs  $K_5$  et  $K_{3,3}$ , par contraction des arêtes grasses et suppression des arêtes pointillées.

Ce théorème profond découle des quatre lemmes montrés ci-après.

*Démonstration.* — D'après la Prop. 5.1, si le graphe  $G$  est plan, il ne peut contenir ni  $K_5$  ni  $K_{3,3}$ .

Réciproquement, soit  $G$  non planaire. Raisonnons *ab absurdo* en supposant que  $G$  ne contienne ni  $K_5$ , ni  $K_{3,3}$  parmi ses mineurs. Quitte à remplacer  $G$  par un graphe homéomorphe, on peut supposer que  $G$  contient un nombre minimal d'arêtes. D'après le lemme 5.4, le graphe  $G$  est 3-connexe. Le Lemme 5.7 implique que  $G$  est planaire, ce qui est contradictoire.  $\square$

**Lemme 5.4.** *Soit  $G = (S, A)$  un graphe non planaire ne satisfaisant pas  $(K)$ , avec  $\#A$  minimal. Alors  $G$  est 3-connexe.*

*Démonstration.* — Montrons tout d'abord que  $G$  est 2-connexe en raisonnant par l'absurde. Soit donc  $s$  un sommet tel que  $G \setminus \{s\}$  soit non connexe, de composantes connexes  $C_1, \dots, C_k$  avec  $k \geq 2$ . Par minimalité de  $A_G$ , les graphes  $C_i, i = 1, \dots, k$  sont planaires : on peut les représenter planairement avec  $s$  dans la face infinie d'une représentation planaire  $\mathcal{C}_i$  de chaque  $C_i$  : on en déduit une représentation planaire de  $G = C_1 \cup \dots \cup C_k \cup \{s\}$ , contredisant l'hypothèse :  $G$  est donc 2-connexe.

Supposons maintenant  $G$  non 3-connexe. Vu la 2-connexité, Il existe  $\{s, t\}$ , avec  $s \neq t$  tel que  $G \setminus \{s, t\}$  soit non connexe, de composantes connexes  $C_1, \dots, C_\ell$  :  $u, v$  étant adjacents à un sommet de chaque composante connexe  $C_i$ , il existe un chemin de  $s$  à  $t$  dans chaque  $C_i$ . Si chaque graphe  $H_i$ , obtenu à partir de  $C_i$  en lui ajoutant éventuellement l'arête  $(s, t)$  était planaire, en plaçant l'arête  $(s, t)$  sur le bord à l'infini d'une des représentations planaires de  $C_i$ , on obtiendrait une représentation planaire de  $G$ , en contradiction avec l'hypothèse. Ainsi, au moins un des  $H_i$ , mettons  $H_1$ , est non planaire : par hypothèse de minimalité, il contient le graphe  $K$ , avec  $K = K_5$  ou  $K = K_{3,3}$ . Si  $G$  ne contient pas l'arête  $(s, t)$ ,  $H_2$  contient un chemin de  $s$  à  $t$ , qu'on substitue à  $(s, t)$  pour inclure  $K$  dans  $G$ , ce qui est contradictoire avec le fait que  $G$  ne satisfait pas  $(K)$ .  $\square$

**Lemme 5.5.** *Soit  $G$  3-connexe avec au moins 5 sommets. Alors le graphe  $G$  possède une arête  $a$  telle que la contraction  $G \cdot a$  soit encore 3-connexe.*

*Démonstration.* — Raisonnons par l'absurde : pour toute arête  $a = (s, t)$  de  $G$ , le contracté  $G \cdot a$  est non 3-connexe. Si  $s_a$  est le sommet de  $G \cdot a$  obtenu par contraction de  $a$ , ce sommet  $s_a$  appartient à toute partie de coupure  $S$  à 2 éléments de  $G \cdot a$  (sinon on obtiendrait un ensemble de coupure de  $G$  qui est 3-connexe!). Si  $S = \{s_a, u\}$  est un ensemble de coupure de  $G \cdot a$ , la partie  $\{s, t, u\}$  est un ensemble de coupure de  $G$ . On choisit  $a$  et  $z_a$  tels que  $G \setminus \{s, t, z_a\}$  ait une composante connexe  $H$  avec  $S_H$  de cardinal minimum. Soit  $y \in S_H$  tel que  $b = (y, z_a)$  soit une arête de  $G$  : si un tel  $y$  n'existait pas, la partie  $\{s, t\}$  séparerait  $H$  du reste de  $G$  qui est supposé 3-connexe! Le graphe  $G \cdot b$  n'est pas 3-connexe : de même que précédemment, on affirme l'existence d'un sommet  $w$  tel que  $R = \{y, z_a, w\}$  déconnecte  $G$ .

Le graphe  $G \setminus R$  a au moins deux composantes connexes : soit une d'entre elles contient l'arête  $(s, t)$  (dans le cas où  $R \cap \{s, t\} = \emptyset$ ), soit un des sommets  $s$  ou  $t$  est égal à  $w$  et l'autre est dans une des composantes de  $G \setminus R$  : au final, il existe une composante  $B$  de  $G \setminus R$  ne contenant ni  $s$ , ni  $t$ . Cette composante  $B$  contient un sommet  $y'$  voisin de  $y$  (sinon, la partie  $\{z_a, w\}$  séparerait  $G$ ).

Par connexité, vu que  $y \in A$  et  $y' \in B$ , le graphe  $B$  est inclus dans  $A$ , strictement vu que  $y \neq y'$ . On a donc  $\#B < \#A$ , ce qui est contradictoire avec la minimalité de  $A$  quant à son cardinal.  $\square$

**Lemme 5.6.** *Soit  $e$  une arête de  $G$ . Si le contracté  $G \cdot e$  contient un sous-graphe homéomorphe à  $K_5$  ou  $K_{3,3}$ , il en est de même pour le graphe  $G$ .*

*Démonstration.* — Soit  $s$  sommet de  $G \cdot e$  obtenu par contraction de l'arête  $e = (a, b)$ ,  $H$  un sous-graphe de  $G \cdot e$  homéomorphe à  $K_5$  ou  $K_{3,3}$  et  $\tilde{H}$  le sous-graphe relevé de  $H$  dans  $G$ . Si  $s$  est hors de  $H$  ou si  $s \in H$  est de degré 2,  $H$  se relève en un graphe homéomorphe à  $K_5$  ou  $K_{3,3}$  dans  $G$ .

Il en est de même si  $a$  (ou  $b$ ) est de degré 2 dans  $\tilde{H}$ , auquel cas  $\tilde{H}$  et  $H$  sont homéomorphes.

Reste le cas où  $a$  et  $b$  sont de degré 3 :  $s$  est de degré 4 et  $H$  homéomorphe à  $K_5$  : en ôtant deux arêtes de  $\tilde{H}$ , on obtient un sous-graphe de type  $K_{3,3}$  dans  $G$  comme l'indique la Fig. 36.  $\square$

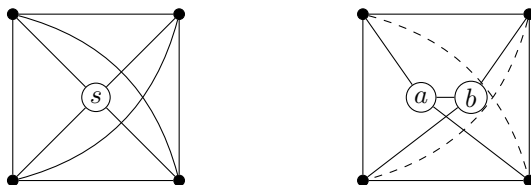


FIGURE 36 . Le sous graphe  $H \simeq K_5$  de  $G \cdot e$  se relève en  $\tilde{H}$  contenant un  $K_{3,3}$ .

**Lemme 5.7.** *Tout graphe 3-connexe et qui ne contient ni  $K_5$  ni  $K_{3,3}$  est planaire.*

*Démonstration.* — On procède par récurrence sur le nombre  $\#S_G$  en commençant avec les graphes 3-connexes à 4 sommets : le seul est le graphe  $K_4$  (celui du tétraèdre) qui est planaire. Vu que  $\#S_G \geq 5$ ,  $G$  possède, grâce au lemme 5.5, une arête  $e = (a, b)$  telle que le graphe  $G \cdot e$  (où l'arête  $e$  s'est contractée sur le sommet  $s$ ) est 3-connexe. Vu le Lemme 5.6, le graphe  $G \cdot e$ , de cardinal  $\#S_G - 1$ , ne contient ni  $K_5$  ni  $K_{3,3}$  : le graphe  $G \cdot e$  est donc planaire vu l'hypothèse de récurrence.

Considérons une représentation planaire de  $G \cdot e$  et  $C$  le bord de la face de  $G \cdot e \setminus s$  qui contiendrait  $s$ . Puisque  $G \cdot e$  est 3-connexe,  $C$  est un lacet, que l'on identifie à son relevé dans  $G$ .

Vu que  $G \setminus \{a, b\} = G \cdot e \setminus \{s\}$ , l'ensemble  $\nu_G(a)$  des voisins de  $a$  est inclus dans  $C \cup \{b\}$ . On suppose  $\#\nu_G(a) \leq \#\nu_G(b)$  et on ordonne les sommets de  $\nu_G(a) \setminus \{b\} = \{a_1, \dots, a_k\}$  suivant l'ordre du lacet  $C$ . Soit, pour  $i < j$ ,  $P_{i,j}$  le chemin de  $a_i$  à  $a_j$  le long de  $C$ . De la représentation planaire de  $G \cdot e \simeq G \setminus \{a, b\}$  on obtient une représentation planaire de  $G \setminus \{b\}$  en traçant des segments de  $a$  à  $a_i$ .

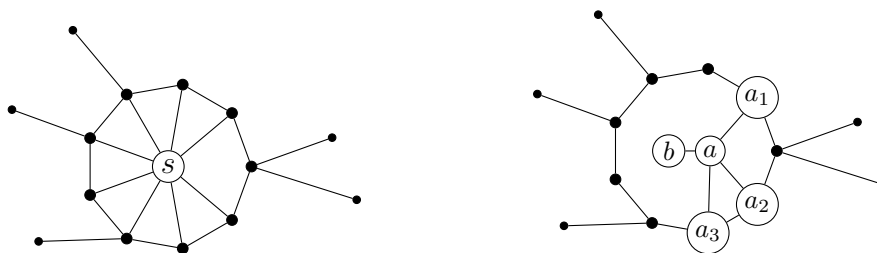


FIGURE 37 . La partie du graphe  $G \cdot e$  contenant  $s$  et son relevé dans  $G \setminus \{a, b\}$ .

Trois cas sont à examiner :

1. Si  $\nu_G(b) \setminus \{a\} \subset P_{i,i+1}$  pour un certain  $i$ , alors on positionne  $b$  dans la face de bord  $(a, a_i), P_{i,i+1}, (a_{i+1}, a)$  obtenant ainsi une représentation planaire de  $G$ .
2. Il existe  $y, z \in \nu_G(b) \setminus \{a\}$  tels que  $y \in P_{i,j}$  et  $z \notin P_{i,j}$  avec  $y, z \notin \{a_i, a_j\}$ . Alors  $\{b, a_i, a_{i+1}\}$  et  $\{b, z, y\}$  forment une copie homéomorphe à  $K_{3,3}$  dans  $G \cdot e$ , ce qui est impossible.
3. On a l'inclusion  $\nu_G(b) \setminus \{a\} \subset \nu_G(a)$ . Vu l'hypothèse  $\#\nu_G(a) \leq \#\nu_G(b)$ , on obtient donc l'égalité  $\deg(a) = \deg(b)$ . Si  $\deg(a) = \deg(b) = 3$ , le graphe  $G$  est planaire. Sinon, il contient un  $K_5$ .  $\square$

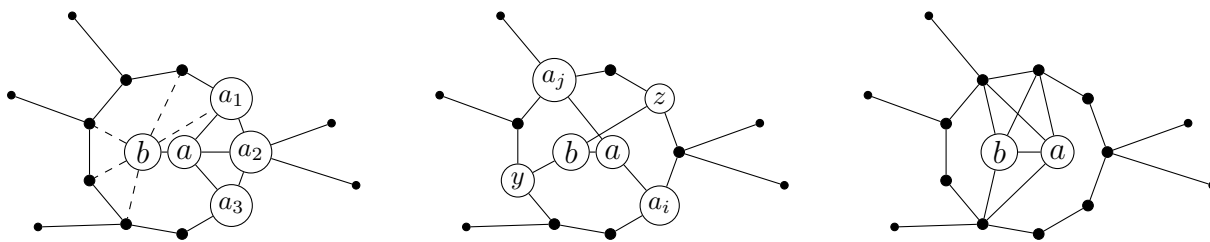


FIGURE 38 . Les cas (1), (2) et (3).

### 5.3. Exercices

1. Soit  $G$  un graphe planaire avec  $p$  composante connexes. Montrer

$$\#S_G - \#A_G + \#F_G = 1 + p.$$

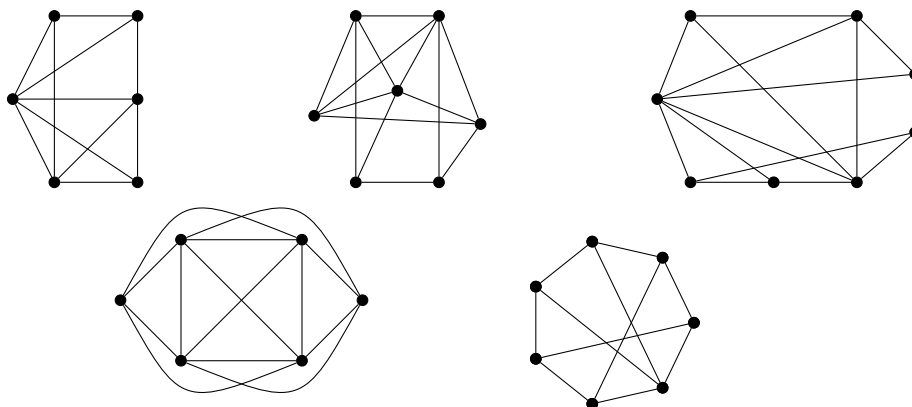
2. Soit  $G$  un graphe planaire connexe. Montrer que

$$3\#F_G \leq \sum_{F \in F_G} \#\partial F = 2\#A_G$$

et en déduire que  $2 \leq \#S_G - 1/3\#A_G$ , puis la non planarité des graphes  $K_N$  pour  $N \geq 5$  et  $K_{P,Q}$  pour  $P \geq Q \geq 3$ .

3. Soit  $G$  connexe. Montrer que  $G$  a un sommet séparateur si et seulement si il existe deux sommets  $s$  et  $s'$  ne pouvant être reliés par deux chemins disjoints.

- 4.



Lequel de ces graphes est-il planaire ?

5. Une triangulation du plan est un graphe planaire connexe dont toutes les faces sont des triangles. Montrer qu'une triangulation à  $n$  sommets a  $2n - 4$  faces et  $3n - 6$  arêtes, puis que toute triangulation a un sommet de valence au plus 5.
6. Soit  $G$  un graphe planaire 3-régulier (*i. e.* chaque sommet est de valence 3). Si  $f_k$  est le nombre de faces à  $k$  côtés, montrer que

$$12 = \sum_{k \geq 3} (6 - k)f_k.$$

7. Montrer que le deuxième graphe de la Fig. 24 est non planaire. Que dire des graphes de la Fig. 29 ?

## CHAPITRE 6

### TROIS CONJECTURES ET DEUX THÉORÈMES

Le nombre chromatique  $\kappa_G$  d'un graphe  $G$  est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier les sommets de  $G$  sans que deux sommets voisins n'aient la même couleur. Le théorème des quatre couleurs énonce que  $\kappa_G \geq 4$  pour tout graphe planaire.

Il est en général difficile de calculer ce nombre chromatique. Une borne inférieure est donné par le nombre  $\omega_G$ , cardinal maximal d'un graphe complet plongé dans  $G$  : on a en effet  $\kappa_{K_n} = n$ .

Un graphe  $G$  est dit *parfait* si pour tout sous-graphe  $H$  de  $G$  on a  $\kappa_H = \omega_H$ . La classe des graphes parfaits intervient de manière importante en théorie de la complexité et de l'optimisation.

Les graphes suivants sont parfaits

- un graphe biparti  $G$ , pour lequel  $\kappa_G = \omega_G = 2$ , ou le complémentaire d'un tel graphe,
- le graphe des arêtes d'un graphe biparti ou le complémentaire d'un tel graphe,
- un graphe d'intervalles (un sommet par intervalle et une arête pour chaque intersection de deux intervalles),
- le graphe d'une relation d'ordre (une arête entre deux éléments comparables d'un ensemble ordonné)

mais le lacet à  $2n + 1$  sommets n'est pas parfait ( $\kappa_{L_{2(n+1)}} = 3$  et  $\omega_{L_{2(n+1)}} = 2$ ) pas plus que son complémentaire  $\overline{L_{2n+1}}$  (pour lequel on montre  $\kappa = n + 1$  et  $\omega = n$ ). Un *trou impair* désigne un lacet d'ordre impair au moins 5, le complémentaire d'un trou impair est appelé *antitrou impair*.

C. Berge a conjecturé en 1961 le théorème des graphes parfaits que M. Chudnovsky, N. Robertson, R. Thomas et P. Seymour ont montré en 2002 :

**Théorème 6.1.** *Un graphe est parfait si et seulement si il ne contient aucun trou impair ni antitrou impair.*

C. Berge avait aussi conjecturé le théorème suivant prouvé par L. Lovász (1972)

**Théorème 6.2.** *Un graphe est parfait si et seulement si son complémentaire est parfait.*

Terminons ces notes par l'énoncé de la conjecture d'Hadwiger (1943)

**Conjecture (Hadwiger)** Si le graphe  $G$  n'a pas le graphe complet  $K_k$  comme mineur, alors le graphe  $G$  est coloriable avec  $k - 1$  couleurs.

H. Hadwiger prouva les cas  $k \leq 4$  avant d'énoncer sa conjecture. Le cas  $k = 5$ , dont Wagner prouva en 1937 l'équivalence avec le théorème des quatre couleurs, résulta de la résolution de ce théorème par W. Haken et K. Appel en 1976. Robertson, Seymour et Thomas prouvèrent en 1993 comment le cas  $k = 6$  pouvait se ramener au théorème des quatre couleurs. La conjecture d'Hadwiger reste ouverte pour  $k > 6$ .

## LISTE DES FIGURES

1 Un graphe.....	2
2 (a) Le chemin $C_8$ , (b) le lacet $L_{10}$ , (c) le graphe complet $K_9$ , (d) le graphe biparti $K_{9,5}$ .....	3
3 Deux graphes isomorphes.....	3
4 Deux graphes sans automorphisme, pour lesquels néanmoins les sous graphes $G \setminus u$ et $G \setminus v$ sont isomorphes.....	3
5 Diverses représentations graphiques du graphe simple à 5 sommets $a, b, c, d, e$ et 5 arêtes $(a, d), (b, e), (b, d), (c, d), (e, c)$ .....	4
6 Le graphe de la Fig. 1.1 orienté.....	4
7 Deux paires de graphes non isomorphes ayant mêmes suites de valences $(1, 2_3, 3_1)$ et $(2_2, 3_3, 5)$ resp.....	6
8 La variable $\ell = 0, 1, \dots, n - 1$ repère le sommet $\sigma_\ell = s_{n-\ell}$ .....	7
9 Les deux sommets $u$ et $v$ sont séparés par l'ensemble des trois sommets $\{1, 2, 3\}$ et joints par trois chemins indépendants.....	8
10 Transformations $Y\Delta$ et <i>pont</i> .....	13
11 Königsberg (la Pregel, les îles et les ponts) et le graphe modélisant la traversée des ponts.....	14
12 (a) Un graphe eulérien, (b) la <i>maison</i> admettant un chemin eulérien, mais sans lacet eulérien, (c) un graphe sans chemin eulérien.....	15
13 Algorithme de Fleury : la suite des graphes $G_j$ et la construction du lacet eulérien.....	16
14 Le graphe du dodécaèdre est hamiltonien.....	16
15 Un graphe hamiltonien non eulérien, un graphe eulérien non hamiltonien et un graphe non hamiltonien ne vérifiant pas la condition nécessaire de la Prop. 2.1. . .	17
16 Deux graphes avec 2 et 6 sommets de valence impaire.....	19
17 Graphes bicoloriés (fin/gras) sans triangle unicolore pour $K_5$ et avec pour le $K_6$ .....	21
18 Deux graphes utiles pour le calcul de $R(3, 4)$ et $R(4, 4)$ .....	27
19 Les matrices d'un graphe (non orienté) et d'un digraphe.....	29
20 Deux représentations du graphe de Petersen.....	32
21 Deux paires de graphes isospectraux avec le nombre minimal de sommets : la première parmi les graphes non connexes, la seconde parmi les forêts.....	32



22 Deux paires de graphes connexes isospectraux non isomorphes.....	32
23 Deux arbres isospectraux avec même suites de valences et non isomorphes.....	33
24 Une paire de graphes 4-homogènes isospectraux (où les sommets $a$ , resp. $\alpha$ , sont à identifier) non isomorphes, l'un planaire, l'autre pas.....	33
25 Une triade isospectrale de polynôme caractéristique $(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda^3-3\lambda^2-4\lambda+8)\lambda^2$ .	33
26 Graphes avec indice égal à 2.....	35
27 Les graphes $L_{2n}$ , $C_n$ et la droite axe de la symétrie induisant la symétrie $z \rightarrow \omega^{-1}\bar{z}$ sur $L_{2n}$ .....	39
28 Les deux seules paires de graphes connexes isospectraux pour le laplacien avec au plus 6 sommets.....	39
29 Paire de graphes 4-réguliers isospectraux (pour la matrice d'adjacence et le laplacien), avec spectre de matrice d'adjacence $\{4, 1, -1_4, \pm\sqrt{5}, (1 \pm \sqrt{7})/2\}$ .....	39
30 Les deux types d'arbres couvrants $K_4$ : le premier en étoile, au nombre de 4 suivant la place du centre de l'étoile, le second un chemin déterminé par une extrémité (4 choix), la première arête (trois choix) et la seconde (2 choix), soit, $4 \cdot 3 \cdot 2/2 = 12$ arbres différents : on a bien $4 + 12 = 4^2$ arbres couvrants.....	41
31 Le premier graphe provient de la projection du squelette d'un polyèdre (en fait le dodécaèdre) sur une sphère, les autres ne sont pas de ce type.....	46
32 Différentes représentations planaires du graphe $K_4$ .....	46
33 Le graphe $K_{3,3}$ n'est pas planaire en invoquant le théorème de Jordan. Pour s'en tenir à l'argument seul, on a dessiné les arêtes comme des segments ou des arcs différentiables : ils sont supposés continus seulement.....	47
34 (a) le graphe complet $K_5$ , (b) le graphe bipartite $K_{3,3}$ .....	49
35 Le graphe de Petersen n'est pas planaire : il a comme mineurs $K_5$ et $K_{3,3}$ , par contraction des arêtes grasses et suppression des arêtes pointillées.....	49
36 Le sous graphe $H \simeq K_5$ de $G \cdot e$ se relève en $\tilde{H}$ contenant un $K_{3,3}$ .....	51
37 La partie du graphe $G \cdot e$ contenant $s$ et son relevé dans $G \setminus \{a, b\}$ .....	51
38 Les cas (1), (2) et (3).....	52

# INDEX

- K. APPEL, 53
- arête, 2
  - opposée, 4
- arborescence, 9
- arbre, 8, 10, 40, 46
  - maximal, 9
  - recouvrant, 9
- arc, 2
- R.-L. BAIRE, 5
- C. BERGE, 53
- E. BETTI, 9, 10
- G. BOOLE, 12
- boucle, 2
- caractéristique d'Euler, 3
- carré, 2
- A. CAYLEY, 41
- chemin, 2, 6
  - eulérien, 14
- circuit, 2, 6
- A. CLEBSCH, 14
- clique, 2
- composante connexe, 8
- contraction d'arête, 5, 40, 49
- cycle, 9
- degré, 6
- diamètre, 6
- digraphe, 4
- P. ERDOS, 22
- étoile, 2, 30, 38
- L. EULER, 14, 15, 48
- extrémité, 2
  - terminale, 4
- forêt, 8
- F. FROBENIUS, 35
- C. GOLDBACH, 14
- graphe, 2
  - biparti, 3, 18, 43, 49, 53
  - complémentaire, 12, 53
  - complet, 2, 5, 16, 46, 53
  - connexe, 7
  - eulérien, 14
  - fini, 3
  - hamiltonien, 16
  - homogène, 6
  - orienté, 4
  - parfait, 53
  - régulier, 6
  - simple, 2
- graphes isospectraux, 30
- H. HADWIGER, 53
- W. HAKEN, 53
- R. HAMILTON, 16
- C. HIERHOLZER, 15
- D. HILBERT, 14
- indice d'un graphe, 37
- C. JORDAN, 34, 47
- I. KANT, 14
- K. KURATOWSKI, 49
- lacet, 2, 6, 53
  - élémentaire, 6
  - eulérien, 14
- laplacien, 38
- R. LIPSCHITZ, 14
- longueur, 6
- L. LOVASZ, 53
- matrice
  - d'adjacence, 29
  - d'incidence, 43
- K. MENGER, 8
- mineur, 34, 40, 49
- multigraphe, 2
- nœud, 2
- nombre chromatique, 53
- ordre d'un graphe, 3
- origine, 4
- parties indépendantes, 6
- pentagone, 2
- O. PERRON, 35
- J. PETERSEN, 11, 32
- racine, 9
- F. RAMSEY, 20
- A. SCHÖNFLIES, 47
- I. SCHUR, 23
- sommet, 2
  - séparateur, 8
- spectre, 30
- E. SZEMERÉDI, 25
- triangle, 2
- valence, 6
- B. VAN DER WAERDEN, 25