



UNIVERSITÉ DE NANTES

Licence de mathématiques
Licence d'économie-gestion
Parcours Math-Éco
Licence d'informatique
Parcours Math-Info

2018-2019

Systèmes dynamiques

Laurent Guillopé

Laboratoire de mathématiques Jean Leray
Département de mathématiques, UFR Sciences et techniques
Université de Nantes

Version : 12 juin 2019

Table des matières

Table des matières	7
1 Systèmes dynamiques à temps continu	9
1.1 Équations différentielles	9
1.2 Conditions initiales et fonctions à valeurs vectorielles	17
1.3 Stabilité	22
1.4 Problème de Cauchy	26
1.5 Solution maximale et explosion	29
1.6 Inégalités de Grönwall	31
2 Équations différentielles (scalaires) d'ordre un	37
2.1 Modélisation et dynamiques unidimensionnelles	37
2.2 Équations linéaires	39
2.3 Équations séparables	41
2.4 Équations de Bernoulli	42
2.5 Stabilité	43
2.6 Facteur intégrant	48
3 Systèmes différentiels linéaires	51
3.1 Systèmes et équations linéaires	51
3.2 Systèmes 2×2 à coefficients constants	53
3.3 Exponentielle de matrice	59
3.4 Des exemples de calcul	64
3.5 Stabilité	66
4 Points d'équilibre et stabilité	69
4.1 Stabilité	69
4.2 Système linéarisé au voisinage d'un équilibre	70
4.3 Le théorème de Routh-Hurwitz	83
4.4 Fonction et stabilité de Liapounov	85
5 Quelques classes d'ÉD particulières	97
5.1 Champ de gradients	97
5.2 Système hamiltonien	100
5.3 L'oscillateur harmonique	104
5.4 Modèle prédateurs/proies, modèle de Goodwin	105
5.5 Le pendule	109
Bibliographie	113

Chapitre 1

Systemes dynamiques à temps continu

```
sage: maxima('plotdf([1,y-y**2],[y, -3, 3],[x, -2, 2])') # I.2-c
sage: maxima('plotdf([1,sin(x*y)],[x, -10, 20],[y, -4, 10])') # I.3-a
```

1.1 Équations différentielles

On modélise un système dynamique par un signal $t \rightarrow x(t)$ où le temps t continu décrit un intervalle I de \mathbb{R} , la fonction $t \in I \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ et la fonction x vérifie une relation entre x et quelques-unes de ses dérivées. Ces modèles apparaissent naturellement en économie, où les indicateurs numériques (taux d'intérêt, taux de chômage, productivité,...) et leurs lois d'évolutions temporelles foisonnent. Ces lois interviennent de manière analogue dans d'autres domaines des sciences (loi de Malthus en dynamique des populations et décroissance de la radio-activité, modèle proie/prédateurs et modèle de Goodwin,...) : ce sont ces ÉD introduites dans ces modélisations (souvent socio-économiques) qui constituent le cœur de ce cours.

DÉFINITION 1.1: Une ÉD d'ordre n scalaire est l'étude des fonctions $x : t \in I \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^p$, définies sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ qui vérifient la relation différentielle

$$F_n(x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t), t) = 0, \quad t \in I \quad (1.1)$$

avec $F_n : \Omega_n(\subset \mathbb{R}^{p(n+1)+1}) \rightarrow \mathbb{R}$. Cette équation est souvent écrite après résolution en x_n de l'équation $F_n(x_0, x_1, \dots, x_n, t) = 0$ sous la forme

$$x^{(n)}(t) = F(x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t), t), \quad t \in I \quad (1.2)$$

pour une fonction $F : \Theta_n(\subset \mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ explicite convenable, de manière équivalente à la formulation (1.1) où $x^{(n)}$ est définie implicitement.

Une ÉD peut porter sur une fonction x d'une variable réelle t et à valeurs vectorielles dans \mathbb{R}^p , l'équation étant donnée par une relation différentielle du type (1.1) ou (1.2), avec les fonctions F ou F_n définies sur des ouverts appropriés et suffisamment régulière (i. e. de classe \mathcal{C}^k pour k entier assez grand).

Introduisons tout de suite la notion de *trajectoire* et de *point d'équilibre*, notion géométrique naturellement associée aux solutions. Tracer les trajectoires est une alternative géométrique à la résolution analytique de l'ÉD, alternative qui exhibe les propriétés qualitatives des solutions en terme de trajectoires, points d'équilibres, points et parties limite, etc. Ce point de vue qualitatif a été inauguré avec grand succès par Poincaré¹.

DÉFINITION 1.2: Une trajectoire de l'ÉD $x' = f(x, t)$ est un arc de courbe paramétrée $t \in I \mapsto x(t)$ solution de l'ÉD. Un point d'équilibre x_0 est un point x_0 par lequel passe une trajectoire constante $t \in I \mapsto x(t) = x_0$, i. e. telle que $f(x_0, t) = 0$ pour tout t .

À l'ÉD $x' = f(x)$ où le membre de droite est indépendant du temps est associé le champ de vecteurs (ou vitesses) $V : x \mapsto f(x)$. Résoudre l'ÉD est équivalent à trouver des trajectoires dont les tangentes épousent le champ de vecteurs : $V(x(t)) = x'(t)$.

▷ EXEMPLES 1.1:

1.1.1 Soit un marché d'échanges concurrentiels avec n biens x_1, \dots, x_n de prix respectifs p_1, \dots, p_n , variant avec le temps. Ce marché est modélisé avec des fonctions $D, O, E = D - O$ de demande, d'offre et d'excès de demande resp. avec par exemple pour E la fonction

$$E : \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \mapsto E(\mathbf{p}) = (E_1(\mathbf{p}), \dots, E_n(\mathbf{p})) \in \mathbb{R}^n.$$

L'évolution temporelle $t \in I \mapsto \mathbf{p}(t)$ du vecteur des prix $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ sous l'influence de la fonction d'excès E est décrite par l'ÉD

$$\mathbf{p}'(t) = k * E(\mathbf{p}),$$

où $k \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur de constantes², soit en terme de système

$$p'_j(t) = k_j f_j(\mathbf{p}(t)), \quad j = 1, \dots, n.$$

Un vecteur de prix \mathbf{p} tel que $E(\mathbf{p}) = 0$ est dit *point d'équilibre* [PÉ]³. Existe-t-il un ou des PÉ? La trajectoire future des prix $\{p(t), t \geq 0\}$ converge-t-elle vers un PÉ?

L'exemple avec un seul prix est donné par la fonction d'excès supposée affine $E : p \mapsto E(p) = -\alpha p + \beta$ où $\alpha > 0$. L'ÉD $p'(t) = E(p(t))$ est une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants $p'(t) = -\alpha p(t) + \beta$, qui est équivalente à

$$(p(t) - \beta/\alpha)' = -\alpha(p(t) - \beta/\alpha),$$

1. Henry Poincaré, 29 avril 1854, Nancy – 17 juillet 1912, Paris.

2. On a utilisé le produit de Hadamard $a * b = (a_i b_i) \in \mathbb{R}^n$ si a et b sont des vecteurs de \mathbb{R}^n .

3. On parle aussi de *point stationnaire*, voire de *point critique*. On se tendra ici à la terminologie PÉ.

soit

$$[(p(t) - \beta/\alpha)e^{\alpha t}]' = 0,$$

ou encore

$$(p(t) - \beta/\alpha)e^{\alpha t} = p_0,$$

d'où la solution définie sur \mathbb{R} dépendante d'une constante réelle p_0

$$p(t) = \beta/\alpha + p_0 e^{-\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Cette ÉD $p'(t) = -\alpha p(t) + \beta$ a comme point d'équilibre $p_\infty = \beta/\alpha$ vers lequel convergent les trajectoires $t \mapsto p(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$: l'horizontale $x = 2/3$ du portait de phase (a) dans la figure I.2 est asymptote à toutes les trajectoires lorsque $t \rightarrow \infty$.

1.1.1 L'ÉD

$$x^2 + (xx')^2 = 1$$

admet pour solution les fonctions

$$x : t \in (\lambda_0 - 1, \lambda_0 + 1) \mapsto \pm \sqrt{1 - (t - \lambda_0)^2}$$

avec en sus les deux solutions particulières constantes $t \in \mathbb{R} \mapsto \pm 1$ définies en tout temps. Les formules explicites permettent de le vérifier simplement : les graphes de ces fonctions sont des arcs de cercle (centrés sur l'axe horizontal et de rayon 1) et des droites horizontales. Ce ne sont pas les seules solutions!

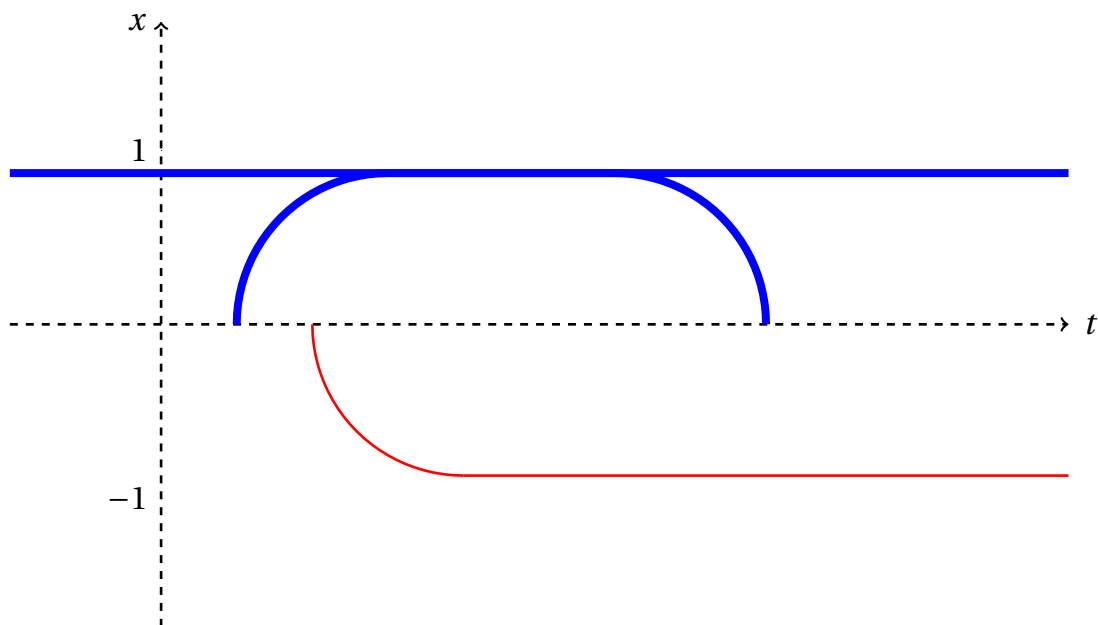


FIGURE I.1 – En rouge et bleu (en trait continu mince ou épais), quelques graphes de solutions de l'ÉD $x^2 + (xx')^2 = 1$.

En effet, tout d'abord, les fonctions constantes $t \in \mathbb{R} \mapsto \pm 1$ sont solutions. Toute solution $t \in I \mapsto x(t)$ avec I connexe ne s'annule jamais tout en ayant ses valeurs bornées en valeur absolue par 1. Enfin, la fonction $t \in I \mapsto -x(t)$ est aussi solution si $t \in I \mapsto x(t)$ l'est.

Nous pouvons nous limiter à l'examen d'une solution positive $t \mapsto x(t)$ passant par (t_0, x_0) avec $0 < x_0 < 1$, telles que $x'(t)$ ne s'annule pas avec pour signe celui de $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. On a donc

$$\varepsilon x'(t)x(t) = \sqrt{1 - x^2(t)}$$

puis, vu que $x(t)x'(t)/\sqrt{1 - x^2(t)}$ a pour primitive $-\sqrt{1 - x^2(t)}$

$$\varepsilon \left[\sqrt{1 - x^2(t)} - \sqrt{1 - x^2(t_0)} \right] = t_0 - t$$

soit, avec $\lambda_{0\varepsilon} = t_0 + \varepsilon\sqrt{1 - x_0^2}$

$$\varepsilon\sqrt{1 - x(t)^2} = t_0 - t + \varepsilon\sqrt{1 - x_0^2} = \lambda_{0\varepsilon} - t.$$

En élevant au carré la dernière égalité, on obtient $1 - x^2(t) = (t - \lambda_{0\varepsilon})^2$, ce qui indique que le graphe de la fonction $t \mapsto x(t)$ est inclus dans le cercle centré en $(\lambda_{0\varepsilon}, 0)$ et de rayon 1.

$$x(t) = \sqrt{1 - \left(t_0 + \varepsilon\sqrt{1 - x_0^2} - t \right)^2} = \sqrt{1 - (\lambda_{0\varepsilon} - t)^2}.$$

Ainsi, la solution est contenue dans un arc de cercle dans le quadrant NE ou NO suivant que $\varepsilon = 1$ ou -1 . Combinant un arc de cercle NO, un segment horizontal de hauteur $x = 1$ et un arc de cercle BE, on trouve une solution de l'ÉD. La dérivabilité aux points de raccord peut être prouvée analytiquement par exemple en vérifiant que la dérivée en $t = \lambda_{0\varepsilon}$

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \sqrt{1 - (\lambda_{0\varepsilon} - t)^2} = \frac{-(t - \lambda_{0\varepsilon})}{\sqrt{1 - (\lambda_{0\varepsilon} - t)^2}} = \frac{\lambda_{0\varepsilon} - t}{x(t)}$$

est bien définie, avec valeur nulle.

Cet exemple d'ÉD ne donne pas de solution passant par un point (t_0, x_0) si $|x_0| > 1$, pas plus que l'unicité lorsque $x_0 \leq 1$. Cette équation prend la forme résolue (1.2) en x' , avec $\eta = \pm 1$,

$$x' = \eta \sqrt{\frac{1 - x^2}{x^2}}$$

où la fonction du membre de droite n'est pas simple et ne vérifie pas les hypothèses du théorème 1.1 d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz énoncé ci-dessous. \triangleleft

△ REMARQUES 1.1:

1. La variable t est considérée comme un temps (continu).
2. Quand f ne dépend pas de t , on écrira les ÉD précédentes comme

$$F_n(x, x', \dots, x^{(n)}) = 0, \quad x^{(n)} = F(x, x', \dots, x^{(n-1)}).$$

Ces équations sont dites *autonomes*. Ses solutions ont la propriété d'invariance par translation : si $x : t \in \mathbb{R} \rightarrow x(t)$ est une solution définie sur \mathbb{R} , alors, pour τ réel, la fonction $x_\tau : t \in \mathbb{R} \mapsto x(t + \tau)$ est aussi solution.

3. La régularité de x, F, \dots sera supposée aussi forte que nécessaire : x dérivable à l'ordre n pour donner un sens à (1.2), F dérivable⁴, (et donc continue) continue et lipschitzienne en les variables x_1, \dots, x_{n-1} afin d'assurer l'existence de solutions,...
4. Un système dynamique en temps discret $t \in \mathbb{N} \mapsto x(t) = x_t \in \mathbb{R}$ est en fait une suite. L'étude de la dynamique d'une suite ne sera pas abordée ici : leur étude partage quelques propriétés communes avec les systèmes dynamiques à temps continu, mais avec une phénoménologie souvent très différente et beaucoup plus complexe : des phénomènes chaotiques surviennent, comme pour la suite logistique $x_{k+1} = Cx_k(1 - x_k)$. ▽

▷ EXEMPLES 1.2:

1.2.1 Soit g définie sur un ouvert Ω de \mathbb{R} . La résolution de l'ÉD

$$x'(t) = g(t), \quad t \in \Omega$$

n'est rien d'autre que le calcul des primitives de g ! On cherchera des solutions définies sur le domaine de g (ou les intervalles de définition de g). Par exemple, la solution de l'équation $x'(t) = 1/t$ sur \mathbb{R}^* dépend de 2 constantes : $x(t) = C_+ + \log|t|$ sur \mathbb{R}^- et $x(t) = C_- + \log|t|$ sur \mathbb{R}^+ .

L'ÉD $tx'(t) = 1$ n'a pas de solution sur \mathbb{R} : ses solutions sur $\{\pm t > 0\}$ sont de la forme $t \in \mathbb{R}^\pm \mapsto \log + C_\pm$ qu'on ne peut prolonger à \mathbb{R} tout entier.

1.2.2 Soient a, b réels et a non nul. L'ÉD, dite linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre,

$$x'(t) = ax(t) + b, \quad t \in \mathbb{R}$$

a⁵ pour solution générale $x(t) = -b/a + Ce^{at}$ définie sur \mathbb{R} , dépendant d'une constante C . En posant $y = x + b/a$, on obtient l'ÉD $y' = ay$, résolue suivant $y(t) = Ce^{at}$ soit donc $x(t) = Ce^{at} - b/a$.

4. Le caractère lipschitzien est parfois suffisant : $F : t \in I \mapsto F(t)$ est dite lipschitzienne s'il existe une constante M telle que $|F(t) - F(s)| \leq M|t - s|$ pour tout $s, t \in I$. D'après l'inégalité des accroissements finis, une fonction dérivable de dérivée bornée est lipschitzienne : La fonction $t \in (-1, 1) \mapsto \sqrt{t}$ est continue mais non lipschitzienne, alors que la fonction $t \in (-1, 1) \mapsto |t|$ est lipschitzienne, non dérivable.

5. Cela a été vu dans l'exemple 1.1.1.

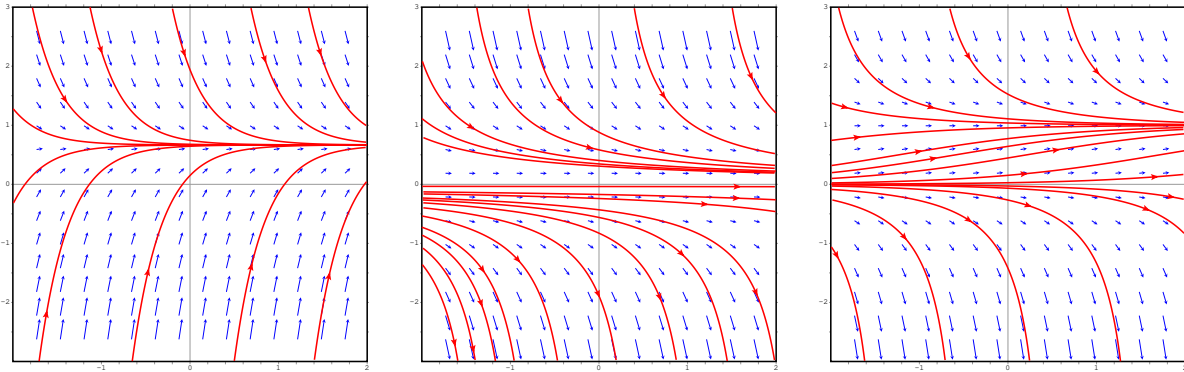


FIGURE I.2 – Différentes solutions des ÉD (a) $x' = -3x + 2$, (b) $x' = -x^2$, (c) $x' = x - x^2$ dans le plan (t, x) . Les droites (a) $x = 2/3$, (b) $x = 0$, (c) $x = 1$ et $x = 0$ resp. correspondent à des solutions constantes, *i. e.* des points d'équilibre.

Si $a > 0$ (resp. $a < 0$), le taux d'accroissement (resp. décroissance) de y est proportionnel à la valeur de la fonction, qui tend vers $+\infty$ de manière exponentielle comme Malthus l'avait constaté pour un premier modèle dynamique de la population P : si chaque année $N\%$ de ses individus donnent naissance à un enfant et que $D\%$ décèdent, l'augmentation nette est de $(N - D)$ pour cent, ce qui donne l'équation $P(t + 1) = P(t)(1 + N - D)$ soit $P'(t) \sim (P(t + 1) - P(t)) = (N - D)P(t)$ et une croissance (disparition resp.) si $N - D > 0$ ($N - D < 0$ resp.). Cette loi modélise de nombreuses évolutions : capital et ses intérêts composés, PIB d'un pays dont le taux de croissance instantané est constant égal à r .

Pour anticiper le problème de Cauchy (cf. définition 1.9), on écrira la solution générale sous la forme

$$x(t) = -b/a + (x_0 + b/a)e^{a(t-t_0)}.$$

solution qui vérifie $x(t_0) = x_0$.

1.2.3 Mise à part la solution constante nulle $t \in \mathbb{R} \mapsto 0$, l'ÉD

$$x' = -x^2$$

a comme solution générale la fonction

$$x(t) = \frac{x_0}{1 + x_0(t - t_0)}, \begin{cases} t \in (t_0 - x_0^{-1}, +\infty) & \text{si } x_0 > 0, \\ t \in (-\infty, t_0 - x_0^{-1}) & \text{si } x_0 < 0. \end{cases}$$

En effet, une solution de l'ÉD non nulle en un point n'est nulle en aucun point : cela résulte de l'unicité de Cauchy-Lipschitz du théorème 1.1 qui interdit à une solution de s'annuler, sauf à être la solution constamment. On peut réécrire⁶ l'ÉD suivant

$$-1 = x'x^{-2} = -(x^{-1})',$$

6. L'équation est clairement à variable séparable au sens du chapitre suivant.

soit en intégrant

$$x^{-1}(t) - x_0^{-1} = t - t_0,$$

ce qui est la solution annoncée. On peut aussi considérer cette équation comme une équation de Bernoulli ⁷, ce qui revient à poser $z = x^{-1}$ qui vérifie l'équation linéaire avec second membre $z'(t) = -1$: en résulte $z(t) - z(t_0) = t - t_0$ et donc

$$x^{-1}(t) - x^{-1}(t_0) = t_0 - t$$

soit le résultat ci-dessus.

Les solutions de l'ÉD $y'(t) = y(t)^2$ proviennent des précédentes par inversion du temps, *i. e.* en définissant y suivant $y(t) = x(-t)$.

1.2.4 L'ÉD

$$x'(t) = x(t) - x^2(t)$$

a comme solution (cf. figure I.8) les fonctions constantes de valeur 0 et 1. Toute autre solution a ses valeurs dans un des intervalles de $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto x(t) = \frac{x_0}{x_0(1 - e^{t_0-t}) + e^{t_0-t}} = \frac{x_0}{x_0 + (1 - x_0)e^{t_0-t}},$$

Les solutions incluses dans l'intervalle $(0, 1)$ (dites *logistique* par Verhulst ⁸) répondent à la discussion précédente sur des effectifs de population : définies sur \mathbb{R} , ces fonctions sont croissantes avec valeurs allant de $x_- = 0$ à $x_+ = 1$ ($> x_-$) lorsque le temps parcourt \mathbb{R} de $-\infty$ à $+\infty$: ces fonctions logistiques sont dites *courbe en S*. On verra (cf. 1.2 ou la résolution explicite ci-dessous) qu'une solution avec $x(t_0) \in (0, 1)$ garde ses valeurs dans cet intervalle : si x est petit, le membre $x - x^2$ est de l'ordre de grandeur de x et le taux d'accroissement de x est proportionnel aux valeurs de x , modulé par le terme $-x^2$ qui tend à freiner cette croissance par un taux de décroissance.

Pour une résolution explicite de cette ÉD, on peut la considérer ou comme une équation de Bernoulli ou comme une équation à variables séparables. Pour la méthode de Bernoulli, on pose $y = x^{-1}$ qui, grâce à la relation $y' = -x'/x^2$, vérifie l'équation linéaire $-y' = y - 1$ de solution générale $y = 1 + Ce^{-t}$ dépendant de la constante C . Cette constante est déterminée par les conditions initiales

$$x_0^{-1} = y_0, \quad y_0 = 1 + Ce^{-t_0}$$

soit $C = (1 - x_0)x_0^{-1}e^{t_0}$ et la solution

$$x(t) = y(t)^{-1} = \frac{1}{1 + (1 - x_0)x_0^{-1}e^{t_0-t}} = \frac{x_0}{x_0 + (1 - x_0)e^{t_0-t}}.$$

7. Jakob Bernoulli, 1654 (Bâle, Suisse) – 1705 (Bâle).

8. Pierre François Verhulst, Bruxelles 28 octobre 1804 – Bruxelles 15 février 1849, ne pas confondre avec [20], auteur d'un bel ouvrage sur les ÉD.

Séparer les variables signifie écrire l'ÉD suivant

$$dt = \frac{dx}{x-x^2} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = \left[\ln \left| \frac{x}{1-x} \right| \right]' dx.$$

Ici est considérée une solution x distincte des solutions constantes ($x \neq 0$ et $\neq 1$) : une telle solution n'atteint jamais ces valeurs. Tenant compte des conditions initiales (t_0, x_0) , on obtient

$$\ln \left| \frac{x}{1-x} \right| - \ln \left| \frac{x_0}{1-x_0} \right| = t - t_0$$

et donc

$$\left| \frac{x}{1-x} \right| / \left| \frac{x_0}{1-x_0} \right| = e^{t-t_0}$$

ou encore, vu que les valeurs x et $1-x$ sont de signe constant le long d'une solution,

$$x^{-1} - 1 = \frac{1-x}{x} = \frac{1-x_0}{x_0} e^{t_0-t} = (x_0^{-1} - 1) e^{t_0-t},$$

soit finalement le résultat à nouveau

$$x = \frac{1}{1 + (x_0^{-1} - 1) e^{t_0-t}} = \frac{x_0}{x_0 + (1 - x_0) e^{t_0-t}}.$$

La solution maximale (cf. ci-dessous la section 1.5) du PC $x' = x - x^2$, $x(t_0) = x_0$ avec $x_0 \in (0, 1)$ est globale (cf. définition 1.10), alors que celle avec $x_0 > 1$ (resp. avec $x_0 < 0$) est définie sur $(t_0 + \ln(1 - x_0^{-1}), +\infty)$ (resp. $(-\infty, t_0 + \ln(1 - x_0^{-1}))$).

1.2.5 L'ÉD

$$x'(t) = \sin(tx(t)), \quad x(0) = 1,$$

n'a pas de solution explicite. Un tracé des graphes des solutions est aisément effectué par le logiciel SageMath, cf. figure 1.3.

1.2.6 L'ÉD

$$tx'(t) - x(t) = t^2$$

a comme solution sur \mathbb{R}^* les fonctions $\pm t > 0 \mapsto x_{\pm}(t) = C_{\pm}t + t^2$, soit un ensemble de solutions dépendant de deux paramètres⁹ C_+ et C_- . Les fonctions qui sont solutions sur \mathbb{R} tout entier sont du type $t \mapsto Ct + t^2$, solution générale dépendant d'un paramètre C .

1.2.7 L'ÉD

$$t^2 x'(t) + x(t) = 0$$

a comme solution¹⁰ sur \mathbb{R}^* toute fonction $x_{C_{\pm}}(t) = C_{\pm}e^{1/x}$ si $\pm t > 0$: l'espace des solutions sur \mathbb{R}^* est un espace vectoriel de dimension 2. Comme solution

9. Le chapitre 2 donne dans sa section 2 la démarche de résolution de telles équations linéaires.

10. Même renvoi à la section II.2 pour la démarche de résolution : il s'agit d'une équation linéaire d'ordre 1.

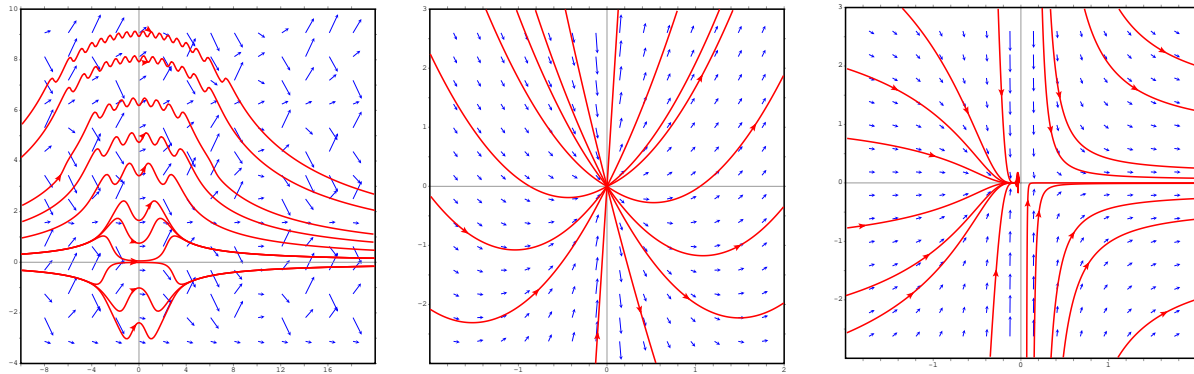


FIGURE I.3 – Le graphe des solutions de (a) $x'(t) = \sin(tx(t))$, (b) $tx'(t) - x(t) = t^2$, (c) $t^2x'(t) + x(t) = 0$.

sur \mathbb{R} , il y a une droite vectorielle de solutions x_C paramétrées par C : $x_C(t) = Ce^{1/t}$ si $t < 0$ et $x_C(t) = 0$ si $t > 0$. \triangleleft

1.2 Conditions initiales et fonctions à valeurs vectorielles

Les exemples précédents indiquent que la solution générale d'une ÉD dépend d'un nombre fini de paramètres : ces paramètres peuvent être choisis comme des *conditions initiales* de la solution de l'ÉD au sens suivant.

DÉFINITION 1.3: Une condition initiale pour l'ÉD (1.2) consiste en le choix d'un temps $t_0 \in \mathbb{R}$, de n nombres x_0, \dots, x_{n-1} et des équations

$$x^{(k)}(t_0) = x_k, \quad k = 0, \dots, n-1$$

pour la solution x de l'ÉD (1.2) supposée définie au voisinage de t_0 .

On peut ramener l'ÉD (1.2) à une équation du premier ordre pour des fonctions à valeurs vectorielles, soit sous la forme d'un système en présentant cette fonction coordonnée par coordonnée. À la fonction scalaire

$$x : t \in I \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$$

on associe la fonction

$$X : t \in I \mapsto X(t) = X(t) = (x(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \in \mathbb{R}^n$$

ou autrement dit la fonction

$$X = (x_0, \dots, x_{n-1}) = (x, x', \dots, x^{(n-1)}).$$

L'ÉD (1.2) d'ordre n et de solution la fonction scalaire x est équivalente à l'ÉD d'ordre 1 vérifiée par la fonction X à valeurs vectorielles dans \mathbb{R}^n :

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'_0(t) \\ \vdots \\ x'_{n-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \\ x^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ F(x_0(t), \dots, x_{n-1}(t), t) \end{pmatrix} = \tilde{F}(U, t) \Big|_{\substack{u_0=x(t) \\ \vdots \\ u_{n-1}=x^{(n-1)}(t)}}$$

avec

$$\tilde{F}: \begin{pmatrix} U = {}^T(u_0, \dots, u_{n-1}) \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \tilde{F} \begin{pmatrix} U \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ F((u_0, \dots, u_{n-1}), t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

L'ÉD

$$X'(t) = \tilde{F}(X(t), t)$$

ou de manière un peu abusivement condensée $X' = \tilde{F}(X, t)$, est donc équivalente au système d'inconnue le n -uplet de fonctions (x_0, \dots, x_{n-1}) et d'équations

$$x'_0 = x_1, \quad x'_1 = x_2, \quad \dots, \quad x'_{n-2} = x_{n-1}, \quad x'_{n-1} = \tilde{F}((x_0, \dots, x_{n-1}), t).$$

On retrouve l'équation (1.2) à partir du système via

$$\begin{aligned} x_0^{(n)} &= (x'_0)^{(n-1)} = (x_1)^{(n-1)} = (x'_1)^{(n-2)} \\ &= (x_2)^{(n-2)} = \dots = x'_{n-1} = \tilde{F}((x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}), t). \end{aligned}$$

▷ EXEMPLE 1.3:

L'ÉD $x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t)$ est transformée en considérant les fonctions scalaires $u = x, v = x'$ et la fonction vectorielle $X = (u, v) = (x, x')$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ a(t)v(t) + b(t)u(t) + c(t) \end{pmatrix} = \tilde{f}(u(t), v(t), t) = f(X(t), t)$$

où on a introduit $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $f((u, v), t) = (v, a(t)v + b(t)u + c(t))$ ◀

DÉFINITION 1.4: L'ÉD $X' = f(X)$ où f ne dépend pas du temps t est dite autonome.

▷ EXEMPLES 1.4:

1.4.1 Soit A une matrice carrée d'ordre n . Alors l'ÉD

$$x'(t) = Ax(t)$$

est autonome : ce système est dit *linéaire*. On montre que ses solutions maximales sont des applications de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R}^n .

1.4.2 Si $f(x, y) = (-y(x^2 + y^2), x(x^2 + y^2)) = (x^2 + y^2)(-y, x)$, l'ÉD

$$(x, y)' = (x^2 + y^2)(-y, x)$$

définit un système qui a les mêmes trajectoires circulaires que l'ÉD linéaire $x' = -y, y' = x$: en effet, l'application $t \mapsto x^2(t) + y^2(t)$ est de dérivée nulle le long de chaque trajectoire. La trajectoire du système linéaire $(x', y') = \|X_0\|^2(-y, +x)$ passant par X_0 coïncide avec la trajectoire du système $X' = f(X)$ passant par X_0 . \triangleleft

Δ REMARQUE 1.2: Quitte à augmenter la dimension de l'espace des phases \mathbb{R}^n d'une unité, on peut se restreindre à l'étude d'équations autonomes. Soit x une solution de l'ÉD $x'(t) = f(x(t), t)$ avec $f : (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto f(x, t) \in \mathbb{R}^n$. Posons

$$F : (x, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow (f(x, s), 1) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

L'équation autonome portant sur $X : t \mapsto X(t) = (x(t), s(t))$ avec second membre $F(x, s)$ prend la forme

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ s'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x(t), s(t)) \\ 1 \end{pmatrix} = F(X(t)).$$

Ainsi, d'une part $s(t) = t + \tau$ pour une constante τ apparaissant lors de l'intégration de $s'(t) = 1$, d'autre part $x'(t) = f(x(t), t + \tau)$. Ainsi, pour $\tau = 0$, on retrouve l'ÉD $x'(t) = f(x(t), t)$ satisfaite par la solution x et correspondant à la solution $X(t) = (x(t), s(t))$ du problème autonome. ∇

DÉFINITION 1.5: Soit l'ÉD autonome $x' = f(x)$ avec $f : x \in \Omega(\subset \mathbb{R}^n) \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^n$ et $x_1 : t \in I \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$ une solution maximale de cette ÉD. La trajectoire (ou orbite) déterminée par la solution x_1 est la partie $\{x_1(t), t \in I\} \subset \Omega(\subset \mathbb{R}^n)$: l'ensemble de ces trajectoires constitue le portrait¹¹ de phase. On peut compléter ce portrait de phase par le champ des vitesses $x \in \Omega(\subset \mathbb{R}^n) \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^n$: ce diagramme des vitesses est traçable aisément, déterminant intuitivement le portrait de phase des solutions (cf. figures I.2 ou I.5).

Pour l'ÉD non autonome $x'(t) = f(x(t), t)$, le graphe $\{(t, x(t))\} \subset \mathbb{R}_{t,x}^{1+n}$ de la fonction solution $t \in I \mapsto x(t)$ est aussi à considérer : il correspond au portrait de phase de l'ÉD (autonome) $(t', x') = (1, f(x, t))$. Le champ des vitesses est dans ce cas $(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega \mapsto (1, f(x, t)) \in \mathbb{R}^{1+n}$: si x est scalaire, au point $m_t = (t, x(t)) \in \mathbb{R}^2$, la tangente à la trajectoire passant par le point m_t est de pente $\text{sgn}(f(x, t))\sqrt{1 + f(x, t)^2}$.

11. Cette appellation provient de la mécanique : les phases position/vitesse d'un système mécanique à un degré de liberté ont une dynamique déterminée par l'équation de Newton du second ordre $x''(t) = f(x(t), t)$ liant accélération et force. Cette ÉD se ramène à une ÉD d'ordre 1 $(x, v)' = (v, f(x(t)))$ dont les trajectoires partitionnent le plan $\mathbb{R}_{x,v}^2$, dessinant ce portrait de phases.

△ REMARQUES 1.3:

1. Pour un système autonome, deux trajectoires $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ complètes et d'intersection non vide coïncident : si m est dans leur intersection, alors m est de la forme $m = x_1(t_1) = x_2(t_2)$. En outre, les fonctions $t \rightarrow x_1(t)$ et $t \rightarrow x_2(t + t_2 - t_1)$ vérifient l'ÉD $x' = f(x)$ et les mêmes conditions initiales de Cauchy : $x_2(t_1 + t_2 - t_1) = x_2(t_2) = x_1(t_1)$. Ainsi l'unicité de C-L donne l'égalité $x_1(t) = x_2(t + t_2 - t_1)$ pour $t \in \mathbb{R}$, ce qui implique l'égalité des trajectoires \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 . On a donc montré le lemme

LEMME 1.1: Soit $x' = f(x)$ un système autonome avec des trajectoires définies sur \mathbb{R} . Alors deux trajectoires distinctes ne s'intersectent pas.

2. Le tracé de portraits de phase vaut pour les systèmes autonomes $(x, y)' = F(x, y)$ d'ordre 1 dans la plan \mathbb{R}^2 , en particulier des ÉD scalaires d'ordre 2 autonomes $x'' = G(x, x')$ donnant $(x', y)' = (y, G(x, y))$. Pour une équation d'ordre 1 $(H_1)x'(t) = H(x(t), t)$, le portrait de phase de l'ÉD autonome $(x, s)' = (H(x(s), s), 1)$ dans le plan \mathbb{R}^2 n'est rien d'autre que l'ensemble des graphes des solutions $t \rightarrow x(t)$ de l'ÉD (H_1) .
3. Si pour le système autonome $x' = f(x)$ le vecteur $f(x_0)$ n'est pas nul, alors le portrait de phase au voisinage de x_0 est celui associé à l'ÉD $x' = f(x_0)$ de solution $x_\ell(t; x(t_0) = x_0) = x_0 + f(x_0)(t - t_0)$ au sens suivant : il existe des voisinages U de x_0 , V de 0 et un difféomorphisme H de U sur V tel que $H(x(t; x_0)) = x_\ell(t; H(x_0))$. Ainsi, c'est au voisinage de points d'équilibre x_e que l'analyse locale de l'ÉD $f(x_e) = 0$ est difficile. à compléter ∇

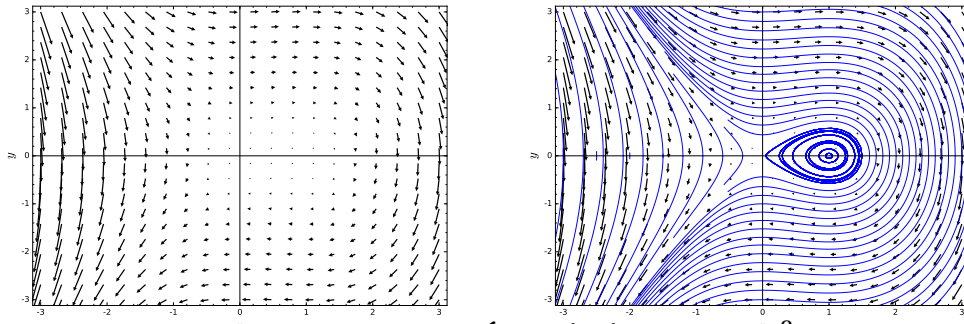


FIGURE I.4 – Champ des vitesses pour l'ÉD $(x', y') = (y, x - x^2)$ (provenant de l'ÉD d'ordre 2 $x'' = x - x^2$) et quelques trajectoires du portrait de phase. La fonction $3y^2 + 2x^3 - 3x^2$ est constante sur chaque trajectoire de ce système différentiel : il est hamiltonien, avec pour hamiltonien $H(x, y) = y^2/2 + x^3/3 - x^2/2$.

À la fonction (scalaire) x solution de l'ÉD $x'(t) = f(x(t), t)$ est associée la courbe plane paramétrée suivant $P_{\mathcal{C}_x} : t \in I \mapsto (t, x(t)) \in \mathbb{R}^2$: le scalaire $x'(t) = f(x, t)$ représente la pente de la tangente à la courbe \mathcal{C}_x au point $(t, x) \in \mathbb{R}^2$: on a donc un champ de pentes $(t, x) \mapsto f(x, t)$ à intégrer, *i. e.* chercher la solution $t \mapsto x(t)$ tel que $x'(t) = f(x(t), t)$.

Pour une ÉD autonome générale¹² $X' = F(X)$, la fonction F définit un champ de vecteurs $X \in \mathbb{R}^2 \mapsto F(X) \in \mathbb{R}^2$: chercher les solutions de l'ÉD revient à tracer les courbes tangentes en tout point à ce champ de vecteurs. Si on normalise le champ de vecteurs en considérant $F(X)/\|F(X)\|$ (en dehors des PÉ), on a un champ de directions.

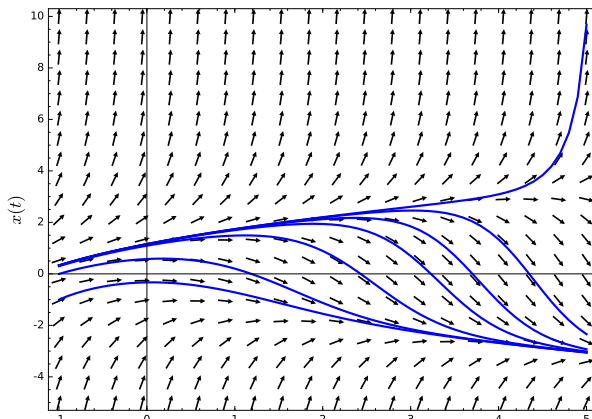


FIGURE I.5 – Champ de directions pour l'ÉD $x'(t) = x(t)^2/2 - t$ dans le pavé $[-1, 5] \times [-5, 10]$ et quelques trajectoires. Il semble que les trajectoires s'accroissent asymptotiquement sur les deux branches de la parabole $x^2 = 2t$.

DÉFINITION 1.6: Une ÉD est dite linéaire d'ordre n si elle s'écrit

$$a_0(t)x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = g(t) \quad (1.4)$$

Le terme $g(t)$ (au signe près) est appelé le second membre de l'ÉD linéaire.

L'ÉD linéaire [ÉDL] est dite homogène (ou sans second membre) si le terme g est nul. Si les coefficients $a_i/a_0, i = 1, \dots, n$ sont constants, l'ÉDL est dite à coefficients constants : une telle équation, considérée comme un système différentiel d'ordre 1, est alors autonome.

▷ EXEMPLES 1.5:

- 1.5.1 L'ÉD $y' = 2y + 3$ est linéaire à coefficients constants. Elle est résoluble avec solution $x_C(t) = Ce^{2t} - 3/2$.
- 1.5.2 l'ÉD $y' + 2y/t + 4t$ est linéaire à coefficients non constants, sa solution a priori est définie seulement sur \mathbb{R}^* . Elle a comme solution $(t^4 - C)/t^2$.
- 1.5.3 L'équation $y' = -2/y$ n'est pas linéaire. Ses solutions vérifient $y(t)^2/4 = C - 4t$ avec une certaine constante C : son intégration complète n'est pas immédiate. ◀

△ REMARQUES 1.4:

12. Pour simplifier, on suppose ici que F est définie sur \mathbb{R}^2 tout entier.

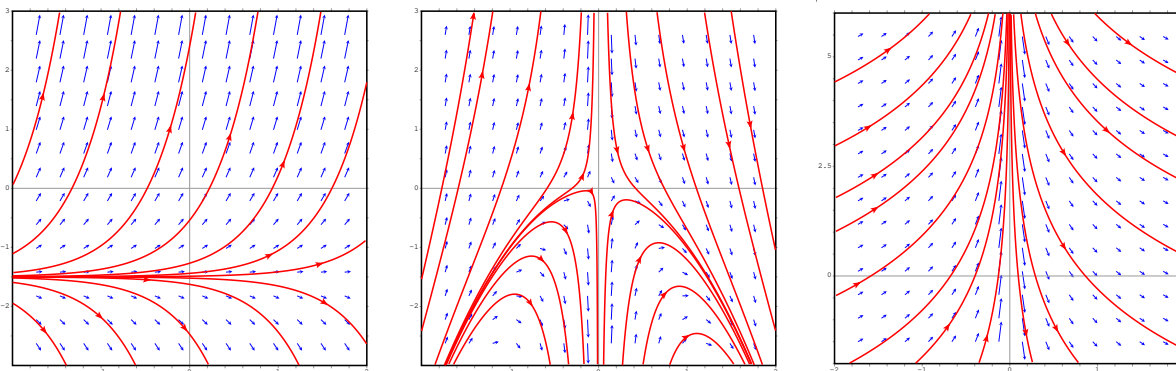


FIGURE I.6 – Portrait de phase de l'ÉD linéaire à coefficients constants $x' = 2x + 3$, d'une ÉD linéaire $x' + 2x/t + 4t = 0$ et d'une ÉD non linéaire $x' - 2/x = 0$.

1. L'espace des solutions d'une ÉD linéaire homogène (resp. avec second membre) est un sous-espace vectoriel (resp. affine) de l'espace des fonctions définies sur $\{t | a_0(t) \neq 0\}$.
2. Il faut prendre garde à la partie $a_0^{-1}(\{0\})$: par ex. si $a_0(t) = t \in \mathbb{R}$, les études de l'ÉD $tx''(t) + a(t)x(t) + b(t) = 0$ sur \mathbb{R}^* et sur \mathbb{R} peuvent s'avérer très différentes. On notera par Ω la partie de \mathbb{R}^{n+1} où la fonction $(t, x) \mapsto F(x, t)$ est définie et de classe \mathcal{C}^1 : cela sera souvent \mathbb{R}^{n+1} tout entier, voire de la forme $\Omega_1 \times \mathbb{R}^n$ avec \mathbb{R} privé d'un nombre fini de points. ▽

1.3 Stabilité

La notion de point d'équilibre a été introduite dans certains exemples :

DÉFINITION 1.7: Soit $F : \Omega (\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Le point $x_e \in \Omega$ est un point d'équilibre [PÉ] si $F(x_e) = 0$.

L'ÉD gouvernant l'évolution d'un modèle économique en fonction des prix (par exemple un marché en concurrence avec des biens, des fonctions de demande $D(p)$ et d'offre $O(p)$ dépendant des prix des biens) est rarement explicitement résoluble, même si l'existence d'un équilibre (par exemple l'équilibre général introduit par Walras) est établi. La notion d'équilibre est empruntée à la physique : un système est à l'équilibre s'il atteint une situation de laquelle il ne s'écarte pas : en termes mathématiques, cette atteinte de l'équilibre est asymptotique, *i. e.* l'état du système converge (sans l'atteindre en un temps fini) vers l'état d'équilibre. L'étude qualitative des solutions donne malgré tout des informations, notamment l'existence d'un équilibre (dans notre exemple, il s'agit d'un ensemble de prix p_e tels que la demande et l'offre sont égaux). Si on perturbe ce vecteur de prix et le modèle (goûts des clients, techniques de production et répartition, ...), l'évolution temporelle va-t-elle converger vers p_e ? Si oui, on dira que le PÉ est *asymptotiquement stable*. Si une petite perturbation laisse le système en fin de durée de vie au voisinage du PÉ, on dira que le

système est *stable*. Ces stabilités représentent une propriété importante de la dynamique. On peut se limiter à des perturbations des conditions initiales (stabilité à la Liapounov) ou à des situations où sont autorisées des perturbations de l'ÉD même (stabilité structurelle) : la première situation sera celle principalement étudiée ici.

▷ EXEMPLES 1.6:

1.6.1 Considérons les deux PC en temps $t_0 = 0$

$$\begin{aligned}x' &= 3x - 1, & x_0 &= \frac{1}{3} \\y' &= -150y + 50, & y_0 &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

et leurs perturbations par un petit paramètre ε

$$\begin{aligned}x' &= 3x - 1, & x_0 &= \frac{1}{3} + \varepsilon \\y' &= -150y + 50, & y_0 &= \frac{1}{3} + \varepsilon.\end{aligned}$$

avec solutions

$$\begin{aligned}x_\varepsilon(t) &= \frac{1}{3} + \varepsilon e^{3t} \\y_\varepsilon(t) &= \frac{1}{3} + \varepsilon e^{-150t}.\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions pour $\varepsilon = 0$ sont constantes, avec comme valeur commune $1/3$, alors que pour $\varepsilon > 0$ on a aux temps $t = 1$ et $t = 10$

$$\begin{aligned}x_\varepsilon(1) &= \frac{1}{3} + \varepsilon e^3, & x_\varepsilon(10) &= \frac{1}{3} + \varepsilon e^{30} \\y_\varepsilon(1) &= \frac{1}{3} + \varepsilon e^{-150}, & y_\varepsilon(10) &= \frac{1}{3} + \varepsilon e^{-1500}\end{aligned}$$

La perturbation incarnée par le petit paramètre ε dans la condition initiale a des effets très contrastés sur les valeurs au temps $t = 1$ et $t = 10$, en fait sur l'évolution $t \rightarrow +\infty$: dans le premier cas, $x_\varepsilon(1)$ et $x_\varepsilon(10)$ divergent exponentiellement, dans le second il y a convergence exponentiellement rapide, signe de la stabilité asymptotique.

Cet exemple illustre bien comment la sensibilité aux variations de paramètre ε est liée à la stabilité asymptotique des solutions.

1.6.2 Un autre exemple est donné par le PC

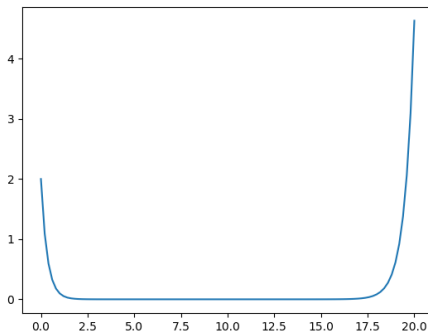
$$x'' + x - 6x = 0, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = -6.$$

L'ÉD linéaire $x'' + x - 6x = 0$ a comme exposants caractéristiques 2 et -3 . Il est aisé de vérifier que l'unique solution de ce PC est

$$x(t) = 2e^{-3t} + 0 \times e^{2t}.$$

À chaque itération, il y a approximativement une erreur de 2^{-b} , soit l'apparition d'un terme $2^{-b}e^{2t}$ dans la solution, avec valeur 1 lorsque T de l'ordre de $T = b \ln 2 / 2 \approx 0.36 \times b$. Ainsi b est de l'ordre de $b \approx 0.36^{-1} \times 17 \approx 51$.

La courbe $t \mapsto x(t)$ est plate sur $[0, 17]$ environ, correspondant bien à la décroissance exponentielle de la solution $2e^{-3t}$, avec décrochement à $t = 17$, où le terme e^{2t} resurgit. On a donc une erreur dans laquelle on peut lire l'erreur initiale (et persistente) 2^{-b} . \triangleleft



```
1.6.3 import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint

# u'' + u' - 6*u = 0
def f(uu, t):
    [u, v] = uu
    return [v, -v + 6*u]

y = odeint(f, [2, -6], np.linspace(0, 20, 100))
plt.plot(t, y[:, 0])
plt.show()
```

FIGURE I.7 – La courbe solution du PC et son décrochement en $t = 17$. Le code a été exécuté en python, avec appel aux bibliothèques numpy, matplotlib et la fonction odeint.

DÉFINITION 1.8: Soit l'ÉD $x' = f(x)$ sur un ouvert E de \mathbb{R}^d .

Le PÉ x_e est stable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x_0 dans la boule $B(x_e, \eta)$, le PC de condition initiale $x(t_0) = x_0$ a une solution x_0 définie sur $[t_0, +\infty)$, dont la trajectoire $x_0(t_0 + \mathbb{R}^+)$ reste dans la boule $B(x_e, \varepsilon)$.

Le PÉ x_e est asymptotiquement stable si x_e est stable et s'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x_0 dans la boule $B(x_e, \eta)$, la solution du PC $x' = f(x)$ de condition initiale $x(t_0) = x_0$ converge vers x_e lorsque $t \rightarrow \infty$.

L'ensemble de stabilité $S(x_e)$ (dit encore bassin d'attraction) est la partie de E contenant les x_0 tel que la solution du PC $x' = f(x)$, $x(t_0) = x_0$ soit définie sur $[t_0, +\infty)$ et converge vers x_e lorsque $t \rightarrow +\infty$.

\triangle REMARQUE 1.5: La notion d'instabilité d'une PÉ est diversement formulée, nous nous abstenons de l'employer ici. Cela peut-être la non stabilité, la stabilité une fois l'inversion du temps opérée, une des notions précédentes pour certaines trajectoires, ... ∇

Sur un portrait de phase, un PÉ apparaît comme une trajectoire réduite à un point. Pour l'ÉD $x' = f(x, t)$, son ÉD autonome $(t, x)' = (1, f(x, t))$ associée sur $\mathbb{R} \times E$ (un ouvert du plan si x est scalaire) est sans PÉ : néanmoins, si l'ÉD scalaire (E_1) est autonome, un PÉ x_e de (E_1) détermine une trajectoire $\mathbb{R} \times \{x_e\}$ horizontale.

▷ EXEMPLES 1.7:

1.7.1 Soit L'ÉD linéaire à coefficients constants $x' = Ax + B$. Si A est inversible, il n'y a qu'un PÉ $X_e = -A^{-1}B$. Suivant les propriétés spectrales de A , il est possible de classifier les divers portraits de phase, l'étude en sera faite au troisième chapitre, où un critère de stabilité sera énoncé en termes de parties réelles de valeurs propres.

1.7.2 Déjà considérée dans la liste d'exemples 1.2, l'ÉD logistique $x' = x - x^2$ a deux PÉ, 0 et 1, avec comme parties de stabilité $S(1) = (0, +\infty)$ et $S(0) = \{0\}$, les trajectoires issues des points de \mathbb{R}^- ayant une durée de vie limitée dans l'avenir. Ces propriétés sont établies à partir de la forme explicite (cf. exemples 1.2) des solutions

$$t \in \mathbb{R} \mapsto x(t) = x_0(x_0(1 - e^{t_0-t}) + e^{t_0-t})^{-1} = x_0(x_0 + (1 - x_0)e^{t_0-t})^{-1},$$

Elles sont heuristiquement déduites des sens de variation de x sur le portrait

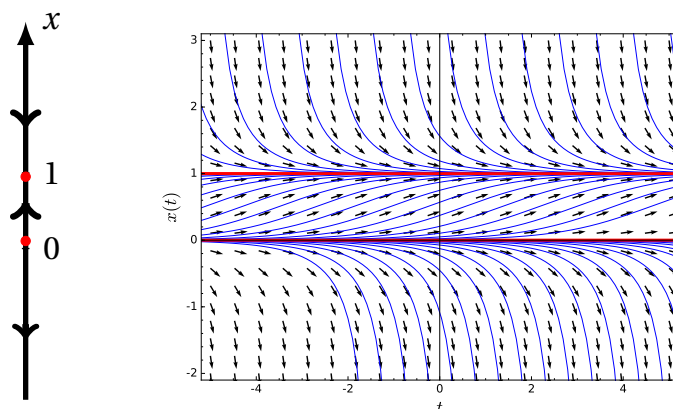


FIGURE I.8 – ÉD scalaire dite *logistique*: $x' = x - x^2$. Son portrait des phases 1d avec ses PÉ et le sens de variation des solutions, puis le champ des vitesses pour l'ÉD, complété par le graphe des solutions.

de phase (une droite) : les trajectoires sont dans un des trois intervalles de $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, croissante dans l'intervalle central, décroissante sinon ; une trajectoire dans l'intervalle central est croît de 0 à 1 sans explosion possible. Pour les trajectoires dans les autres intervalles, il y a convergence vers les bornes finies (si $x_0 > 1$, $x(t) \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow +\infty$; si $x_0 < 0$, $x(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$) l'explosion ayant lieu vers dans les autres cas (par exemple, pour la trajectoire de la solution $t \mapsto x_0(t)$ avec conditions initiales $x(t_0 = 0)x_0 > 1$, on a $x_0(t) \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow \ln(x_0/(1 - x_0))^+$).

1.7.3 Le modèle de Lotka¹³-Volterra¹⁴ modélise au plus simple l'interaction de

13. Alfred James Lotka, 2 mars 1880 (Lemberg en Autriche-Hongrie, aujourd'hui Lviv, Ukraine) – 5 décembre 1949 (New-York).

14. Vito Volterra, 3 mai 1860 (Ancône, les Marches) – 11 octobre 1940 à Rome.

deux espèces (x proie et y prédateur) par le système différentiel autonome

$$x' = x(a - by), y' = y(cx - d)$$

dans le quadrant $x > 0, y > 0$, pour des paramètres positifs a, b, c, d convenables.

Le nombre x de proies croît exponentiellement si les proies sont isolées des prédateurs : le taux de croissance x' (proportionnel à la population) donne le premier terme ax dans l'ÉD. L'action des prédateurs est modélisée par un taux négatif, proportionnel au nombre de proies : c'est le terme $-bxy$. Pour le nombre y de prédateurs, il a tendance à décroître si la population de prédateurs est isolée (et sans proie), d'où le terme $-dy$ dans l'ÉD.

Un changement d'échelle sur chaque fonction ($X = cx, Y = by$) ramène au système

$$X' = X(a - Y), Y' = Y(X - d). \quad (1.5)$$

La famille des champs de Lotka-Volterra dépend en fait de deux paramètres. Ce système dans le premier quadrant est issu de la modélisation du système prédateurs/proies. Cependant, on peut le considérer dans tout le plan.

Dans le quadrant positif $\mathbb{O}^2 = (\mathbb{R}_*^+)^2$, l'ÉD n'a qu'un seul PÉ $x_e = (d, a)$. Dans \mathbb{R}^2 , il n'y en a qu'un seul autre, l'origine $(0, 0)$.

En sus des trajectoires stationnaires associées aux PÉ, les demi-axes sont des trajectoires maximales (et globales) du système (1.5). En effet, par exemple pour le demi-axe $\{0\} \times \mathbb{R}^{+*}$ et $y_0 < 0$, la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto y_0 e^{-dt} \in \mathbb{R}^-$ est la solution maximale du PC (scalaire) $y' = -dy$ avec $y(t_0) = y_0$ et induit la solution maximale $t \in \mathbb{R} \rightarrow (0, y_0 e^{-dt})$ du PC (1.5) avec condition initiale $(0, y_0)$ (il suffit d'insérer cette fonction dans (1.5)).

En outre, toute trajectoire T_{X_0} démarrant en $X_0 = (x_0, y_0)$ dans l'intérieur Q d'un des quatre quadrants (complémentaire des demi-axes et de l'origine qui est stationnaire) est complètement incluse dans ce quadrant. Sinon, la trajectoire T_{X_0} intersecterait le bord du quadrant Q , soit un demi-axe A_a (ou l'origine qui est un PÉ) en un point X_a : deux trajectoires ne peuvent s'intersecter, à moins d'être égales (c'est un corollaire de l'unicité de C-L), la trajectoire T_{X_0} serait identique au demi-axe A_a , ce qui n'est pas possible! \triangleleft

1.4 Problème de Cauchy

DÉFINITION 1.9: Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^{n+1} et $F = \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Un problème de Cauchy [PC] est la donnée d'une ÉD $X'(t) = f(X(t), t)$ avec une condition initiale $X_0 \in \mathbb{R}^n$ au temps initial $t_0 \in I$. Résoudre le PC

$$X'(t) = f(X(t), t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (1.6)$$

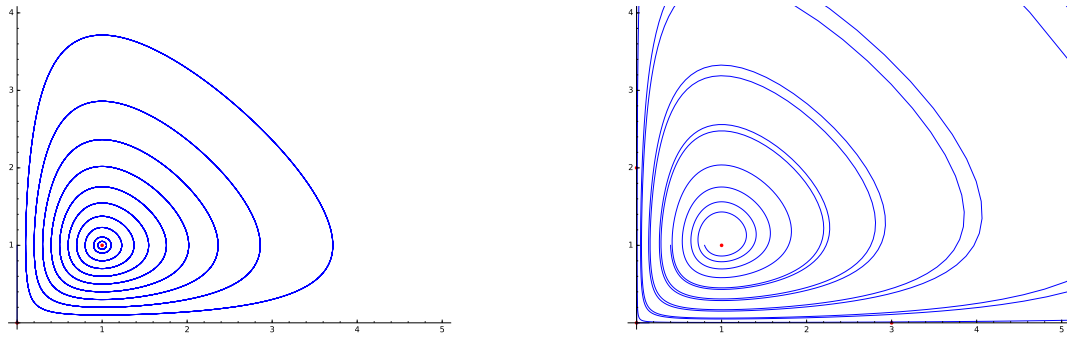


FIGURE I.9 – Le portrait de phase dans le quadrant positif du système de Lotka-Volterra $(x', y') = V(x, y)$ avec $V(x, y) = (x(1 - y), y(x - 1))$ (trajectoires périodiques) et de sa perturbation $V_+(x, y) = V(x, y) + (a * x^2, 0)$ avec ici $a = 1/10$ (trajectoires spiralant).

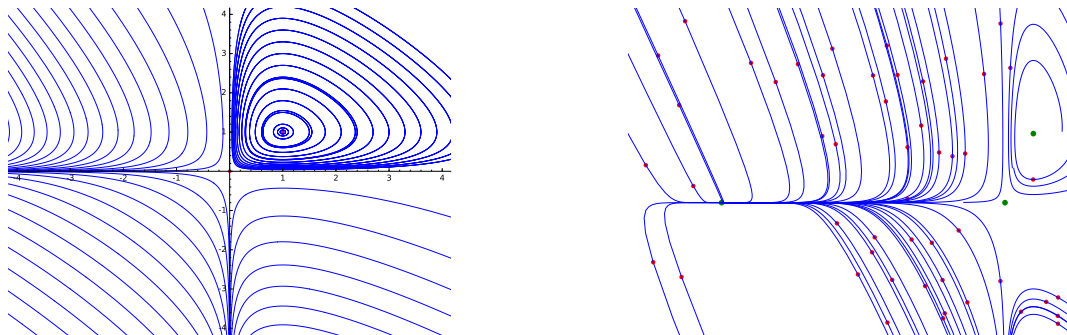


FIGURE I.10 – Le portrait de phase du système de Lotka-Volterra dans le plan (2 PÉ : $(0, 0), (1, 1)$) et celui de sa perturbation (3 PÉ : $(0, 0), (1, 11/10), (-10, 0)$).

c'est établir l'existence d'un intervalle I contenant t_0 , d'une fonction $X : t \in I \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^n$ définie et dérivable sur I telle que $X(t_0) = X_0$ et $X'(t) = F(X(t), t)$ pour tout $t \in I$.

▷ EXEMPLE 1.8: Le PC $x' = ax + b$ et $x(t_0) = x_0$ a pour unique solution (définie sur \mathbb{R}) la fonction $t \mapsto (x_0 + b/a)e^{a(t-t_0)} - b/a$. ◁

Le théorème suivant exprime l'existence de la solution (locale) et son unicité.

THÉORÈME 1.1 (Cauchy-Lipschitz): Soit $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe¹⁵ \mathcal{C}^1 . Alors pour $(x_*, t_0) \in \Omega \times \mathbb{R}$, il existe $\delta > 0$ tel que le PC

$$x'(t) = F(x(t), t), \quad x(t_0) = x_0$$

avec x_0 dans la boule $B(x_*, \delta)$, admette une unique solution $x : t \in (-\delta + t_0, t_0 + \delta) \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$.

15. Le théorème est aussi valable pour des régularités moindres pour des ÉD $x'(t) = f(t, x(t)) : f$ continue et lipschitzienne en la variable x . Sauf mention du contraire, on supposera néanmoins f toujours de classe \mathcal{C}^1 , ou même \mathcal{C}^∞ .

Reprenons les exemples précédents :

▷ EXEMPLES 1.9:

$$1.9.1 \quad x'(t) = f(t), x(t_0) = x_0 : x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s) ds$$

$$1.9.2 \quad x' = ax + b, x(t_0) = x_0 : x(t) = -b/a + (x_0 + b/a)e^{a(t-t_0)}.$$

1.9.3 $x' = x^2, x(t_0) = 0 : x \equiv 0$: c'est l'unique solution qui est nulle au moins en un point.

1.9.4 $x' = x^2, x(t_0) = x_0$: une solution, différente de la solution identiquement nulle précédente, ne peut s'annuler (cela violerait l'unicité de la solution assurée par le théorème de C-L (cf. le lemme 1.1¹⁶). On peut donc diviser par $x(t)$ et obtenir $(x(t)^{-1})' = -1$ d'où $x(t)^{-1} - x_0^{-1} = t_0 - t$ soit

$$x(t) = \frac{x_0}{1 + x_0(t_0 - t)}$$

défini pour $t \in (-\infty, t_0 + x_0^{-1})$ si $x_0 > 0$, pour $t \in (t_0 + x_0^{-1}, +\infty)$ si $x_0 < 0$.

1.9.5 L'ÉD $x'(t) = 2\sqrt{x(t)}$ a, outre la fonction nulle, comme solution la fonction x_C dépendant du paramètre C telle que

$$x_C(t) = \begin{cases} (t-C)^2 & \text{si } t \in [C, +\infty) \\ 0 & \text{si } t \leq C \end{cases}$$

L'unicité de C-L n'a pas lieu.

1.9.6 Soit $f(x) = 1 + \chi_{\mathbb{R}^+}$, i. e. $f(x) = 2$ si $x \geq 0$ et $f(x) = 1$ si $x < 0$. Cette fonction f n'est pas Lipschitz. Néanmoins les solutions avec condition initiale $x(t=0) = x_0$ sont uniques : on a toujours $f(x) > 0$ et alors x est croissante. Si $x_0 \geq 0$, alors

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + 2t & \text{si } t \geq -x_0/2 \\ x_0/2 + t & \text{si } t \leq -x_0/2 \end{cases}$$

et si $x_0 \leq 0$, alors

$$x(t) = \begin{cases} 2(x_0 + t) & \text{si } t \geq -x_0 \\ x_0 + t & \text{si } t \leq -x_0 \end{cases}$$

Mais la fonction x n'est pas dérivable partout!

1.9.7 Le PC $x' = \sqrt{|x|}, x(0) = 0$ a comme solutions la fonction identiquement nulle d'une part, l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto t|t|$ d'autre part.

1.9.8 Le PC $x' = 3|x|^{2/3}, x(0) = 0$ a comme solutions la fonction identiquement nulle d'une part, l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto t^3$ d'autre part.

1.9.9 Pour l'ÉD $x'(t) = F(t, x(t))$ avec F supposée \mathcal{C}^1 et aux solutions du PC définies sur \mathbb{R} tout entier, la solution définie vers le passé

$$t \in \mathbb{R}^+ \mapsto x(-t, x(0) = x_0)$$

16. Le lemme présume que les trajectoires sont toutes deux globales. En fait, la preuve n'utilise que l'existence d'une trajectoire complète, ici celle déterminée par le PÉ.

coïncide avec la solution vers le futur ($t \rightarrow +\infty$) pour le PC

$$y' = -F(-t, y), \quad y(0) = x_0.$$

En effet

$$\frac{d}{dt}[x(-t, x(0) = x_0)] = -x'(-t, x(0) = x_0) = -F(-t, x(-t, x(0) = x_0)),$$

et donc $t \mapsto x(-t)$ est l'unique solution du PC $y'(t) = -F(-t, y(t, y(0) = x_0))$ avec condition initiale $y(0) = x_0$. \triangleleft

DÉMONSTRATION (*Esquisse*). La preuve standard de l'existence étudie l'équation intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(x(s), s) ds$$

équivalente au PC et dont la solution est montrée être la limite du processus itératif défini par récurrence dans un espace fonctionnel convenable

$$u_0 \equiv x_0 \quad \text{et} \quad u_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(u_k(s), s) ds, \quad k \geq 0.$$

On peut aussi considérer, comme Euler¹⁷ le fit, que l'ÉD donne une approximation linéaire $x(t) \simeq x(t_0) + (t - t_0)x'(t_0) = x(t_0) + (t - t_0)F(x(t_0), t_0)$ au voisinage de t_0 et donc que la famille de fonctions x_ε construite par récurrence

$$x_\varepsilon(t_0) = x_0$$

$$x_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t_0 + k\varepsilon) + (t - t_0 - k\varepsilon)F(x_\varepsilon(t_0 + k\varepsilon), t_0) \text{ si } t \in [t_0 + k\varepsilon, t_0 + (k+1)\varepsilon] \text{ et } k \geq 0$$

converge lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ (à nouveau en précisant l'espace fonctionnel approprié). \square

1.5 Solution maximale et explosion

Si (I_1, x_1) et (I_2, x_2) sont solution du PC (1.6) (f supposée régulière, *i. e.* de classe \mathcal{C}^1), alors l'unicité de C-L exprime que l'on peut prolonger ces deux solutions en une solution (I, x) avec $I = I_1 \cup I_2$. En effet, supposons $I_1 = [t_0, t_1)$ et $I_2 = [t_0, t_2)$ avec $t_1 < t_2$: par unicité de C-L et en considérant t_+ la borne supérieure des $t \in [t_0, t_1)$ tels que x_1 et x_2 coïncident sur $[t_0, t)$, C-L assure que $t_+ = t_1$ et que la restriction de x_2 à I_1 coïncide avec x_1 et donc que x_2 est un prolongement (unique) de x_1 à I_2 .

Cette remarque permet de définir le concept de solution maximale.

17. Leonhard Euler, 15 avril 1707 (Bâle, Suisse) – $\frac{7}{18}$ septembre 1783 (Saint-Pétersbourg, Empire russe).

DÉFINITION 1.10: La solution $x : t \in I \mapsto x(t)$ est dite maximale si elle est définie sur $I = (t_-, t_+)$, sans qu'il n'y ait un intervalle strictement plus grand contenant (t_-, t_+) où la solution x se prolonge.

La solution est dite globale si c'est une solution maximale définie sur \mathbb{R} tout entier. Un système autonome est dit complet si toutes ses trajectoires sont globales.

Δ REMARQUE 1.6: Pour un système autonome complet, ses trajectoires sont invariantes par changement de temps en translation, *i. e.* si $x : t \in \mathbb{R} \mapsto x(t)$ est une solution déterminant la trajectoire \mathcal{T}_x , alors $x_\tau : t \in \mathbb{R} \mapsto x(t + \tau)$ est aussi une solution, qui détermine la même trajectoire, en vertu de l'unicité du théorème 1.1. On a donc le lemme suivant, qui dit que les trajectoires d'un système autonome complet dans l'espace E forment une partition de l'espace E . ∇

THÉORÈME 1.2: Le PC $x'(t) = f(x(t), t)$, $x(t_0) = x_0$ admet une unique solution maximale $x : t \in (t_-, t_+) \mapsto x(t) \in \Omega$. Tout autre solution satisfaisant cette condition initiale est une restriction de $x : (t_-, t_+) \rightarrow \mathbb{R}$ à un sous-intervalle de (t_-, t_+) .

L'intervalle (t_-, t_+) exprime la durée de vie de la solution : elle est infinie (dans le futur, dans le passé ou les deux) ou finie. En temps fini dans l'avenir (*i. e.* $t_+ < +\infty$), il y a une explosion de la solution, *i. e.* $\|x(t)\| \rightarrow \infty$, ou bien la solution atteint le bord de l'ouvert Ω où est définie la fonction F (ou ses succédanées).

DÉMONSTRATION. Considérons l'ensemble des solutions $x_I : t \in [t_0, t_I] \mapsto x(t) \in \Omega$ du PC $x' = F(x)$, $x(t_0) = x_0$. Par unicité locale, si $t_I \leq t_J$, x_I se prolonge de manière unique en x_J . Si $t_+ = \sup_{x_I} t_I$, alors on peut construire une solution $x_+ : t \in [t_0, t_+) \mapsto x_+(t)$, qui est nécessairement maximale. \square

\triangleright EXEMPLES 1.10:

1.10.1 La solution maximale de $x' = -x^2$, $x(0) = x_0$ est $x(t) = x_0 / (tx_0 + 1)$. L'intervalle de la solution maximale est $(-x_0^{-1}, +\infty)$ si $x_0 > 0$, $(-\infty, -x_0^{-1})$ si $x_0 < 0$ et \mathbb{R} tout entier pour $x_0 = 0$.

1.10.2 L'ÉD $x'(t) = 1$, $x(0) = x_0$ dans l'ouvert $(0, 1)$ se résout suivant $x(t) = x_0 + t$ avec intervalle maximal $(-x_0, -x_0 + 1)$.

1.10.3 L'ÉD séparable $x' = 1 + x^2$ se résout suivant

$$\frac{dx}{1+x^2} = dt, \quad \int_{x_0}^x \frac{du}{1+u^2} = t - t_0$$

soit $\arctg x - \arctg x_0 = t - t_0$ et $x(t) = \tan(t - t_0 + \arctg x_0)$ et donc l'intervalle de vie

$$J(x_0) = t_0 - \arctg x_0 + (-\pi/2, \pi/2).$$

\triangleleft

La proposition suivante a une preuve analogue à celle qui la suit.

PROPOSITION 1.1: Soit $x : t \in (t_-, t_+) \mapsto x(t)$ une solution maximale. Alors, si $t_+ < +\infty$, $x(t)$ sort de tout compact, i. e. pour tout compact K , il existe un temps $t_K \in (t_-, t_+)$ tel que $x(t_K) \notin K$.

a une preuve similaire à la proposition suivante :

PROPOSITION 1.2: Soit $f : (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 . Soit $x : t \in (t_-, t_+) \mapsto x(t)$ une solution maximale de l'ÉD $x'(t) = f(x(t), t)$ telle que t_+ soit fini. Alors $\|x(t)\|$ tend vers $+\infty$ lorsque $t \rightarrow t_+$.

DÉMONSTRATION. Supposons que la conclusion de cette proposition ne vaille pas. Soit x_∞ un point d'adhérence (on dit point limite) de l'image par x de l'intervalle $[(t_- + t_+)/2, t_+)$, i. e. il existe $t_k \rightarrow t_+$ avec $x(t_k) \rightarrow x_\infty$. D'après le théorème 1.1 de Cauchy-Lipschitz il existe un $\delta > 0$ tel que le PC $x'(t) = f(x(t), t), x(0) = x_0 \in B_\infty$ ait une solution unique définie sur $(-2\delta, 2\delta)$ avec condition initiale x_0 dans la boule centrée en x_∞ et de rayon δ . Soit un entier k_0 tel que $x(t_{k_0})$ soit dans la boule B_∞ et $t_+ - t_{k_0} < \delta/2$, soit $t_{k_0} > t_+ - \delta/2$. On peut alors raccrocher en $x(t_{k_0})$ la solution supposée maximale x à la solution passant par $x(t_{k_0})$ de durée de vie au moins δ obtenant ainsi une solution définie jusqu'au temps

$$t_{k_0} + \delta > t_+ - \delta/2 + \delta = t_+ + \delta/2,$$

bien au-delà de t_+ , ce qui contredit le caractère maximal de la solution $x : t \in (t_-, t_+) \mapsto x(t)$ et achève la démonstration de la proposition. \square

\triangle REMARQUE 1.7: Les phénomènes d'explosion peuvent réapparaître dans les calculs numériques inévitables quand l'ÉD ne peut être résolue en termes de fonctions classiques, comme par exemple dans [1]. ∇

La proposition suivante (démontrée comme corollaire de l'inégalité de Grönwall ci-dessous) donne une condition suffisante pour des trajectoires globales.

PROPOSITION 1.3: Soit $F : x \in \mathbb{R}^n \mapsto F(x) \in \mathbb{R}^n$. Si, pour des α, β réels convenables, F vérifie la majoration affine

$$\|F(x)\| \leq \alpha \|x\| + \beta, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

alors l'ÉD $x'(t) = F(x(t))$ admet une solution globale.

Cette proposition (et d'autres versions plus générales avec un Ω) s'applique notamment aux équations linéaires $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ où $t \mapsto A(t)$ est à valeurs dans l'espace des matrices carrées d'ordre n et $t \mapsto B(t) \in \mathbb{R}^n$.

1.6 Inégalités de Grönwall

Grönwall a initié l'étude de solutions d'inégalités différentielles. Ces estimations (dites *a priori*, insistant ainsi sur l'existence pas nécessairement établie de la fonction considérée) permettent de contrôler la divergence (et exclure des phénomènes

d'explosion) des solutions de l'ÉD : solutions avec conditions initiales proches, interdiction d'explosion pour les équations linéaires. Ainsi, pour x vérifiant une inégalité différentielle adaptée, la croissance de y est contrôlée par une fonction la taille de y qui vérifie l'égalité différentielle associée à l'inégalité différentielle.

Par exemple, la proposition 1.6 ci-dessous déduit la majoration de la distance $\|z = x_2 - x_1\|$ entre deux solutions par la solution de l'ÉD linéaire associée à l'inégalité différentielle $(\|z\|)' \leq \alpha\|z\| + \varepsilon$.

PROPOSITION 1.4: Soit $I = [t_0, t_1[$, $g : \mathbb{R}^+ \times I \rightarrow \mathbb{R}$ et ρ une solution de $y' = g(y, t)$. Soit $\gamma : [t_0, t_1[\rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$\|\gamma(t_0)\| = \rho(t_0), \quad \|\gamma'(t)\| < g(\|\gamma(t)\|), \quad t \in [t_0, t_1[$$

Alors, on a

$$\|\gamma(t)\| < \rho(t), \quad t \in]t_0, t_1[. \quad (1.7)$$

△ REMARQUE 1.8: Ce lemme établit une estimation (majoration en l'occurrence) : on peut l'utiliser pour une solution x qui vérifie l'ÉD $x'(t) = f(x(t), t)$. On retiendra que ce lemme assure qu'une solution de l'ÉD $x'(t) = f(x, t)$ est majorée par la solution de l'inéquation différentielle scalaire $y'(t) = g(y, t)$ majorant cette dernière ÉD. ▽

DÉMONSTRATION. Pour alléger la rédaction, on considère la situation autonome où f ne dépend pas de t : le cas non autonome est développé de la même manière. Un développement limité en t_0 permet d'écrire

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0) + o(t - t_0), \quad t > t_0$$

soit, pour $t > t_0$,

$$\begin{aligned} \|\gamma(t)\| &\leq \|\gamma(t_0)\| + (t - t_0)\|\gamma'(t_0)\| + o(t - t_0), \\ \rho(t) &= \rho(t_0) + (t - t_0)g(\rho(t_0)) + o(t - t_0) \end{aligned}$$

La soustraction de la première inégalité à la seconde donne, grâce à l'hypothèse $\rho(t_0) = \|\gamma(t_0)\|$,

$$\begin{aligned} \rho(t) - \|\gamma(t)\| &\geq (t - t_0)[g(\rho(t_0)) - \|\gamma'(t_0)\|] + o(t - t_0) \\ &= (t - t_0)[g(\|\gamma(t_0)\|) - \|\gamma'(t_0)\|] + o(t - t_0), \end{aligned}$$

soit la positivité du membre de droite (vu l'hypothèse), et par suite celle du membre de gauche, pour $t > t_0$ et t suffisamment proche de t_0 , et donc la validité de (1.7) sur un petit intervalle au voisinage $]t_0, t_0 + \varepsilon$.

Si l'estimation (1.7) n'est pas toujours vraie sur $]t_0, t_1[$, il existe une partie non vide $E \subset]t_0, t_1[$ où $\rho(t) = \|\gamma(t)\|$, partie fermée comme l'image réciproque $(\rho - \|\gamma\|)^{-1}\{0\}$ du fermé $\{0\}$. Vu les remarques précédentes, l'infimum de E est distinct de t_0 et donc E atteint son infimum m qui vérifie $m > t_0$. En outre, pour tout $t \in]t_0, m[$

on a $\|\gamma(t)\| < \rho(t)$. En reprenant les développements limités basés en m , on obtient pour $t < m$

$$\gamma(t) = \gamma(m) + (t - m)\gamma'(m) + o(t - m),$$

puis

$$\|\gamma(t)\| \geq \|\gamma(m)\| - \|(t - m)\gamma'(m) + o(t - m)\| = \|\gamma(m)\| - (m - t)\|\gamma'(m)\| + o(t - m),$$

soit, avec

$$\rho(t) = \rho(m) + (t - m)\rho'(m) + o(t - m) = \rho(m) + (t - m)g(\rho(m)) + o(t - m),$$

et l'égalité $\rho(m) = \|\gamma(m)\|$, l'inégalité

$$\begin{aligned} \|\gamma(t)\| - \rho(t) &\geq (m - t)[-\|\gamma'(m)\| + g(\rho(m))] + o(t - m) \\ &= (m - t)[-\|\gamma'(m)\| + g(\|\gamma(m)\|)] + o(t - m), \end{aligned}$$

et donc $\|\gamma(t)\| > \rho(t)$ pour un t assez proche de m par valeurs inférieures, ce qui contredit la définition de m . \square

Comme corollaire, on a une majoration des solutions d'ÉD « linéaires ».

PROPOSITION 1.5: *Soit des réels α, β positifs et $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\|f(x, t)\| \leq \alpha\|x\| + \beta$ pour tout $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$. Soit un intervalle J , $t_0 \in J$ et $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de $x' = f(x, t)$. Alors*

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| e^{\alpha(t-t_0)} + \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha(t-t_0)} - 1), \quad t \in J$$

\triangle REMARQUE 1.9: Dans l'inégalité précédente, on passe à la limite $\alpha \rightarrow 0^+$ pour avoir la formule avec un f borné (i. e. $\alpha = 0$ dans l'hypothèse). ∇

DÉMONSTRATION. On modifie β en $\beta_\varepsilon = \beta + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ pour se placer dans les hypothèses (avec des inégalités strictes) de la proposition précédente, avec

$$\|f(x, t)\| < \alpha\|x\| + \beta_\varepsilon,$$

qui assure de la validité des estimations avec β_ε . La fonction majorante ρ_ε vérifie l'ÉD linéaire scalaire $\rho'_\varepsilon(t) = \alpha\rho_\varepsilon(t) + \beta_\varepsilon$ et vaut donc

$$\rho_\varepsilon(t) = \rho(t_0)e^{\alpha(t-t_0)} + \frac{\beta_\varepsilon}{\alpha}(e^{\alpha(t-t_0)} - 1) = \|x(t_0)\|e^{\alpha(t-t_0)} + \frac{\beta_\varepsilon}{\alpha}(e^{\alpha(t-t_0)} - 1)$$

qui majore donc la norme de la solution $\|x(t)\|$. On conclut pour $t \geq t_0$ en faisant $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Pour l'étude de la solution x sur l'intervalle $[-\infty, t_0]$, il suffit de faire un renversement du temps $t \rightarrow s = 2t_0 - t$, remplaçant la solution x de domaine $] -\infty, t_0]$

par la fonction $y : t \in]t_0, +\infty[\rightarrow x(2t_0 - t)$ de domaine $[t_0, +\infty[$ qui vérifie une ÉD similaire à celle de x

$$y'(t) = -x'(2t_0 - t) = -f(x(2t_0 - t), 2t_0 - t) = -f(y(t), 2t_0 - t), \quad t \in]t_0, \infty[.$$

Ainsi, quitte à remplacer $f : (x, t) \rightarrow f(x, t)$ par $\tilde{f} : (x, t) \rightarrow -f(y, 2t_0 - t)$, le type de résultats établis pour x sur $[t_0, +\infty[$ reste (souvent, et c'est le cas ici) valides aussi pour y sur $[t_0, +\infty[$, et donc aussi pour les solutions x de l'ÉD $x'(t) = f(x(t), t)$ sur $[-\infty, t_0]$. \square

\triangle REMARQUE 1.10: L'estimation de l'écart au temps t entre deux solutions peut paraître optimale : effectivement elle n'est pas améliorable, comme pour l'équation à solutions exponentielles $x' = ax$ où l'inégalité de la proposition 1.5 est en fait une égalité. L'inégalité de Grönwall permet aussi de contrôler des solutions d'ÉD proches, avec des données initiales proches. On maîtrise donc les imprécisions et perturbations des modélisations, mais à un facteur e^{at} exponentiels près : si on désire une approximation à ε près au temps T , il est nécessaire d'avoir comme bornes des états initiaux des estimations de type $C\varepsilon e^{-aT}$, ce qui est très exigeant! ∇

PROPOSITION 1.6: Soit, pour $j = 1, 2$, $F_j : (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow F_j(x, t) \in \mathbb{R}^n$ telles que

$$\|F_j(x, t) - F_j(y, t)\| \leq \alpha \|x - y\|, \quad \|F_1(x, t) - F_2(x, t)\| \leq \varepsilon.$$

Soient x_j des solutions du PC $x_j' = F_j(x_j, t)$, $x_j(0) = x_{j0}$. Alors, sur un intervalle commun d'existence

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \|x_{10} - x_{20}\| e^{\alpha|t-t_0|} + \frac{\varepsilon}{\alpha} (e^{\alpha|t-t_0|} - 1).$$

DÉMONSTRATION. Avec z défini par $z(t) = x_1(t) - x_2(t)$,

$$\begin{aligned} \|z'(t)\| &= \|F_1(x_1(t), t) - F_2(x_2(t), t)\| \\ &\leq \|F_1(x_1(t), t) - F_1(x_2(t), t)\| + \|F_1(x_2(t), t) - F_2(x_2(t), t)\| \\ &\leq \alpha \|x_1(t) - x_2(t)\| + \varepsilon = \alpha \|z(t)\| + \varepsilon \end{aligned}$$

Soit s dans un intervalle $[t_-, t]$ où $z(s)$ ne s'annule pas. On a

$$\frac{d}{ds} \|z(s)\| = \frac{d}{ds} \left(\sqrt{\langle z(s), z(s) \rangle} \right) = \frac{\langle z(s), z'(s) \rangle}{\|z(s)\|} \leq \frac{\|z(s)\| \|z'(s)\|}{\|z(s)\|} \leq \|z'(s)\|$$

et donc

$$(\|z(s)\|)' \leq \alpha \|z(s)\| + \varepsilon,$$

soit en multipliant par le facteur intégrant $e^{-\alpha s}$

$$\frac{d}{ds} (e^{-\alpha s} \|z(s)\|) \leq \varepsilon e^{-\alpha s}$$

pour intégrer sur $[t_-, t]$

$$e^{-\alpha t} \|z(t)\| - e^{-\alpha t_-} \|z(t_-)\| \leq \varepsilon \int_{t_-}^t e^{-\alpha s} ds$$

et donc

$$\|z(t)\| \leq e^{\alpha(t-t_-)} \|z(t_-)\| + \frac{\varepsilon}{\alpha} (e^{\alpha(t-t_-)} - 1)$$

On a donc démontré l'inégalité de la proposition si z ne s'annule pas sur l'intervalle $[t_0, t]$. Si $z(t) = 0$, l'inégalité de la proposition est évidemment vérifiée. Si $z(t)$ est non nul et s'il existe un s dans (t_0, t) tel que $z(s) = 0$, alors, si t_+ est le plus grand de ces $s \in [t_0, t]$, on obtient par passage à la limite $t_- \rightarrow t_+$ dans l'inégalité précédente

$$\|z(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{\alpha} (e^{\alpha(t-t_+)} - 1) \leq \|z(t_0)\| + \frac{\varepsilon}{\alpha} (e^{\alpha(t-t_0)} - 1),$$

ce qui est l'inégalité de la proposition et achève la démonstration. \square

Pour une ÉD linéaire $X' = AX + B$ dont les coefficients A, B sont définis sur l'intervalle I , la solution maximale est définie sur tout l'intervalle I :

THÉORÈME 1.3: *Soit l'ÉD linéaire*

$$a_0(t)x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = g(t)$$

où les coefficients a_0, a_1, \dots, a_n, g sont de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle I avec la fonction a_0 ne s'annulant pas sur I . Soit t_0 intérieur à I . Le PC associé avec données initiales $x^{(k)}(t_0) = x_0^k, k = 0, \dots, n-1$ a une unique solution maximale définie globalement sur l'intervalle I .

DÉMONSTRATION. L'ÉD a la forme $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$, avec A (B resp.) fonction d'une variable $t \in I = (t_{1-}, t_{1+})$ à valeurs dans l'espace des matrices d'ordre n (dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^n resp.). Il suffit de montrer que la solution maximale dans le futur est bien définie sur tout l'intervalle $I_+ = [t_0, t_{1+})$. Une solution x_j définie sur le sous-intervalle $J = [t_0, t_j)$ de I est bornée d'après la proposition 1.5 de l'inégalité de Grönwall : on peut donc prolonger la solution x_j strictement (raisonnement analogue à celui de la proposition de prolongement 1.2), et donc la solution maximale est bien définie sur $[t_0, t_{1+})$. \square

Chapitre 2

Équations différentielles (scalaires) d'ordre un

2.1 Modélisation et dynamiques unidimensionnelles

▷ EXEMPLES 2.1:

2.1.1 Soit $P(t)$ le contenu d'un compte bancaire à l'instant t , rendant un taux mensuel de $r\%$. On note par W le montant mensuel des retraits. Ainsi la croissance du compte entre les temps t et $t + \Delta t$ est donnée par

$$P(t + \Delta t) - P(t) \simeq rP(t)\Delta - W\Delta t.$$

Ainsi

$$P'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = rP(t) - W$$

soit l'équation linéaire $P' = rP - W$ résolue en $P(t) = W/r + Ce^t$ avec la constante C précisée par la condition initiale $C = P_0 - W/r$, soit

$$P(t) = \frac{W}{r} + \left(P_0 - \frac{W}{r}\right)e^{rt}.$$

2.1.2 [18] Si N est la population et Y le revenu, ce modèle donne lieu au système différentiel

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = \alpha - \beta \frac{N(t)}{Y(t)}, \quad Y(t) = AN(t)^\alpha$$

où $\alpha, \beta, A > 0$ et $a \in (0, 1)$. En fait ce système donne une ÉD autonome pour N après élimination de Y

$$N'(t) = \alpha N(t) - \beta A^{-1} N(t)^{2-\alpha}$$

La dérivée de la fonction $h : N \rightarrow \alpha N - \beta A^{-1} N^{2-\alpha}$ s'annule en $\hat{N} = [\alpha A / ((2 - \alpha)\beta)]^{1/(1-\alpha)}$. L'étude du signe de cette dérivée indique l'existence d'un zéro N_* de h , calculable aisément : $N_* = (\alpha A / \beta)^{1/(1-\alpha)}$.

Sur la *demi-droite* des phases \mathbb{R}^+ , la population $N(t)$ croît vers N_* si $N_0 < N_*$, décroît vers N_* si $N_0 > N_*$. L'équilibre N_* est stable. En fait, on calcule la dérivée $h'(N) = \alpha - (2 - \alpha)\beta A^{-1}N^{1-\alpha}$, ce qui donne en particulier $h'(0) = \alpha > 0$ qui confirme l'instabilité et $h'(N_*) = \alpha(\alpha - 1) < 0$ qui implique la stabilité asymptotique.

L'ÉD $N' = h(N)$ est de type Bernoulli, résolue avec le changement de fonction $x = N^{\alpha-1}$, soit

$$\begin{aligned} N(t) &= \left[[N_0^{\alpha-1} - \beta/(\alpha A)] e^{-(1-\alpha)\alpha t} + \beta/(\alpha A) \right]^{1/(\alpha-1)} \\ &= \left[[N_0^{\alpha-1} - N_*^{\alpha-1}] e^{-(1-\alpha)\alpha t} + N_*^{\alpha-1} \right]^{1/(\alpha-1)} \end{aligned}$$

ce qui permet de bien vérifier les asymptotiques. \triangleleft

▷ EXEMPLE 2.2 (Le modèle de croissance de Solow (1956)): Ce modèle (néoclasique) porte sur l'augmentation de la croissance. Ce n'est pas ici le lieu de juger de la pertinence de ce modèle, qui ne tient pas compte de l'évolution climatique, de la décroissance, des communs, amoindriant le rôle quasi-exclusif du PIB (cf. les travaux de Herman Davy, Esther Duflo ou les Nobel 2018 William Nordhaus et Paul Romer par ex.).

Soit $s, \mu \in (0, 1)$, $\nu > 0$ et f une fonction croissante strictement concave telle que $f(0) = 0$, $f'(0^+) = +\infty$ et $f'(+\infty) = 0$. Le modèle¹ de croissance de Solow est décrit par l'ÉD

$$k'(t) = sf[k(t)] - ak(t),$$

où k est le capital par tête, $p(k)$ la production par tête, s la propension marginale à épargner, δ le taux de dépréciation du capital, μ le taux de croissance de la population active et $a = \mu + \nu$.

Les PÉ sont les zéros de la fonction $h : k \rightarrow sp(k) - k$. La fonction h est concave avec $h'(0^+) = +\infty$ et $h'(+\infty) = -a < 0$, ce qui assure, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'existence d'un zéro \hat{k} de h' (qui est par concavité un maximum). Par ailleurs $h(k) = [k[sp(k)/k - a]]_{|k=+\infty} = -\infty$ car $(p(k)/k)_{|k=+\infty} = 0^+$: La fonction h s'annule en un point k_* dans $[\hat{k}, +\infty)$. En résumé, le système a deux PÉ, $k_e = 0$ et k_* .

1. Représentant par K et L le capital et la force de travail, la fonction de production $P(K, L)$ est supposée homogène de degré 1, assurant ainsi les rendements d'échelle constants. D'une part, l'évolution du travail $L(t)$ est exogène avec $L'(t) = \nu L(t)$ où le taux de croissance ν est constant, d'autre part celle du capital est $K'(t) = s(t)P(K(t), L(t)) - \mu K(t)$ avec le taux d'épargne $s(t) \in (0, 1)$ et le taux de dépréciation physique du capital μ constant. Le capital par unité de travail $k(t) = K(t)/L(t)$ évolue suivant

$$k'(t) = K'(t)/L(t) - K(t)L'(t)/L^2(t) = s(t)f(k(t)) - (\mu + \nu)k(t).$$

On a utilisé l'homogénéité de degré 1 de la fonction de production P de telle sorte que $P(K(t), L(t)) = L(t)f(k(t))$ où on a introduit la fonction $f : k \mapsto p(k) = P(k, 1)$.

On a $h'(0^+) = +\infty$, donc $k_e = 0$ est un équilibre non stable², alors que $h'(k_*) < 0$ indique que k_* est un équilibre stable. Ainsi, si la valeur initiale $k_0 > 0$, $k(t)$ converge vers k_* , en croissant si $k_0 < k_*$.

Comme cas particulier on peut prendre la Cobb-Douglas $P(k, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$ telle que $p(k) = k^\alpha$ avec $\alpha \in (0, 1)$. Ce choix donne comme ÉD $k' = sk^\alpha - ak$. La fonction $K = s^{1/(\alpha-1)} k$ vérifie $K' = K^\alpha - aK$: on supposera dans la suite $s = 1$.

Le PÉ k_* est explicitement formulé par $k_* = a^{1/(\alpha-1)}$. L'ÉD est du type Bernoulli et variables séparables. La méthode de Bernoulli prône le changement de fonction k remplacée par $y(k) = k^{1-\alpha}$, ce qui donne l'équation linéaire $y'/(1-\alpha) + ay = 1$ avec comme solution

$$k(t) = \left[\left(k_0^{1-\alpha} - \frac{1}{a} \right) e^{-(1-\alpha)at} + \frac{1}{a} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

On vérifie bien que $k(t) \mapsto k_*$ lorsque $t \rightarrow \infty$. ◁

2.2 Équations linéaires

Ces équations sont du type $x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$, soit $x'(t) + ax(t) = b(t)$ pour celles à coefficient constants (pour leur partie homogène).

▷ EXEMPLES 2.3:

2.3.1 L'équation $tx'(t) - 2x(t) = t^3$ est linéaire avec second membre, alors que $x'(t) = t + \sin(x(t))$ n'est pas linéaire

2.3.2 L'ÉD $x(t)' + 3x(t) = 4e^t$ a comme solution $t \in \mathbb{R} \mapsto e^t + Ce^{-3t}$, où C est une constante. ◁

THÉORÈME 2.1: Soit I un intervalle, $t_0 \in I$ et a, b continues sur I . La solution générale de l'ÉD linéaire

$$x'(t) + a(t)x(t) = b(t), \quad t \in I \tag{2.1}$$

du premier ordre sur l'intervalle I dépend d'une constante $C \in \mathbb{R}$ et est de la forme de la forme $C\alpha(t) + \beta(t)$ où $\beta(t)$ est une solution particulière de l'ÉD et $\alpha(t)$ une solution (non nulle) de l'équation homogène. On peut prendre $\alpha(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}$ et $\beta(t) = e^{-A(t)} \int_{t_0}^t e^{A(s)} b(s)ds$ pour une constante C .

DÉMONSTRATION. Soit $t_0 \in I$, A la primitive de a sur l'intervalle I s'annulant en t_0 : $A(t) = \int_{t_0}^t a(s)ds$. Si x est solution de l'équation homogène $x' + ax = 0$, alors e^A est un facteur intégrant au sens où

$$(e^A x)' = e^A [x' + ax] = 0$$

2. Un point d'équilibre est dit non stable si tout voisinage de x_e contient une trajectoire qui dans le futur sort de ce voisinage, cf. définition 4.1.

et donc e^{Ax} est constant sur I , soit $x(t) = Ke^{-A(t)}$ pour une constante K . En considérant la fonction $x_K(t) = K(t)e^{-A(t)}$ avec K dérivable, la fonction x_K est solution de l'équation $x' + ax = b$ si et seulement si

$$0 = x'_K(t) + a(t)x_K(t) - b(t) = K'(t)e^{-A(t)} - b(t)$$

d'où $K(t) = \int_{t_0}^t e^{A(s)} b(s) ds + C$ pour une constante C . on obtient donc comme solution de (2.1)

$$x(t) = \left[\int_{t_0}^t e^{A(s)} b(s) ds + C \right] e^{-A(t)}, \quad t \in I.$$

□

On note par $\mathbb{R}[t]_\ell$ l'espace des polynômes de degré au plus ℓ .

PROPOSITION 2.1: Soient λ, μ réels, $q \in \mathbb{R}[t]_d$ et l'ÉD

$$x'(t) = \lambda x(t) + q(t)e^{\mu t}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

L'ÉD (2.2) admet une solution particulière de la forme $p(t)e^{\mu t}$ avec

$$p \in \mathbb{R}[t]_d \text{ si } \lambda \neq \mu, \quad p \in \mathbb{R}[t]_{d+1} \text{ si } \lambda = \mu,$$

DÉMONSTRATION. On cherche donc une solution du type $x(t) = p(t)e^{\mu t}$ avec $p \in \mathbb{R}[t]$ qui vérifie

$$0 = x(t)' - \lambda x(t) - q(t)e^{\mu t} = (p'(t) + (\mu - \lambda)p(t) - q(t))e^{\mu t},$$

ce qui ramène à l'étude de l'application linéaire $L_{\mu-\lambda} : p \mapsto p' - (\mu - \lambda)p$. Si $\lambda \neq \mu$, cette application induit un endomorphisme injectif de l'espace $\mathbb{R}[t]_{\lambda-\mu}$ (son noyau est nécessairement de la forme $Ce^{(\lambda-\mu)t}$, qui n'est un polynôme que si $\lambda - \mu$ est nul), qui est donc surjectif. Si $\lambda = \mu$, l'application L_0 induit l'application $L_0 : p \in \mathbb{R}[t]_{d+1} \mapsto p' \in \mathbb{R}[t]_d$ qui a pour noyau l'espace des polynômes constants et qui est surjective. □

Cet énoncé vaut pour des polynômes p, q à coefficients complexes des λ, μ complexes. En résulte un énoncé analogue pour les produits de fonctions trigonométriques par des polynômes.

COROLLAIRE 2.1: Soit α, μ des réels avec α non nul et q un polynôme de degré d . L'ÉD

$$x'(t) = \lambda x(t) + q_+(t) \cos(\alpha t) + q_-(t) \sin(\alpha t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

admet une solution particulière de la forme $p_+(t) \cos(\alpha t) + p_-(t) \sin(\alpha t)$ avec q_-, q_+ polynômes de degré d .

DÉMONSTRATION. Les fonctions $t \mapsto \cos(\alpha t)$ et $t \mapsto \sin(\alpha t)$ sont des combinaisons linéaires des fonctions $t \mapsto e^{\pm i\alpha t}$. D'après l'hypothèse, α et μ sont distincts et donc on peut trouver des solutions de la forme $t \mapsto p_\pm(t)e^{\pm i\alpha t}$ aux équations avec second membre $t \mapsto q_\pm(t)e^{\pm i\alpha t}$. Prenant la partie réelle de la somme de ces fonctions, on obtient une solution de l'ÉD (2.3). □

2.3 Équations séparables

DÉFINITION 2.1: Une ÉD est dite (à variables) séparable/si on peut l'écrire suivant

$$x'(t) = \frac{f(t)}{g(x(t))}. \quad (2.4)$$

Pour une ÉD séparable, on obtient

$$x'(t)g(x(t)) = f(t). \quad (2.5)$$

Ainsi, si F, G sont des primitives de f et g resp., l'ÉD implique que les fonctions F et $G \circ x$ ont même dérivées

$$F'(t) = f(t) = g(x(t))x'(t) = G'(x(t))x'(t) = (G(x(t)))'.$$

Ainsi les fonctions F et $G \circ x$ diffèrent d'une constante C sur tout intervalle : $F(t) = G(x(t)) + C$, définissant implicitement la fonction $x : t \rightarrow x(t)$ comme solution de l'équation implicite $G(x) = F(t) - C$, soit $x(t) = G^{-1}(F(t) - C)$. Les trajectoires de l'ÉD $x' = f(t)g(x(t))$ coïncident avec les courbes de niveau de la fonction $F(t) - G(x)$.

On écrira souvent l'équation (2.5) sous la forme

$$g(x)dx = f(t)dt,$$

pour chercher des primitives F, G des deux membres et mettre l'égalité $G(x)|_{x=x(t)} = F(t) + C$ pour C constante arbitraire. Pour le problème de Cauchy, on intégrera sur $[t, t_0]$ et sur $[x(t), x(t_0) = x_0]$ pour obtenir

$$G(x(t)) - G(x(t_0)) = F(t) - F(t_0)$$

▷ EXEMPLES 2.4:

2.4.1 $x'(t) = -2tx^2$: on a $-2tdt = x^{-2}dx$ soit $-t^2 + t_0^2 = -x^{-1}(t) + x_0^{-1}$ et finalement

$$x(t) = \frac{x_0}{1 + x_0(t^2 - t_0^2)}.$$

2.4.2 $x'(t) = x(t) + x(t)^2$: on parvient à $dx/(x + x^2) = dt$. Ainsi, vu que $(x + x^2)^{-1} = 1/x - 1/(1 + x)$, on obtient

$$\log \left| \frac{x}{1 + x} \right| - \log \left| \frac{x_0}{1 + x_0} \right| = t - t_0$$

soit,

$$\left| \frac{1 + x}{x} \right| = \left| \frac{1 + x_0}{x_0} \right| e^{t-t_0}$$

soit finalement, la continuité induisant le même signe pour les quantités $(1 + x)/x$

$$x = \left(\frac{1 + x_0}{x_0} e^{t-t_0} - 1 \right)^{-1}$$

- 2.4.3 $x' = tx(t)$ avec $x(0) = 1$: cette ÉD se transforme en $dx/x = t dt$, soit $\log|x(t)| - \log|x_0| = (t^2 - t_0^2)/2$ et donc $x(t) = x_0 e^{(t^2 - t_0^2)/2}$.
- 2.4.4 $x(t)x'(t) = t$: la séparation des variables donne $x dx = t dt$ soit $x^2/2 = t^2/2 + C$, d'où $x(t) = \pm\sqrt{t^2 + 2C}$.
- 2.4.5 $x'(t) = e^{t+x(t)}$: cette ÉD est aussi séparable, vu $e^{-x} dx = e^t dt$ d'où $-e^{-x} = e^t + C$ et donc $x = -\log(-e^t - C)$: plus précisément $x = -\log(e^{-x_0} - e^{t_0} + e^t)$ définie sur $(-\infty, \log(e^{-x_0} + 1))$.
- 2.4.6 L'équation $x' = x(1 + x^2)/(x^2 + x + 1)$ est à variable séparable et peut se réécrire suivant $1/(1 + x^2) + 1/x$ qui donne après intégration $\text{arctg } x + \log|x| = t + C$ où y est définie seulement de manière implicite. L'équation $x' = te^{-x^2}$ est séparable, mais non résoluble par des fonctions basiques : e^{-t^2} n'a pas de primitive en terme de fonctions classiques.
- 2.4.7 Résoudre $x' = t^2 x^2(t) + t^2$ avec $x(0) = 1$. ◀

△ REMARQUE 2.1: Une ÉD scalaire autonome scalaire d'ordre 1 est à variable séparable. ▽

2.4 Équations de Bernoulli

DÉFINITION 2.2: Une ÉD du premier ordre est dite de Bernoulli si elle s'exprime suivant la forme

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t)x(t)^a \quad (2.6)$$

pour un $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Les cas $a = 0$ ou 1 sont des ÉD linéaires : on suppose ces valeurs évitées.

Une ÉD de type Bernoulli se ramène à une équation linéaire grâce au changement de fonction $y = x^{1-a}$:

$$\frac{1}{1-a} y'(t) = x(t)^{-a} x'(t) = -p(t)y(t) + q(t)$$

qui ramène à une ÉD linéaire pour la fonction y : on résout en y et on termine $x = y^{1/(1-a)}$.

▷ EXEMPLES 2.5:

- 2.5.1 L'ÉD $x' = x + x^2$ se résout en posant $y(t) = x^{-1}(t)$, en remarquant que la fonction identiquement nulle est solution et donc que toute autre solution ne s'annule jamais. On obtient

$$y'(t) = -x^{-2}(t)x'(t) = -x^{-1}(t) - 1 = -y(t) - 1$$

avec comme solution $y(t) = Ce^{-t} - 1$ et donc $x(t) = (Ce^{-t} - 1)^{-1}$ ou encore

$$x(t) = \frac{x_0}{(1 + x_0)e^{t_0-t} - x_0} = \frac{x_0}{e^{t_0-t} + x_0(e^{t_0-t} - 1)},$$

formule valable y compris pour la fonction identiquement nulle correspondant à $x_0 = 0$. Il n'y a pas de solutions globales.

2.5.2 L'ÉD $x'(t) = x(t) + tx^2$ se résout pareillement en posant $y(t) = x^{-1}(t)$ pour obtenir $y'(t) = -y(t) - t$ avec comme solution $y(t) = Ce^{-t} - t + 1$ et donc $x(t) = (Ce^{-t} - t + 1)^{-1}$, soit en terme de conditions initiales

$$y(t) = \frac{x_0}{e^{t_0-t} + x_0[(t_0 - 1)e^{t_0-t} + 1 - t]}.$$

◁

2.5 Stabilité

On considère une équation (scalaire) autonome $x' = F(x)$. Son diagramme (ou portrait) de phase est le tracé des solutions $(t, x(t))$, $t \in \mathbb{R}$ dans le plan $\mathbb{R}_{t,x}^2$, avec champ des vitesses superposé associant la vitesse $(1, f(x))$ au point (t, x) .

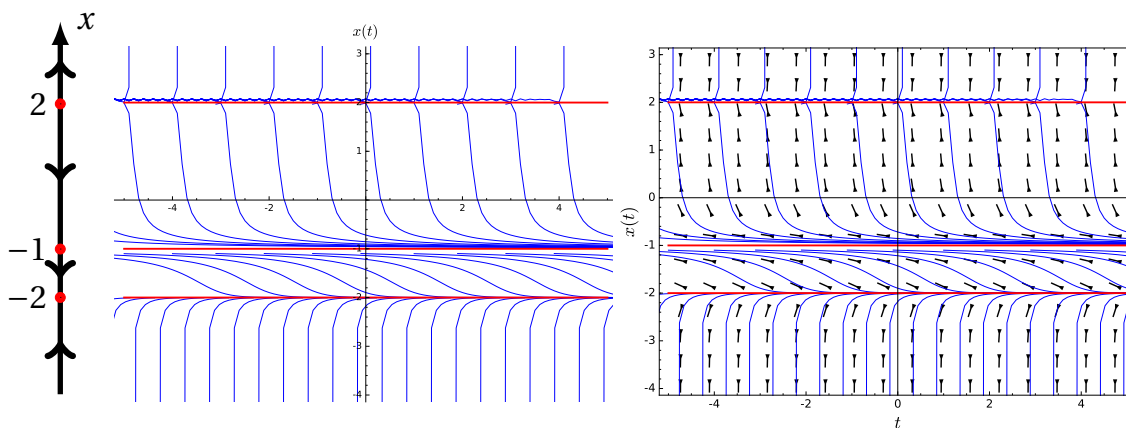


FIGURE II.1 – Portraits de phase pour $x' = (x^2 - 4)(x + 1)^2$: dans \mathbb{R}_x et $\mathbb{R}_{x,t}$. Le point $x = -2$ (resp. $x = 2$, $x = -1$) est un PÉ stable (resp. stable vers le passé, ni stable ni non stable).

THÉORÈME 2.2: Soit une ÉD scalaire $x' = F \circ x$, F de classe \mathcal{C}^1 , x_e un PÉ. Si $F'(x_e) < 0$, alors le PÉ x_e est asymptotiquement stable.

DÉMONSTRATION. On se place dans un petit intervalle I_F contenant x_e comme seul PÉ et où $F'(x) < 0$: F y est strictement décroissante, et donc, pour $x \in I_F$, $F(x)$ est non nul, positif ou négatif suivant que $x < x_e$ ou $x > x_e$. On va montrer que cet intervalle I_F est inclus dans le bassin d'attraction du PÉ x_e . Soit $x_0 \in I_F$ à gauche de x_e . Vu que $x'(t) = F(x(t)) > 0$, la solution maximale $x : t \in [0, T_\infty) \rightarrow x(t)$ avec $x(0) = x_0$ est croissante, convergente vers x_+ .

On ne peut avoir T_∞ fini avec $x_+ = x_e$ (par unicité de la trajectoire : x n'est pas la solution constante de l'équilibre x_e), pas plus que $x_+ < x_e$ (on pourrait prolonger la solution maximale!). On a donc T_∞ infini.

Enfin, on ne peut avoir $x_+ < x_e$. Sinon, par décroissance stricte de F , on a $F(x(t)) \geq F(x_+) > 0$ pour $t \in [0, +\infty)$ et ainsi

$$x(t) - x_0 = \int_0^t x'(\tau) d\tau = \int_0^t F(x(\tau)) d\tau \geq F(x_+)t, \quad t \geq 0,$$

où le minorant de droite tend vers $+\infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, ce qui n'est pas vu que le membre de gauche est fini. On a montré que $x(t)$ tend vers x_e lorsque $t \rightarrow T_\infty = +\infty$. Un raisonnement équivalent établit la convergence vers x_e pour toute trajectoire issue de la partie droite de l'intervalle I_F . Cela achève la preuve de l'inclusion de I_F dans le bassin d'attraction du PÉ x_e . \square

▷ EXEMPLE 2.6: L'ÉD linéaire $x' = ax + b$ est autonome : $x' = F_{ab}(x)$ avec $F_{ab}(x) = ax + b$. Il y a un unique PÉ $x_e = -b/a$ avec $F'(x_e) = a$. Il y a stabilité si $a < 0$, non stabilité si $a > 0$. \triangleleft

△ REMARQUE 2.2: Ce théorème a une version pour des ÉD d'ordre 1 en dimension $n > 1$: c'est le théorème 4.2 du chapitre 4. La version en dimension 1 de la proposition 2.2 est plus précise quant au bassin d'attraction du PÉ. Si $F'(x_e)$ est nul, il n'y a pas de conclusion générale, comme les exemples ci-dessous l'indiquent. ∇

▷ EXEMPLE 2.7: Soit n entier au moins égal à 2. L'origine $x_e = 0$ est asymptotiquement stable pour $x' = -x^n$ si et seulement si n est impair : la solution de $x' = -x^n, x_{t=0} = x_0$ est $x(t) = x_0(1 + (n-1)x_0^{n-1}t)^{-1/(n-1)}$. Ces systèmes ont le même linéarisé, soit la matrice nulle. \triangleleft

△ REMARQUE 2.3: Le résultat (avec une démonstration adaptée légèrement) vaut aussi pour une fonction F avec $F'(x_e)$ nul, vérifiant néanmoins des conditions appropriées. Un exemple est donné par une F polynomial avec un x_e zéro d'ordre $2k$ et une dérivée $F^{(2k+1)}(x_e)$ négative non nulle. En fait, on peut déterminer par les mêmes types d'argument le bassin d'attraction de chaque zéro du polynôme P , ou toute autre fonction de classe \mathcal{C}^1 (ou plus) à zéros isolés. ∇

▷ EXEMPLE 2.8: Étudions le problème de Cauchy

$$r' = r(r^2 - 1), \quad r(t_0) = r_0.$$

On a 3 PÉ, à savoir $-1, 0$ et 1 , parmi lesquels 0 est le seul asymptotiquement stable ; toute trajectoire qui n'est pas un PÉ est totalement incluse dans une des composantes de $\mathbb{R} \setminus \{1, 0, -1\}$. Par ailleurs, toute solution maximale avec $r_0 \in (-1, 1)$ a \mathbb{R} comme durée de vie : par monotonie d'une telle solution, une solution converge vers r_∞ en temps T_∞ et d'après le théorème d'explosion des solutions maximales, cela n'est possible que pour T_∞ infini.

Par le même argument, une solution maximale avec $r_0 > 1$ est strictement croissante et toute entière dans $]1, \infty)$: elle est donc définie sur $(-\infty, t_0)$. Pour son futur, il y a explosion au bout d'un temps $T_0 > 0$.

L'ÉD est à variables séparables :

$$\frac{dr}{r(r^2-1)} = dt.$$

Vu que $\frac{1}{r(r^2-1)} = -\frac{1}{r} + \frac{r}{r^2-1}$, on a, avec une constante C,

$$2t + 2C = \int \frac{2dr}{r(r^2-1)} = -2\ln r + \ln(r^2-1) = \ln(1-r^{-2})$$

Ainsi, une solution r vérifie

$$\log \left[1 - \frac{1}{r(t)^2} \right] = 2C + 2t$$

avec la constante C déterminée par l'équation

$$\log \left[1 - \frac{1}{r_0^2} \right] = 2C + 2t_0,$$

soit

$$\log \left[1 - \frac{1}{r_0^2} \right] - 2t_0 = 2C = \log \left[1 - \frac{1}{r(t)^2} \right] - 2t \quad (2.7)$$

La fonction $t \mapsto r(t)$ est croissante, sans converger vers une limite finie en un temps infini (l'équation (2.7) ne le permet pas) : il y a explosion en temps fini T_0 où $\lim_{t \rightarrow T_0} r(t) = +\infty$ et

$$\log \left[1 - \frac{1}{r_0^2} \right] - 2t_0 = 0 - 2T_0$$

Ainsi l'intervalle de vie dans le futur pour la solution de (2.7) avec $r_0 > 1$ est

$$I_{t_0, r_0}^+ = \left[t_0, t_0 - \frac{1}{2} \log \left[1 - \frac{1}{r_0^2} \right] \right).$$

◁

△ REMARQUE 2.4: Pour un polynôme P, on peut remplacer parfois l'équation différentielle $x' = P(x)$ par une fonction définissant implicitement x : par exemple, les résolutions effectuées par SageMath/maxima

```
a=var('a');t=var('t')
x=function('x')(t)
desolve(diff(x,t)+x*(x-a)*(x-b),x,ivar=t,contrib_ode=True)
desolve(diff(x,t)==x*(x-a)**2,x,ivar=t)
desolve(diff(x,t)+x*(x**2+x+1),x,ivar=t,contrib_ode=True)
```

donnent x définie implicitement suivant

$$\frac{b \ln(-a + x(t)) - a \ln(-b + x(t)) + (a - b) \ln(x(t))}{a^2 b - ab^2} = -C + t$$

$$\frac{-\ln(-a + x(t)) - \ln(x(t)) - a(x(t) - a)^{-1}}{a^2} = -C + t$$

$$1/6\sqrt{3}(\sqrt{3}\ln(x(t)^2 + x(t) + 1) - 2\sqrt{3}\ln(x(t)) + 2\arctan(1/3\sqrt{3}(2x(t) + 1))) = -C + t$$

Mais la résolution ne peut aller plus loin : le cas précédent $x' = x(x^2 - 1)$ est un peu exceptionnel. ∇

Terminons par quelques exemples tirés des études économiques.

▷ EXEMPLES 2.9:

2.9.1 Soit une économie avec n producteurs et n produits³, assujettis à des prix initiaux $P_0 = (p_{10}, \dots, p_{n0})$. Pour chaque producteur, les fonctions de demande $D(P)$ et d'offre $S(P)$ sont déterminés par la maximisation d'une fonction d'utilité avec contrainte $\max_{C(P,x)} U_i(x)$. Il en résulte la modélisation du mécanisme d'ajustement du système des prix $t \in (t_0, T_+) \mapsto P(t) \in \mathbb{R}^n$ par l'ÉD

$$p'_i = H_i(D(P) - S(P)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.8)$$

où la fonction $D = (D_i)$ (resp. $S = (S_i)$) représente la demande (resp. l'offre ou *supply* en anglais) : la fonction $D(P) - S(P)$ est l'excès de demande. On suppose les fonctions H_i strictement croissantes (*i. e.* $\partial_{x_i} H_i(P) > 0$) avec $H(0) = 0$. Si la demande majore l'offre, *i. e.* $D(P) - S(P) > 0$, alors $P'(t) > 0$ et le prix augmente : par ailleurs, le prix diminue si $D(P) < S(P)$. C'est en ce sens que l'ÉD (2.8) modélise le mécanisme d'ajustement des prix.

Supposons que P_e est un prix d'équilibre pour l'ÉD (2.8) : vu que H est strictement croissante avec $H(0) = 0$, l'offre $S(P_e)$ égale la demande $D(P_e)$. Pour la fonction $F : P \mapsto H(D(P) - S(P))$, on a donc

$$F'(P) = H'(D(P) - S(P))(D'(P) - S'(P)).$$

Vu que $H' > 0$, $F'(P)$ a le même signe que $D'(P) - S'(P)$: d'après la proposition suivante 2.2, le PÉ P_e est stable si $D'(P_e) < S'(P_e)$, condition généralement remplie vu qu'on attend $D'(P) < 0$ (la demande diminue lorsque le prix augmente) et $S'(P) > 0$ (l'offre augmente lorsque le prix augmente).

Comme exemple, on pourra prendre $D(P) = a - bP$ et $S(P) = \alpha + \beta P$, avec $H(P) = \lambda(D(P) - S(P))$ (l'excès de demande est proportionnel à la variation du prix). L'évolution des prix est donnée par $P' = \lambda[(a - \alpha) - (b + \beta)P]$, soit

$$P(t) = \left(P_0 - \frac{a - \alpha}{b + \beta} \right) e^{-\lambda(b + \beta)t} + \frac{a - \alpha}{b + \beta},$$

L'équilibre $P_e = (a - \alpha)/(b + \beta)$ est stable.

2.9.2 L'exemple suivant, dû à H. Scarf [15], est significatif des développements de modélisation de la dynamique de l'offre et la demande.

Dans une économie avec 3 agents $(A_i)_{i=1}^3$ et 3 denrées $(D_j)_{j=1}^3$ pourvue d'une dynamique du vecteur des prix (p_j) , l'offre $S = (S_{ij})$ et la demande $D = (D_{ij})$ déterminent la fonction $E = D - S$ d'excès de demande qui est proportionnelle au taux de variation du vecteur des prix : $p'_j = E_j$ avec $E_j = \sum_i E_{ij}$. On modélise les demandes et offres par des interactions en paires, la première entre A_1 et A_2 étant répliquée pour les couples (A_2, A_3) et (A_3, A_1) par simple rotation sur les indices $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Les fonctions globales d'excès de demande sont obtenues par somme de celles des interactions, soit $E_j = \sum_i E_{ij}$. Les denrées D_1, D_2, D_3 ont un coût unitaire p_1, p_2, p_3 resp. (les quantités sont équivalentes aux coûts, à multiplication par les prix près).

Pour la première interaction A_1/A_2 , on fait diverses hypothèses

3. Une première lecture avec $n = 1$ est conseillée.

- 2.9.3 la denrée D_3 est négligée totalement par les agents de interaction : les quantités en demande ($D_{13} = D_{23} = 0$) ou offre ($S_{13} = S_{23} = 0$) sont nulles.
- 2.9.4 l'agent A_1 a un stock de $S_{11} = 1$ unité de la denrée D_1 , soit un stock en offre s'élevant à $M = p_1$ unités monétaires, il n'a pas d'offre sur D_2 , alors que l'agent A_2 n'a pas d'offre ni pour D_1 , ni pour D_2 . On a donc $S_{21} = S_{12} = S_{22} = 0$.
- 2.9.5 la demande formulée identiquement par A_1 et A_2 concerne les proportions x_1, x_2 des quantités de demandes de denrées D_1 et D_2 : étant donnés les prix p_1, p_2 , les quantités x_1, x_2 de denrée demandées maximisent la fonction d'utilité $U(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$ sous les contraintes $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ et $x_1 p_1 + x_2 p_2 = M$. Ce problème de maximisation a comme solution⁴ $x_1 = x_2 = M/(p_1 + p_2)$, soit, pour les agents A_1 et A_2 avec capital M , $D_{11} = D_{12} = D_{21} = D_{22} = M/(p_1 + p_2)$.

Ainsi, pour l'agent A_1 dans son interaction A_1/A_2 , les quantités de demande sont $D_{11} = D_{12} = M/(p_1 + p_2)$ et celles d'offre sont $S_{11} = 1$ et $S_{12} = 0$ resp.. Les quantités d'excès de demande $E = D - S$ sont donc pour l'agent A_1 suivant les denrées de type 1, 2, 3

$$E_{11} = \frac{M}{p_1 + p_2} - 1 = \frac{-p_2}{p_1 + p_2}, \quad E_{12} = \frac{M}{p_1 + p_2} = \frac{p_1}{p_1 + p_2}, \quad E_{13} = 0.$$

Additionnant les fonctions d'excès de demande pour les interactions $A_1/A_2, A_2/A_3$ et A_3/A_1 , on obtient les fonctions globales d'excès de demande pour les denrées D_1, D_2, D_3

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{11} + E_{21} + E_{31} = \frac{-p_2}{p_1 + p_2} + \frac{p_3}{p_3 + p_1} \\ E_2 &= E_{22} + E_{32} + E_{12} = \frac{-p_3}{p_2 + p_3} + \frac{p_1}{p_1 + p_2} \\ E_3 &= E_{33} + E_{13} + E_{23} = \frac{-p_1}{p_3 + p_1} + \frac{p_2}{p_2 + p_3} \end{aligned}$$

qui déterminent le système différentiel

$$p_1' = \frac{-p_2}{p_1 + p_2} + \frac{p_3}{p_3 + p_1}, \quad p_2' = \frac{-p_3}{p_2 + p_3} + \frac{p_1}{p_1 + p_2}, \quad p_3' = \frac{-p_1}{p_3 + p_1} + \frac{p_2}{p_2 + p_3}. \quad (2.9)$$

On vérifie que

$$p_1 p_1' + p_2 p_2' + p_3 p_3' = 0, \quad E_1 p_2 p_3 + E_2 p_3 p_1 + E_3 p_1 p_2 = 0,$$

où la première identité différentielle est connue sous la dénomination de *Loi de Walras* et la seconde implique la constance de la fonction $p_1 p_2 p_3$ le long de toute trajectoire. L'ensemble des points d'équilibre du système (2.9) sont sur la demi-droite $p_1 = p_2 = p_3$ avec $p_1 > 0$, intersectant la sphère $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 3$ en l'unique point $\mathbf{p} = (1, 1, 1)$: les trajectoires sont portées par la courbe tracée sur la sphère et d'équation $p_1 p_2 p_3 = p_1^0 p_2^0 p_3^0$ et le point d'équilibre \mathbf{p} est stable, non asymptotiquement stable.

On peut reprendre le système (2.9) en figeant un prix, par exemple $p_3 = 1$: on obtient le système

$$\begin{aligned} p_1' &= \frac{-p_2}{p_1 + p_2} + \frac{1}{1 + p_1} \\ p_2' &= \frac{-1}{1 + p_2} + \frac{p_1}{p_1 + p_2} \end{aligned}$$

4. Le lieu de maximisation est le segment compact $\mathbf{S} = [(0, M/p_1), (M/p_2, 0)]$ d'une fonction continue : ce point de maximum existe donc. On peut le déterminer graphiquement en remarquant que les courbes d'indifférence sont l'union d'une demi-droite verticale et d'une demi-droite verticale se rencontrant en leurs origines situés sur la diagonale $\{x_1 = x_2\}$. On peut aussi introduire le lagrangien $U(x_1, x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - M)$ qui n'a pas de point critique en son lieu où le lagrangien est dérivable, donc ce point de maximum se trouve nécessairement en l'intersection du segment \mathbf{S} et la diagonale.

d'un unique point d'équilibre $(1, 1)$. On vérifie que la fonction $H : (p_1, p_2) \mapsto p_1 p_2 \exp(-(p_1^2 + p_2^2)/2)$ est constante le long de chaque trajectoire :

$$\frac{d[H(p_1(t), p_2(t))]}{dt} = \langle \nabla H, \mathbf{p}' \rangle = [p_2 - p_1^2 p_2] p_1' + [p_1 - p_2^2 p_1] p_2' \exp(-\|\mathbf{p}'\|^2/2)$$

et donc, si $\tilde{H}(t) = \exp(\|\mathbf{p}'\|^2/2) \langle \nabla H, \mathbf{p}' \rangle$,

$$\begin{aligned} \tilde{H}(t) &= (p_2 - p_1^2 p_2) \left[\frac{-p_2}{p_1 + p_2} + \frac{1}{1 + p_1} \right] + (p_1 - p_2^2 p_1) \left[\frac{-1}{1 + p_2} + \frac{p_1}{p_1 + p_2} \right] \\ &= \frac{-p_2(p_2 - p_1^2 p_2) + p_1(p_1 - p_2^2 p_1)}{p_1 + p_2} + \frac{p_2 - p_1^2 p_2}{1 + p_1} - \frac{p_1 - p_2^2 p_1}{1 + p_2} \\ &= \frac{p_1^2 - p_2^2}{p_1 + p_2} + p_2(1 - p_1) - p_1(1 - p_2) = 0 \end{aligned}$$

◁

2.6 Facteur intégrant

Considérons le système

$$x' = -Q(x, y), \quad y' = P(x, y)$$

En dehors des zéros de P et Q , les fonctions $t \rightarrow x(t)$ et $t \rightarrow y(t)$ sont localement des difféomorphismes, on peut considérer la fonction y comme fonction de x , i. e. la fonction \mathbf{y} telle que $\mathbf{y}(x) = y(t(x))$ qui vérifie l'ÉD

$$\mathbf{y}'(x) = \frac{d}{dx} [y(t(x))] = \frac{dy}{dt}(t(x)) \frac{dt}{dx}(x) = \frac{dy}{dt}(t(x)) / \frac{dx}{dt}(t(x)) = \frac{P(x, y(t(x)))}{-Q(x, y(t(x)))}$$

soit

$$P(x, \mathbf{y}(x)) + Q(x, \mathbf{y}(x)) \mathbf{y}'(x) = 0 \quad (2.10)$$

parfois notée

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

On confondra les fonctions y (de la variable t) et \mathbf{y} (de la variable x), le contexte les différenciant et au risque de méprises.

DÉFINITION 2.3: L'ÉD $P(x, y) + Q(x, y) \mathbf{y}'(x) = 0$ est dite exacte s'il existe une fonction $(x, y) \mapsto \Phi(x, y)$, dite primitive ou potentiel, telle que

$$P(x, y) = \partial_x \Phi(x, y), \quad Q(x, y) = \partial_y \Phi(x, y) \quad (2.11)$$

i. e. le vecteur (P, Q) est le gradient de la fonction Φ .

Cette définition est justifiée par la proposition

PROPOSITION 2.2: L'équation $P(x, y) + Q(x, y) \mathbf{y}' = 0$ est exacte si et seulement si

$$\partial_y P(x, y) = \partial_x Q(x, y). \quad (2.12)$$

Si $P(x, y) + Q(x, y) \mathbf{y}' = 0$ est exacte avec primitive Φ , alors la solution y de (2.10) est définie implicitement par $\Phi(x, y(x)) = C$ pour une certaine constante C . Autrement dit la trajectoire déterminée par la solution y est incluse dans la ligne de niveau $\{\Phi(x, y) = C\}$.

DÉMONSTRATION. La première partie de l'énoncé est prouvée par la formule (5.2) de l'exemple 5.1 du chapitre 5.

Pour l'assertion finale, il suffit de remarquer que

$$\frac{d}{dx} [\Phi(x, \mathbf{y}(x))] = \partial_x \Phi(x, \mathbf{y}(x)) + \partial_y \Phi(x, \mathbf{y}(x)) \mathbf{y}'(x) = P(x, \mathbf{y}(x)) + Q(x, \mathbf{y}(x)) \mathbf{y}'(x).$$

et donc que la fonction $x \mapsto \Phi(x, y(x))$ est constante. \square

\triangle REMARQUE 2.5: Si P est fonction de x seulement et Q une fonction de y seulement, alors l'équation $P(x) + Q(y)y' = 0$ est exacte. Dans ce cas, la fonction y vérifie l'ÉD séparable $y' = -P(x)/Q(y)$. ∇

\blacktriangleright EXEMPLES 2.10:

2.10.1 L'équation $y^4 - 2 + 4xy^3y' = 0$, dont les membres vérifient (2.12), a comme potentiel $\Phi(x, y) = xy^4 - 2y$

2.10.2 L'équation $(2x - y^2)dx + 2xydy = 0$ n'est pas exacte car $\partial_y(2x - y^2) \neq \partial_x(2xy)$. L'équation $(2x - y^2)dx - 2xydy = 0$ est exacte, avec potentiel $\Phi(x, y) = x^2 - y^2x$: le long de chaque solution on a donc $x^2 - xy^2 = C$ soit $y(x) = \pm \sqrt{x - C/x}$

2.10.3 L'équation

$$[y \cos(xy) + y/x + 2x] + [x \cos(xy) + \ln x + e^y] y = 0$$

a comme potentiel $\Phi(x, y) = \sin(xy) + y \ln x + e^y$ \blacktriangleleft

Si $Pdx + Qdy = 0$ n'est pas exacte, on peut chercher une fonction $F(x, y)$ telle que $FPdx + FQdy = 0$ le soit: un tel F est appelé *facteur intégrant*. L'exactitude est équivalente à l'équation $\partial_y(FP) = \partial_x(FQ)$, soit

$$F(\partial_y P - \partial_x Q) = Q\partial_x F - P\partial_y F$$

Cette équation est difficilement résolue, sauf dans certains cas. Par exemple, si F est indépendant de y de la forme $F(x, y) = f(x)$, alors l'équation précédente prend la forme

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\partial_x F(x, y)}{F(x, y)} = \frac{\partial_y P(x, y) - \partial_x Q(x, y)}{Q(x, y)} \quad (2.13)$$

Si la quantité $(\partial_y P - \partial_x Q)/Q$ ne dépend que de x , la fonction F obtenue par l'ÉD (2.13) donnera alors la solution. Pareillement, si $(\partial_x Q - \partial_y P)/P$ ne dépend que de y , on cherchera F sous la forme $F(x, y) = f(y)$ en résolvant l'ÉD $f'(y)/f(y) = -(\partial_x Q - \partial_y P)/P$. On peut aussi chercher des facteurs intégrants de la forme $f(x + y)$, ce qui amènera l'équation

$$\frac{\partial_y P - \partial_x Q}{Q - P} = \left[\frac{f'(u)}{f(u)} \right]_{|u=x+y}.$$

qui sera résoluble si le membre de gauche est une fonction de $x + y$. Mais cela n'épuisera pas les facteurs intégrants (dont la plupart ne connaissent pas de formule explicite).

\blacktriangleright EXEMPLES 2.11:

2.11.1 L'équation $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$ n'est pas exacte. Cependant, on a

$$\frac{\partial_y P - \partial_x Q}{Q} = \frac{4y}{-2xy} = -\frac{2}{x},$$

et le dernier membre de (2.13) dépend que de x : on peut donc le résoudre avec F ne dépendant que de x , soit $F(x, y) = f(x) = \exp(-2 \int dx/x) = x^{-2}$ qui implique l'exactitude de

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2} dx + \frac{-2y}{x} dy = 0,$$

avec potentiel $V(x, y) = x - y^2 x^{-1}$, ce qui donne la solution définie implicitement $x - y(x)^2 x^{-1} = C$.

2.11.2 On peut retrouver la résolution d'une équation linéaire scalaire du premier ordre $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ en cherchant un facteur intégrant pour l'équation $(a(x)y(x) + b(x))dx - dy = 0$. Le membre de droite de (2.13) est $a/(-1)$, qui ne dépend que de x : on résout $f'_x/f = -a$, soit $f(x) = C \exp(-A(x))$ où A désigne une primitive⁵ de a . On a donc à chercher V tel que

$$\partial_x V(x, y) = e^{-A(x)}(a(x)y + b(x)), \quad \partial_y V(x, y) = -e^{-A(x)}$$

On résout la deuxième équation $V(x, y) = -e^{-A(x)}y + C(x)$ où C est une fonction ne dépendant que de x , puis on introduit ce $V(x, y)$ dans la première, soit

$$\partial_x V(x, y) = ae^{-A(x)}y + C'(x) = e^{-A(x)}(a(x)y + b(x))$$

ce qui donne $C(x) = \int_{t_0} [b(t)e^{-A(t)}] dt$ à une constante près. On a donc

$$V(x, y) = -e^{-A(x)}y + \int_{t_0} [b(x)e^{-A(x)}] dx$$

Ce potentiel V est constant le long d'une trajectoire. Si $-C$ est cette valeur, on obtient

$$y(x) = Ce^{A(x)} + \int_{t_0} [b(t)e^{A(x)-A(t)}] dt$$

ce qui est la solution trouvée précédemment dans le théorème 2.1. ◀

△ REMARQUE 2.6: Étant donné un couple de fonctions (P, Q) sur \mathbb{R}^2 , il existe toujours un facteur intégrant défini localement au voisinage d'un point $m_0 = (x_0, y_0)$ qui n'annule pas (P, Q) . L'existence globale d'un facteur intégrant sur \mathbb{R}^2 tout entier est souvent délicate. ▽

5. La fonction A dépend a priori d'une constante, qu'on néglige ici. On verra à la fin que cela n'a pas d'importance.

Chapitre 3

Systemes différentiels linéaires

```
sage: x = var(x); y1 = fonction('y1')(x)
sage: y2 = fonction('y2')(x); y3 = fonction('y3')(x)
sage: y = vector([y1, y2, y3])
sage: A = matrix([[2,-2,0],[-2,0,2],[0,2,2]])
sage: system = [diff(y[i], x) - (A * y)[i] for i in range(3)]
sage: desolve_system(system, [y1, y2, y3], ics=[0,2,1,-2])
[y1(x) == e^(-2*x) + e^(4*x),
y2(x) == 2*e^(-2*x) - e^(4*x),
y3(x) == -e^(-2*x) - e^(4*x)]
```

Ce chapitre est consacré à l'étude des ED de la forme $X' = AX + B$ où A est une matrice carrée d'ordre n et B un vecteur de \mathbb{R}^n . On va commencer par dégager des formes types d'ED, obtenues par des transformations de l'algèbre linéaire liées au changement de variable linéaire ou la conjugaison matricielle $A \rightarrow P^{-1}AP$. Cette étude sera précisée dans le cas de la dimension 2 dans la section suivante.

3.1 Systemes et équations linéaires

Une équation linéaire scalaire d'ordre k se ramène à une équation (matricielle) d'ordre 1. En effet, l'équation linéaire (scalaire)

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = b(t) \tag{3.1}$$

se réécrit sous la forme d'une ED linéaire du type $X' = AX+B$ où la fonction inconnue $X(t)$ est à valeurs vectorielles

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-2)}(t) \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \dots & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Si l'équation scalaire (3.1) est à coefficients constants, il en est de même pour l'équation d'ordre 1 associée et inversement. Pour une équation linéaire, la notion d'équation à coefficients constants est identique à celle d'équation autonome.

▷ EXEMPLE 3.1: L'équation du second ordre à coefficients constants $x'' = ax' + bx$ se ramène en posant $u = x, v = x'$ à l'équation

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ bu + av \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

avec pour matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$ ayant comme polynôme caractéristique $\lambda^2 - a\lambda - b$ de racines $\lambda_{\pm} = (a \pm \sqrt{a^2 + 4b})/2$. Cette équation coïncide avec celle obtenue en cherchant directement les solutions exponentielles $e^{\lambda t}$ de l'équation du second ordre à coefficients constants

$$[x'' - ax' - bx]_{x=e^{\lambda t}} = [\lambda^2 - a\lambda - b] e^{\lambda t}.$$

◀

Examinons le cas d'un système homogène à coefficients constants $X' = AX$. Remarquons que si V est un vecteur propre de A avec valeur propre λ , alors $X(t) = v(t)V$ est solution de l'ÉD $X' = AX$ si et seulement si

$$v'V = (vV)' = A(vV) = \lambda vV$$

i. e.

$$v' = \lambda v.$$

Ainsi, si $(\lambda_j, V_j)_{j=1}^n$ est une base d'éléments propres de A , la fonction $X : t \mapsto \sum_{j=1}^n x_j V_j$ est solution de $X' = AX$ si et seulement si on a le système

$$\sum_{j=1}^n x_j' V_j = \left(\sum_{j=1}^n x_j V_j \right)' = A \left(\sum_{j=1}^n x_j V_j \right) = \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j V_j$$

i. e.

$$x_j' = \lambda_j x_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

soit

$$x_j(t) = x_{j0} e^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad j = 1, \dots, n$$

ou encore

$$X(t) = \sum_{j=1}^n x_{j0} e^{\lambda_j(t-t_0)} V_j. \quad (3.2)$$

Si la matrice A est diagonalisable sur \mathbb{R} , la solution de l'équation $X' = AX$ est donc une somme de termes avec amplitude exponentielle. Si la diagonalisation a lieu sur \mathbb{C} , on peut considérer

- des solutions complexes (avec A à coefficients réels ou complexes) qui sont donc des sommes de termes à amplitude exponentielle

- la matrice réelle A avec des éléments propres réels et des éléments regroupés en paires $[(\lambda, \nu), (\bar{\lambda}, \bar{\nu})]$ conjugués l'un de l'autre, avec valeurs propres $\lambda, \bar{\lambda}$ non réelles. Les parties réelles et imaginaires de ces solutions complexes donnent des solutions réelles non triviales, à amplitudes du type $e^{\Re \lambda t} [\cos |\sin](\Im \lambda t)$, cf. ci-dessous.

On peut retrouver la résolution précédente dans un point de vue plus matriciel. Soit donc A et l'ÉD $X' = AX$. La matrice A est supposée diagonalisable. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs propres V_1, \dots, V_n : ses vecteurs colonne sont les vecteurs coordonnées des vecteurs propres de A avec $AP = PD_A$ où la matrice D_A est la matrice diagonale $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$; la fonction $t \mapsto X(t)$ est solution de $X' = AX$ si et seulement si $Y = P^{-1}X$ est solution de $Y' = D_A Y$ vu que

$$Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = [P^{-1}AP]P^{-1}X = D_A Y.$$

Une fois calculés P , P^{-1} et $D_A = P^{-1}AP$, vu que D_A est diagonale, la résolution de $Y' = D_A Y$ est aisée : une solution Y de $Y' = D_A Y$ donne $X = PY$ comme solution de l'ÉD $X' = AX$. Pareillement, la solution unique du problème de Cauchy $X' = AX, X(t_0) = X_0$ provient de celle du problème de Cauchy $Y' = D_A Y, Y(t_0) = Y_0$ avec $Y_0 = P^{-1}X_0$, soit $Y(t) = \text{diag}(y_{j0} e^{\lambda_j(t-t_0)})$.

Le cas des matrices non diagonalisables sera étudié ci-après en dimension 2.

3.2 Systèmes 2×2 à coefficients constants

Cette section a pour but l'examen des systèmes à coefficients constants (autonomes) $X' = AX + B$ où $X \in \mathbb{R}^2$ et A est une matrice d'ordre 2.

Les solutions de $X' = AX$ sont globales, comme cela a été indiqué dans le théorème 1.3. Comme toute ÉD autonome globale, si X en est solution, alors $X_T : t \mapsto X(t - T)$ est aussi solution : on prendra comme temps initial $t_0 = 0$. Les solutions X_A du système $X' = -AX$ sont celles de $X' = AX$ à changement d'orientation du temps : si X_A est solution de $X' = AX$, $t \in \mathbb{R} \mapsto X_A(-t)$ est solution de $X' = -AX$. L'origine est le seul PÉ de l'ÉD $X' = AX$ si A est inversible.

Si B est dans l'image de A , alors, avec C tel que $B = AC$, l'ÉD $X' = AX + B$ est équivalente à l'ÉD $Y' = AY$. Il suffit d'appliquer le changement par translation de fonctions $Y = X + C$:

$$Y' = (X + C)' = X' = AX + B = AX + AC = A(X + C) = AY.$$

Cette remarque s'applique en particulier lorsque A est inversible.

Le système $X' = AX$ est équivalent au système $Y' = A_P Y$ où $Y = PX$ et $A_P = PAP^{-1}$. On peut donc se limiter à l'étude des ÉD associées à des représentants A de classes de conjugaison de matrices. En dimension $n = 2$, une classe de conjugaison est caractérisée par deux valeurs propres (réelles ou complexes) et sa diagonalisabilité ou

non; en dimension supérieure, il faut faire appel à la théorie de réduction de Jordan ou de caractérisations analogues (décomposition $A = S + N$ avec $SN = NS$, S diagonalisable sur \mathbb{C} et N nilpotent).

Si B est hors de l'image de A (et dans ce cas A est singulière), il n'y a pas de PÉ et l'examen de l'ÉD se décompose en trois cas.

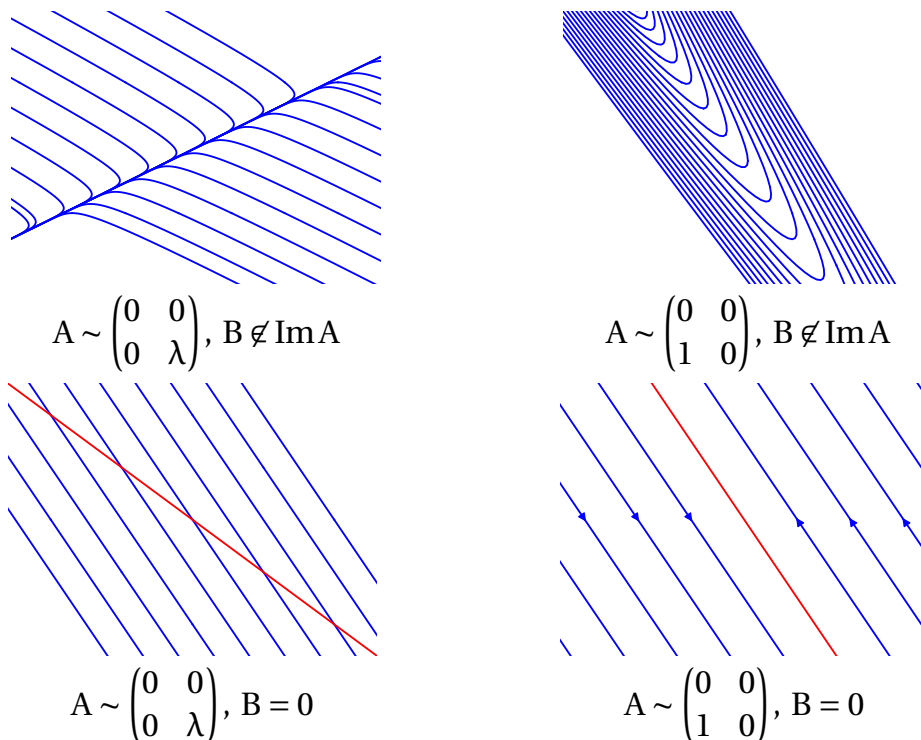


FIGURE III.1 – Portraits de phase type pour l'équation autonome $X' = AX + B$ avec A singulière. Les cas $A = 0$, avec B nul ou non nul, ne sont pas montrés.

1. La matrice A est nulle et B non nul : les trajectoires sont des droites de direction B . La solution est

$$X(t) = Bt, \quad t \in \mathbb{R}$$

2. La matrice A est diagonalisable, avec comme valeurs propres 0 et λ réelle non nulle. À conjugaison près, on peut prendre A de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. La condition $B = {}^T(b_1, b_2) \notin \text{Im} A = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est équivalente à $b_1 \neq 0$. Le système $x' = b_1, y' = \lambda y + b_2$, avec conditions initiales $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ a pour solution

$$x(t) = x_0 + b_1 t, \quad y(t) = (y_0 + b_2/\lambda)e^{\lambda t} - b_2/\lambda, \quad t \in \mathbb{R}.$$

avec pour équation de la trajectoire (paramétrée par l'abscisse x)

$$y = (y_0 + b_2/\lambda)e^{\lambda(x-x_0)/b_1} - b_2/\lambda.$$

Les trajectoires sont les courbes exponentielles $y = (y_0 + b_2/\lambda)e^{\lambda(x-x_0)/B_1} - b_2/\lambda$, en plus de la droite horizontale $y = -b/\lambda$.

3. La matrice A n'est pas diagonalisable. À conjugaison près, la matrice A a la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. À nouveau, la condition $(b_1, b_2) \notin \text{Im}A = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ signifie $b_1 \neq 0$. L'ÉD est équivalente au système $(x' = b_1, y' = x + b_2)$ de solution

$$x(t) = x_0 + b_1 t, \quad y(t) = y_0 + (x_0 + b_2)t + b_1 t^2/2.$$

avec comme trajectoires des paraboles $y = y_0 + (x_0 + b_2)(x - x_0)/b_1 + (x - x_0)^2/(2b_1)$.

Le cas de A singulière avec B dans l'image de A , soit $B = AC$, donne lieu aussi à trois cas. Quitte à une translation $X \rightarrow X + C$, on se ramène au cas homogène $X' = AX$.

1. La matrice A est nulle. Tout point est d'équilibre et il n'y a pas de dynamique.
2. La matrice A est diagonalisable avec une valeur propre λ non nulle. La matrice A est conjuguée à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. L'ensemble des PÉ est le noyau $\ker A = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'ÉD $X' = AX$ est équivalente au système $x' = 0, y' = \lambda y$ de solution $x = x_0, y = y_0 e^{\lambda t}$. Les trajectoires sont des demi-droites issues d'un point de la droite des PÉ dans la direction du vecteur propre v associé à la valeur propre λ .
3. La matrice A n'est pas diagonalisable : elle est conjuguée à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

L'ensemble des PÉ est le noyau $\ker A = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de A . L'ÉD est équivalente au système $x' = 0, y' = x$ de solution $x = x_0, y = y_0 + x_0 t$. Les trajectoires sont des droites dans la direction du noyau de A , parcourues en sens opposés de part et d'autre de la droite des PÉ.

Décrivons maintenant les différents portraits plans pour des ÉD $X' = AX$ avec A régulière.

1. La matrice A est diagonalisable, avec deux valeurs propres λ, μ réelles (éventuellement identiques). À conjugaison près, A est diagonale $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, déterminant l'ÉD $x' = \lambda x, y' = \mu y$ avec comme solution $x(t) = x_0 e^{\lambda t}, y(t) = y_0 e^{\mu t}$. Les demi-axes sont des trajectoires, si bien qu'une trajectoire contenue dans un quadrant y reste pour tout temps (sinon on aurait deux trajectoires se rencontrant, contrairement à l'unicité assurée pour le problème de Cauchy). Si $t \mapsto (x(t), y(t))$ est une trajectoire, il en est de même de la courbe $t \mapsto (\varepsilon x(t), \eta y(t))$, avec $\varepsilon^2 = \eta^2 = 1$: cela établit une correspondance entre les courbes situées dans les différents quadrants : on peut donc se limiter à étudier les trajectoires

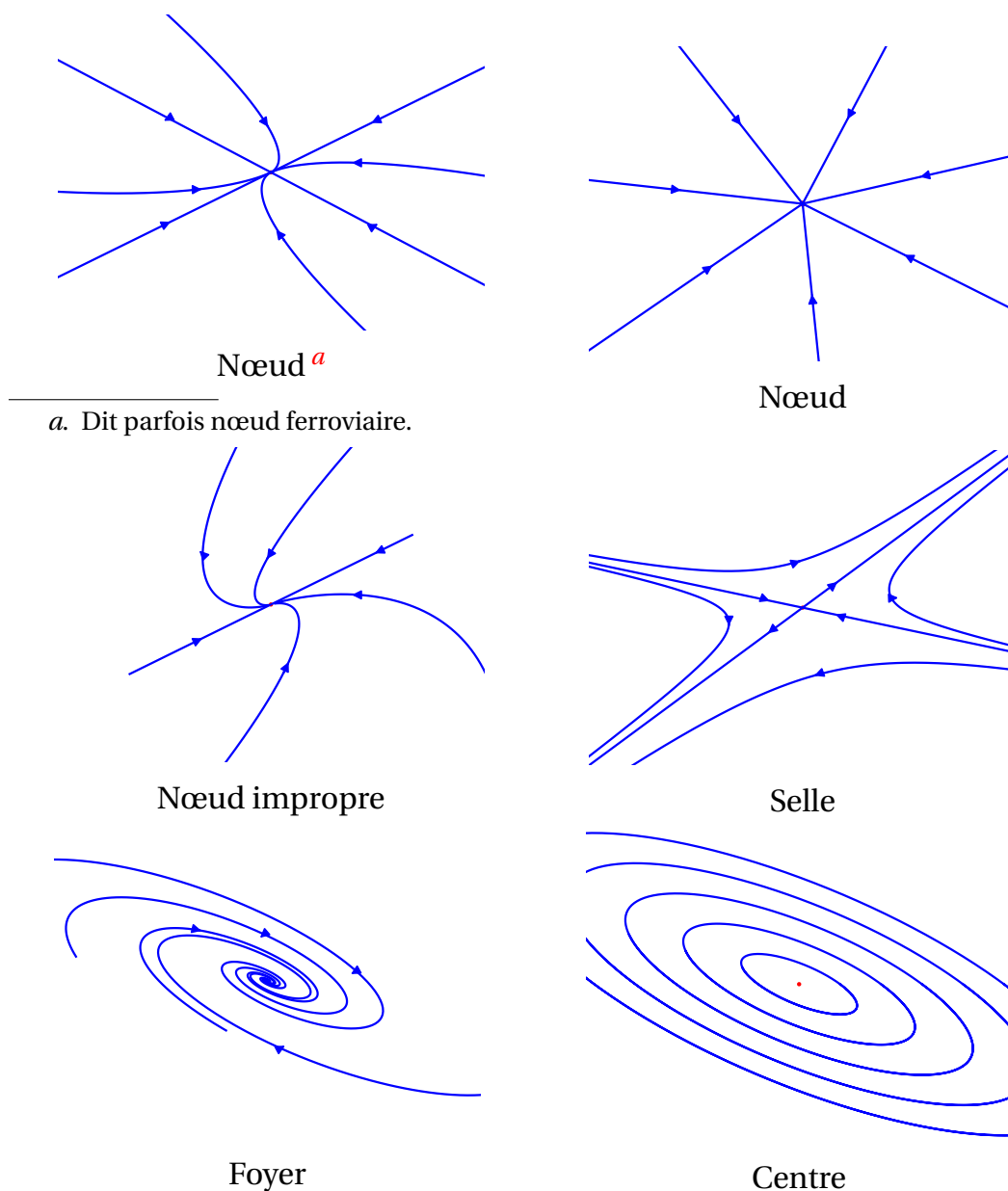


FIGURE III.2 – Les six portraits de phase type pour l'équation linéaire autonome $X' = AX + B$ avec A inversible.

du premier quadrant (points de coordonnées positives). La courbe paramétrée donnant la trajectoire peut être considérée comme le graphe de la fonction

$$x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \frac{y_0}{x_0^{\mu/\lambda}} x^{\mu/\lambda} \in \mathbb{R}^+.$$

- a) si λ, μ sont de même signe, la trajectoire est prolongeable à l'origine, tangente à l'axe des x ou à l'axe des y suivant que $\mu > \lambda$ ou $\lambda > \mu$. Le portrait est dit *nœud stable* si les valeurs propres sont négatives, *nœud instable* sinon. Pour les trajectoires autres que les demi-axes (dirigés par un des deux vecteurs propres), on remarque qu'au voisinage du point d'équi-

libre la trajectoire est (presque) parallèle à un des vecteurs propres, alors qu'elle devient au voisinage de l'infini (quasiment) plutôt parallèle à la direction de l'autre. Si $\mu > \lambda$, la trajectoire se prolonge différemment en $x = 0$, de manière \mathcal{C}^∞ si et seulement si μ/λ est entier. Si $\lambda = \mu$, les trajectoires sont des demi-droites issues de l'origine, on dit qu'on a un *nœud* propre.

- b) Si λ, μ sont de signes opposés, la trajectoire est asymptote aux axes limitant le quadrant qui la contient. On dit que le portrait est une *selle*. Si $\lambda = -\mu$, ces trajectoires sont des hyperboles.
2. Si A n'est pas diagonalisable avec une valeur propre réelle non nulle λ d'espace propre unidimensionnel $\mathbb{R}v$, la matrice A est, à conjugaison près, de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ déterminant le système $x' = \lambda x, y' = x + \lambda y$ avec solution

$$x = x_0 e^{\lambda t}, \quad y = e^{\lambda t} (y_0 + x_0 t).$$

Dans la direction du vecteur propre v (coordonnée y), les deux demi-droites $\pm \mathbb{R}^{+*} v$ issues de l'origine sont des trajectoires. Les autres trajectoires sont incluses dans l'un des demi-plans bordés par la droite $\mathbb{R}v$. Vu que λ est non nul, chacune de ces trajectoires s'identifie au graphe de la fonction,

$$x \in \mathbb{R}^\pm \longmapsto \frac{y_0}{x_0} x + \frac{x \ln(x/x_0)}{\lambda} = \left(\frac{y_0}{x_0} - \frac{\ln x_0}{\lambda} \right) x + \frac{x \ln x}{\lambda},$$

avec x du signe de x_0 .

Le portrait est appelé *nœud impropre*. Mises à part les trajectoires constituées par les demi-droites $\pm \mathbb{R}^{+*}$, les trajectoires sont parallèles à la direction de l'espace propre, tant au voisinage du PÉ que de l'infini, ce qui force la courbe-trajectoire à tourner convenablement.

3. Une matrice A sans valeur propre réelle possède deux valeurs propres non réelles $\rho e^{\pm i\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \rho > 0$) et est conjuguée à la matrice¹

$$\tilde{A}_{\rho,\alpha} = \rho \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

dont les éléments propres sont $(\rho e^{\pm i\alpha}, (1, \pm i))$. La matrice $\tilde{A}_{\rho,\alpha}$ induit le système

$$x' = \rho(\cos \alpha x - \sin \alpha y), \quad y' = \rho(\sin \alpha x + \cos \alpha y).$$

1. Soit $D = \text{diag}(\rho e^{i\alpha}, \rho e^{-i\alpha})$. Il existe P, P_0 complexes inversibles tels que $AP = PD$, $A_{\rho,\alpha} P_0 = P_0 D$. Ainsi la matrice $Q = P_0 P^{-1}$ régulière complexe vérifie $Q^{-1} A Q = A_{\rho,\alpha}$. Le polynôme $q(x) = \det(\Re Q + x \Im Q)$ est non nul, car non nul en $x = i$: il existe donc x réel tel que $\Re Q + x \Im Q$ soit inversible et conjugué (dans \mathbb{R}) A à $A_{\rho,\alpha}$.

Étudier les trajectoires dans le complémentaire de l'origine en considérant les coordonnées polaires

$$(r, \theta) \longmapsto (x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)$$

d'inverse local

$$(x, y) \longmapsto (r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan(y/x))$$

permet de préciser simplement leur description géométrique. Vu que $r^2 = x^2 + y^2$, on a la relation entre dérivées par rapport au temps

$$\begin{aligned} r r' &= x x' + y y' = x \rho [\cos \alpha x - \sin \alpha y] + y \rho [\sin \alpha x + \cos \alpha y] \\ &= \rho \cos \alpha (x^2 + y^2) = \rho \cos \alpha r^2 \end{aligned}$$

soit $r' = \rho \cos \alpha r$. Pour θ , on a $x \tan \theta = y$, d'où $x' \tan \theta + x(1 + \tan^2 \theta) \theta' = y'$ soit

$$[\rho(\cos \alpha x - \sin \alpha y)] y/x + x(1 + \tan^2 \theta) \theta' = \rho(\sin \alpha x + \cos \alpha y).$$

et

$$\begin{aligned} x(1 + \tan^2 \theta) \theta' &= \rho(\sin \alpha x + \cos \alpha y) - [\rho(\cos \alpha x - \sin \alpha y)] y/x \\ &= \rho \sin \alpha (x^2 + y^2) / x = \rho \sin \alpha (x^2 + \tan^2 \theta x^2) / x \end{aligned}$$

soit $\theta' = \rho \sin \alpha$. Le système

$$r' = \rho \cos \alpha r, \quad \theta' = \rho \sin \alpha,$$

a comme solutions

$$r(t) = e^{\rho \cos \alpha t} r_0, \quad \theta(t) = \theta_0 + \rho \sin \alpha t,$$

- a) Si $\cos \alpha$ est non nul, toute trajectoire est une spirale logarithmique, d'équation polaire

$$r(\theta) = \exp \left[\frac{\theta - \theta_0}{\tan \alpha} \right] r_0, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

On dit qu'on a un *foyer stable* si $\cos \alpha < 0$ ce qui implique $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0$, *foyer instable* si $\cos \alpha > 0$. Le sens de rotation des spirales dépend du signe $\sin \alpha$, sens trigonométrique si $\sin \alpha < 0$.

- b) Si $\cos \alpha$ est nul (et donc $\sin \alpha = \pm 1$ noté ε), les trajectoires paramétrées par le temps sont définies en coordonnées polaires suivant

$$r(t) = r_0, \quad \theta(t) = \theta_0 + \rho \varepsilon t$$

avec $\varepsilon^2 = 1$, parcourues dans le sens trigonométrique si et seulement si $\varepsilon = 1$. Cette situation est dite *centre*.

trA	détA	Δ_A	Type	trA	détA	Δ_A	Type
-	+	+	Nœud stable		-	+	Selle
+	+	+	Nœud instable	-		-	Foyer stable
-	*	0	Nœud impropre stable	+		-	Foyer instable
+	*	0	Nœud impropre instable		1	-	Centre

TABLE III.1 – Les types de portraits plans pour l'ÉD linéaire $X' = AX$ avec A régulière. “*” signifie A non diagonalisable.

Les différents portraits de phase sont tracés dans la figure III.2. Ces différents cas peuvent être caractérisés par les signes de $\det A$, $\operatorname{tr} A$ et $\Delta_A = \operatorname{tr}^2(A) - 4 \det A$, comme l'indique le tableau III.1.

Si toute trajectoire convergente vers le PÉ x_e a la direction de sa tangente convergente, le PÉ est appelé *nœud*. Un nœud est dit *propre* si quelque soit $\theta \in \mathbb{R}$ il existe une trajectoire convergeant vers le PÉ dont la direction de la tangente tend vers θ . Parmi les portraits de phase linéaires avec A régulier, seul le cas $A = \lambda \mathbf{1}$ est un nœud propre.

3.3 Exponentielle de matrice

Commençons par rappeler le choix d'une norme matricielle sur l'espace \mathcal{M}_n des matrices carrées d'ordre n qui permettra d'établir des estimations sur des séries à valeur dans \mathcal{M}_n .

LEMME 3.1: Soit \mathbb{K} égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C} et $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne standard sur \mathbb{K}^n telle que $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$ pour $x = (x_j) \in \mathbb{K}^n$. La norme sur l'espace vectoriel \mathcal{M}_n des matrices d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} est définie comme

$$\|A\| = \sup_{\substack{X \in \mathbb{K}^n \\ \|X\|_2 \leq 1}} \|AX\|_2, \quad A \in \mathcal{M}_n.$$

Cette norme est compatible avec le produit matriciel, soit $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ pour A, B dans \mathcal{M}_n .

DÉMONSTRATION. Montrons que $A \in \mathcal{M}_n \mapsto \|A\|$ est une norme. Il y a trois propriétés à vérifier

1. L'application est à valeurs positives, nulle en A seulement si A est nulle : $\|A\| = 0$ implique $Ax = 0$ pour tout x de norme au plus 1, donc $Ay = \|y\|_2 A(y/\|y\|_2) = 0$ et par suite A est nul.
2. La deuxième propriété est l'homogénéité : Si λ est un scalaire, alors

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|\lambda Ax\| = |\lambda| \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\|,$$

soit $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$.

3. La troisième propriété est l'inégalité triangulaire.

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|(A + B)x\| \leq \sup_{\|x\|_2 \leq 1} [\|Ax\|_2 + \|Bx\|_2] \\ &\leq \sup_{\|y\|_2 \leq 1} \|Ay\|_2 + \sup_{\|z\|_2 \leq 1} \|Az\|_2 = \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

Pour la propriété sur la norme de la composée, nous avons pour A et B non nuls et x non nul de norme au plus 1 et avec Bx non nul

$$\|ABx\|_2 = \left\| A \left[\frac{Bx}{\|Bx\|_2} \right] \right\|_2 \left\| B \left[\frac{x}{\|x\|_2} \right] \right\|_2 \|x\|_2 \leq \|A\| \|B\|$$

Cette inégalité $\|ABx\|_2 \leq \|A\| \|B\|$ est aussi vérifiée si $Bx = 0$, il en découle

$$\|AB\| = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|ABx\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Remarquons les égalités $\|A\| = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sup_{x \neq 0} \|Ax\|_2 / \|x\|_2$. □

DÉFINITION 3.1: Soit A une matrice carrée d'ordre n , à coefficients réels ou complexes. Son exponentielle e^A est définie par la série

$$e^A = \mathbf{I} + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

série normalement convergente sur toute boule $\{\|A\| \leq R\}$. Cette application exponentielle vérifie les propriétés suivantes.

1. Soit P inversible. Alors $e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}$.
2. L'application $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tA}$ est dérivable et $(e^{tA})' = e^{tA}A = Ae^{tA}$.
3. Si A et B commutent (i. e. $AB = BA$), alors $e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$. Cette égalité ne vaut pas en général pour des matrices ne commutant pas.
4. L'exponentielle e^A est inversible, avec pour inverse e^{-A} .
5. Si A est diagonalisable de la forme $A = P^{-1}DP$ avec P inversible et D diagonale de la forme $D = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$, alors $e^A = P^{-1}e^D P = P^{-1} \text{diag}[e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}] P$.
6. Si N est une matrice nilpotente (i. e. $N^k = 0$ pour k suffisamment grand), alors e^{tN} est un polynôme en t à valeurs matricielles, vu que $e^{tN} = \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{t^\ell N^\ell}{\ell!}$.
7. $e^A = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\mathbf{I} + \frac{A}{k} \right)^k$.

DÉMONSTRATION. La série $\sum_{k \geq 0} A^k / k!$ est absolument convergente

$$\left\| \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k \geq 0} \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k \geq 0} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|},$$

normalement convergente sur toute boule $\{A \in \mathcal{M}_n, \|A\| \leq R\}$. La fonction est bien définie comme fonction continue. Des majorations analogues sur les dérivées des termes de la série assure aussi du caractère \mathcal{C}^∞ de cette fonction exponentielle.

1. On a

$$\begin{aligned} P^{-1}e^A P &= \lim_{K \rightarrow +\infty} P^{-1} \left[\sum_{k=0}^K \frac{A^k}{k!} \right] P = \lim_{K \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^K \frac{[P^{-1}A^k P]}{k!} \\ &= \lim_{K \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^K \frac{[P^{-1}A P]^k}{k!} = e^{P^{-1}A P}. \end{aligned}$$

2. La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tA} \in \mathcal{M}_n$ est une série entière de rayon de convergence infini : on peut dériver terme à terme

$$(e^{tA})' = \sum_{k \geq 0} \left[\frac{A^k t^k}{k!} \right]' = \sum_{k \geq 0} \left[\frac{A^k k t^{k-1}}{k!} \right] = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} \right] = A \sum_{k \geq 1} \left[\frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} \right] = A e^{tA}$$

et on montre de même $(e^{tA})' = e^{tA}A$. □

3. Si les matrices A et B commutent, la formule du binôme est valable

$$(A+B)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A^j B^{k-j}.$$

Vue l'absolue convergence de la série donnant e^{A+B} avec $\|e^{A+B}\| \leq e^{\|A\|+\|B\|}$, on peut sommer par paquets : on considère le secteur $\{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2, k \geq \ell\}$, apparaissant comme l'union disjointe des segments $S_k = \{(k, j), j \in \llbracket 0, k \rrbracket\}, k \geq 0$, comme l'union disjointe des demi-droites $D_j = \{(k, j) \in \mathbb{N}^2, k \geq j\}, j \geq 0$:

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{k \geq 0} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} \left[\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{A^j B^{k-j}}{k!} \right] = \sum_{k \geq 0} \sum_{j=0}^k \frac{A^j}{j!} \frac{B^{k-j}}{(k-j)!} \\ &= \sum_{j \geq 0} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \frac{B^{k-j}}{(k-j)!} = \sum_{j \geq 0} \left[\frac{A^j}{j!} \left[\sum_{k=j}^{\infty} \frac{B^{k-j}}{(k-j)!} \right] \right] = \sum_{j \geq 0} \left[\frac{A^j}{j!} e^B \right] = e^A e^B \end{aligned}$$

4. En particulier, les matrices A et $-A$ commutant, on obtient

$$e^A e^{-A} = e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$$

ainsi e^A est inversible, d'inverse e^{-A} .

5. Utiliser le premier item
6. Reprendre la définition de l'exponentielle.
7. Cet asymptotique est valable pour A de dimension 1 réelle ou complexe, puis par suite pour A diagonalisable (à valeurs propres réelles ou complexes). Elle l'est aussi si A est nilpotente (considérer le développement polynomial des exponentielles de nilpotent). On conclue en invoquant la décomposition $A = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotent, les matrices D et N commutant :

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{1} + \frac{D+N}{k} \right)^k &= \sum_{k \geq j \geq k-n} \binom{k}{j} \left(\mathbf{1} + \frac{D}{k} \right)^j \left(\frac{N}{k} \right)^{k-j} \\ &\sim \sum_{k \geq j \geq k-n} \binom{k}{j} \left(\mathbf{1} + \frac{D}{k} \right)^j \left(\frac{N}{k} \right)^{k-j} \\ &\sim e^D \sum_{0 \leq k-j \leq n} \binom{k}{j} \left(\frac{N}{k} \right)^{k-j} = e^D e^N = e^{D+N} \end{aligned}$$

où le n a été choisi tel que $N^n = 0$ (rendant les sommes finies et justifiant les équivalents).

△ REMARQUE 3.1: L'hypothèse de commutativité $AB = BA$ est essentielle dans l'alinéa 3. Par exemple, soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices A et B ne commutent pas vu $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Par ailleurs on a $A^2 = B^2 = 0$, ainsi

$$\begin{aligned} e^A &= \mathbf{1} + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, & e^B &= \mathbf{1} + B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ e^A e^B &= \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 1+ab \end{pmatrix}, & e^B e^A &= \begin{pmatrix} 1+ab & b \\ a & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

avec, vu $(A+B)^2 = ab\mathbf{1}$,

$$e^{A+B} = \sum_{k \geq 0} (ab)^k \left[\frac{\mathbf{1}}{(2k)!} + \frac{A+B}{(2k+1)!} \right] = \operatorname{ch} \sqrt{ab} \mathbf{1} + \frac{\operatorname{sh} \sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} (A+B) \quad (3.4)$$

avec le sens convenable pour $\operatorname{ch} \sqrt{x}$ et $\operatorname{sh} \sqrt{x} / \sqrt{x}$ en terme de série entière. En fait la formule (3.4) est le cas particulier du calcul de l'exponentielle d'une matrice d'ordre

2. En effet, soit $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \eta \end{pmatrix}$ et introduisons

$$\mu = (\alpha + \eta)/2, \quad \delta = (\alpha - \eta)/2, \quad \Delta = \delta^2 + \beta\gamma, \quad \operatorname{quad} N = M - \mu \mathbf{1}.$$

On vérifie simplement que $N^2 = \Delta \mathbf{1}$. Il en résulte

$$e^M = e^{\mu \mathbf{1} + N} = e^\mu e^N = e^\mu \sum_{k \geq 0} \left[\frac{\Delta^k \mathbf{1}}{(2k)!} + \frac{\Delta^k N}{(2k+1)!} \right] = e^\mu \left[\cosh \sqrt{\Delta} \mathbf{1} + \frac{\sinh \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} N \right],$$

ce qui redonne effectivement la formule (3.4) dans le cas particulier $M = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$. ∇

COROLLAIRE 3.1: Soit A matrice carrée d'ordre n et $f : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t) \in \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Le problème de Cauchy $X'(t) = AX(t) + f(t), X(0) = X_0$ a comme solution la fonction

$$t \in \mathbb{R} \mapsto e^{At}X_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Si $B \in \mathbb{R}^n$ est dans l'image de A , alors $\int_0^t e^{A(t-s)}Bdt = (e^{At} - 1)C$ où $C \in \mathbb{R}^n$ vérifie $B = AC$. En particulier si A est inversible, alors la solution du problème de Cauchy à coefficients constants $X' = AX + B, X(0) = X_0$ prend la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto e^{At}X_0 + (e^{At} - 1)A^{-1}B. \quad (3.6)$$

DÉMONSTRATION. Par multiplication à gauche par le facteur intégrant e^{-At} , l'ÉD est équivalente à $(e^{-At}X(t))' = e^{-At}f(t)$ d'où

$$e^{-At}X(t) - X_0 = \int_0^t e^{-As}f(s)ds$$

et

$$X(t) = e^{At}X_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds,$$

ce qui montre la validité de (3.5). Si $f(t) \equiv B = AC$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{A(t-s)}ACds &= e^{At} \left[\int_0^t e^{-As}Ads \right] C = e^{At} \left[\int_0^t \frac{d}{ds} [-e^{-As}] ds \right] C \\ &= e^{At} [1 - e^{-At}]C = e^{At} [1 - e^{-At}]A^{-1}B. \end{aligned}$$

et le résultat si A est inversible. \square

Δ **REMARQUE 3.2:** A priori définie pour A inversible, l'expression $(e^{tA} - 1)A^{-1}$ est la série entière $\sum_{n \geq 1} t^n A^{n-1} / n!$ définie pour toute matrice A . L'identité (3.6) définit une solution pour le PC $X' = AX + B, X'(0) = X_0$ quelle que soit la matrice A . ∇

PROPOSITION 3.1: Soit A matrice dont le spectre de valeurs propres est inclus dans le demi-plan $\Re \lambda < -\alpha$ avec $\alpha > 0$. Il existe alors une norme $\| \cdot \|_*$ et une constante M telle que $\|e^{At}\|_* \leq Me^{-\alpha t}$ pour $t \geq 0$.

DÉMONSTRATION (ESQUISSE). Supposons tout d'abord A diagonalisable sur \mathbb{R} : il existe une matrice P telle que la conjuguée $P^{-1}AP$ soit diagonale : $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda)_{\lambda \in \text{spec}A}$ avec tous les λ réels et donc $P^{-1}e^{tA}P = \text{diag}(e^{t\lambda})_{\lambda \in \text{spec}A}$. Prenons la norme euclidienne $\| \cdot \|_v$ telle que la base (ν_λ) soit orthonormée. Vu que

$$\left\| \text{diag}(e^{t\lambda})_{\lambda \in \text{spec}A} X \right\|_v^2 = \sum_{\lambda} e^{2t\lambda} x_\lambda^2 \leq e^{-2\alpha t} \|X\|_v^2, \quad X = (x_\lambda) = \sum_{\lambda} x_\lambda \nu_\lambda \quad (3.7)$$

soit $\|\text{diag}(e^{t\lambda})_{\lambda \in \text{spec} A}\|_{\nu} \leq e^{-\alpha t}$, on obtient

$$\|e^{tA}\| = \|PP^{-1}e^{tA}PP^{-1}\| \leq \|P\|\|P^{-1}\|M_{\nu}\|P^{-1}e^{tA}P\|_{\nu} \leq \|P\|\|P^{-1}\|M_{\nu}e^{-\alpha t}.$$

avec M_{ν} une constante telle que

$$\|L\| \leq M_{\nu}\|L\|_{\nu}, \quad L \in M(n).$$

Une matrice (réelle) A diagonalisable sur \mathbb{C} est conjuguée à une matrice (réelle) diagonale par blocs de dimension 1 (associés à des directions propres réelles de A) et des blocs de dimension du type (3.3) (associés à des valeurs propres complexes non réelles), qui permet d'avoir une estimation analogue à celle de (3.7).

Si la matrice A n'est pas diagonalisable, on a une diagonalisation de A par blocs d'ordre n_{λ} dits de Jordan donnant des majorations exponentielles/polynomiales du type $t^p e^{t\lambda}$ ($0 \leq p \leq n_{\lambda}$) majorées par $M_{p,\lambda} e^{-\alpha t}$ pour $t \geq 0$. \square

3.4 Des exemples de calcul

D'après la section précédente, la résolution de $X' = AX$ passe donc par une conjugaison, ou en d'autres termes, la définition d'une matrice de passage. En dimension $n = 2$, les calculs sont relativement simples

1. Supposons A diagonalisable sur \mathbb{R} : A a un spectre d'éléments propres $[(\lambda_1, \nu_1), (\lambda_2, \nu_2)]$. On considère la matrice de passage $P = (\nu_1 | \nu_2)$ dont les deux vecteurs colonnes sont les vecteurs propres et qui vérifie

$$AP = (A\nu_1 | A\nu_2) = (\lambda_1 \nu_1 | \lambda_2 \nu_2) = (\nu_1, \nu_2) \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = P \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2),$$

soit $A = P \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) P^{-1}$, ce qui permet de calculer l'exponentielle à conjugaison près

$$e^{tA} = P^{-1} \text{diag}(e^{t\lambda_1}, e^{t\lambda_2}) P$$

Il faut donc calculer les éléments propres $(\lambda_j, \nu_j)_{j=1}^2$ et la matrice inverse $P^{-1} = (\nu_1 | \nu_2)^{-1}$.

Par exemple, considérons $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Cette matrice a pour éléments propres

$$[(-4, (7, -2)), (5, (1, 1))].$$

On prend donc $P = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et on calcule

$$P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad e^{tA} = P \text{diag}(e^{-4t}, e^{5t}) P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2e^{5t} + 7e^{-4t} & 7e^{5t} - 7e^{-4t} \\ 2e^{5t} - 2e^{-4t} & 7e^{5t} + 2e^{-4t} \end{pmatrix}$$

et la solution du problème de Cauchy $X' = AX, X(0) = X_0$

$$X(t) = e^{tA} X_0 = e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} (2e^{5t} + 7e^{-4t})x_0 + (7e^{5t} - e^{-4t})y_0 \\ (2e^{5t} - 2e^{-4t})x_0 + (7e^{5t} + 2e^{-4t})y_0 \end{pmatrix}.$$

2. Supposons A diagonalisable sur \mathbb{C} , avec éléments propres $(\lambda \pm i\mu, \nu \pm i\omega)$. Les équations aux éléments propres

$$A(\nu \pm i\omega) = (\lambda \pm i\mu)(\nu \pm i\omega)$$

(invariantes par conjugaison complexe) sont équivalentes au système

$$Av = \lambda v - \mu w, \quad Aw = \lambda w + \mu v. \quad (3.8)$$

Alors la matrice $P = (w|v)$ est une bonne matrice de passage au sens où les matrices suivantes sont égales grâce à la relation (3.8)

$$AP = A(w|v) = (Aw|Av) \quad P \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} = (w|v) \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda w + \mu v | \lambda v - \mu w),$$

ce qui conjugue A à la matrice

$$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \mathbf{1} + \mu R \text{ où } R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dont l'exponentielle est, vu $R^2 = -\mathbf{1}$, aisément calculable,

$$\begin{aligned} e^J &= e^{\lambda \mathbf{1} + \mu R} = e^\lambda e^{\mu R} = e^\lambda \sum_{k \geq 0} \left[\frac{(-1)^k \mu^{2k}}{(2k)!} \mathbf{1} + \frac{(-1)^k \mu^{2k+1} R}{(2k+1)!} \right] \\ &= e^\lambda [\cos \mu \mathbf{1} + \sin \mu R] = e^\lambda \begin{pmatrix} \cos \mu & -\sin \mu \\ \sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc

$$e^{tA} = P e^{tJ} P^{-1} = e^{t\lambda} P \begin{pmatrix} \cos(t\mu) & -\sin(t\mu) \\ \sin(t\mu) & \cos(t\mu) \end{pmatrix} P^{-1} \quad (3.9)$$

Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ a comme éléments propres

$$(3 \pm i, (1, 1 \pm i)) = \left(3 \pm i, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

La matrice de passage est donc $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où la matrice e^{tJ} sous la forme $e^{tJ} = e^{3t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. On en déduit, d'après (3.9)

$$\begin{aligned} e^{tA} &= P e^{tJ} P^{-1} = e^{3t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= e^{3t} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & \sin t \\ -2 \sin t & \cos t + \sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et la solution du problème de Cauchy

$$X(t|(x_0, y_0)) = e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} (\cos t - \sin t)x_0 + (\sin t)y_0 \\ -2(\sin t)x_0 + (\cos t + \sin t)y_0 \end{pmatrix}.$$

3. Supposons A non diagonalisable, avec λ valeur propre² de A , racine double du polynôme caractéristique de A . Montrons que la matrice A est conjuguée à la matrice $A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$. Il s'agit de déterminer une matrice P conjuguant A en A_λ , *i. e.* $A_\lambda = PAP^{-1}$, ou encore $A_\lambda P = PA$: convenons que la seconde colonne de P reprenne un vecteur propre v de A , la première colonne étant notée u , soit donc $P = (u|v)$. L'équation $PA_\lambda = AP$ est équivalente à

$$(\lambda u + v|\lambda v) = PA_\lambda = AP = A(u|v) = (Au|\lambda v),$$

soit $Au = \lambda u + v$ ou encore $(A - \lambda)u = v$. Le noyau $A - \lambda$ est de dimension 1 (sinon A serait diagonalisable) et donc l'image de $A - \lambda$ de dimension 1 : il existe u non colinéaire à v tel que $(A - \lambda)u = v$: cela donne la matrice $P = (u, v)$ de conjugaison cherchée.

3.5 Stabilité

Complétons la définition de stabilité 4.1 du chapitre 4 :

DÉFINITION 3.2: Soit X solution du système autonome $X' = F(X)$. L'orbite $t \in \mathbb{R}^+ \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$ est asymptotiquement stable [AS] relativement au PÉ x_e si $x(t) \rightarrow x_e$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Le PÉ x_e est AS s'il est stable et si toute trajectoire issue d'un voisinage de stabilité de x_e converge vers le PÉ x_e .

Le bassin d'attraction du PÉ x_e est l'union des orbites qui lui sont AS.

▷ EXEMPLE 3.2: Soit A de type selle, par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Les demi-droites $\{0\} \times \mathbb{R}^\pm$ sont AS, ainsi que l'origine (PÉ!) : ce sont les seules trajectoires AS. Si A est diagonale à valeurs propres de parties réelles négatives non nulles, alors toute trajectoire est AS : le PÉ 0 est AS. ◁

L'étude exhaustive des cas de systèmes linéaires autonomes permet d'étudier aisément la condition de stabilité et de stabilité asymptotique des systèmes non linéaires.

PROPOSITION 3.2: Soit A matrice d'ordre 2 réelle inversible. L'origine est l'unique PÉ du système $X' = AX$.

Le PÉ est AS si et seulement si A est diagonalisable sur \mathbb{C} , avec ses valeurs propres à parties réelles négatives non nulles. Il est stable sans être asymptotiquement stable si ses valeurs propres sont imaginaires pures.

Le PÉ n'est pas stable si au moins une des valeurs propres de A est à partie réelle positive non nulle.

2. La valeur propre λ est non nulle, car A a été supposée inversible.

△ REMARQUE 3.3: Un PÉ est instable si chacune des solutions (à l'exception de quelques unes dans le cas d'un système de type selle) avec une condition initiale proche du PÉ ne s'approche pas du PÉ. ▽

Chapitre 4

Points d'équilibre et stabilité

4.1 Stabilité

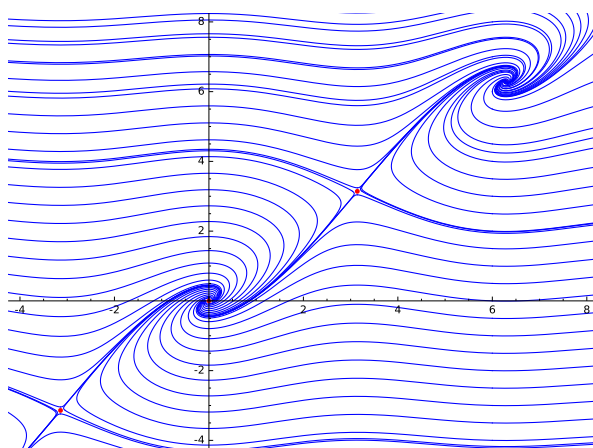


FIGURE IV.1 – L'ÉD non linéaire $x' = x - y$, $y' = \sin x$ a une infinité de PÉ $k(\pi, \pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, tous hyperboliques : si k est pair, on a une configuration de type foyer avec valeurs propres j, \bar{j} , alors que si k est impair, on a un PÉ de type selle, avec valeurs propres du linéarisé $(-1 \pm \sqrt{5})/2$.

L'analyse qualitative des ÉD étudie plusieurs types de stabilité :

1. les propriétés d'attraction d'une trajectoire particulière en temps long, par exemple un point d'équilibre ou une trajectoire fermée.
2. le retour à un état d'équilibre à partir d'une petite perturbation (ou une erreur de modélisation) de cet état d'équilibre est une propriété physique appréciée, qu'il y ait retour de type exponentiel ou non.
3. la préservation de propriétés dynamiques (types de portrait de phase par exemple) suite à des petites variations sur le PC (variation de conditions initiales ou de la forme même de l'ÉD), c'est le domaine de la stabilité structurelle.

On a les définitions suivantes

DÉFINITION 4.1: Soit l'ÉD (E) $x' = f(x)$ une équation autonome et x_e un point d'équilibre de cette équation.

Le PÉ x_e de l'ÉD (E) est stable (dans le futur $[0, +\infty)$) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout x_0 dans la boule $B(x_e, \alpha)$ la solution $x(t; x(t_0) = x_0)$ du problème de Cauchy $x' = f(x), x(t_0) = x_0$ soit définie sur l'avenir $t \geq t_0$ telle que $x(t; x(t_0) = x_0)$ soit dans la boule $B(x_e, \varepsilon)$.

Le PÉ x_e de l'ÉD (E) est asymptotiquement stable (dans le futur $[t_0, +\infty)$) si le PÉ x_e est stable et s'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout point x_0 de la boule $B(x_e, \alpha)$ la solution $x(t; x(t_0) = x_0)$ du PC $x' = f(x), x(t_0) = x_0$ tende vers x_e lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Le PÉ x_e de l'ÉD (E) est dit instable si il n'est pas stable.

Le bassin d'attraction du PÉ x_e est l'ensemble des points x dont la trajectoire converge vers x_e lorsque $t \rightarrow +\infty$.

▷ EXEMPLES 4.1:

4.1.1 Soit $\alpha > 0$. Le système $x' = -\alpha x$ a $x_e = 0$ comme unique point d'équilibre, qui est asymptotiquement stable. Ses solutions sont $t \mapsto x_0 e^{\alpha(t_0-t)}$ qui convergent avec $t \rightarrow +\infty$ vers le PÉ x_e .

4.1.2 Le PC $z' = z^2, x(t_0) = z_0$ a comme solution $z(t) = z_0(1 + (t - t_0)z_0)^{-1}$, trajectoires toutes complètes lorsque $t \rightarrow \infty$, sauf celles passant par $z_0 \in \mathbb{R}^+$. Considérée sur $E = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, cette ÉD confère au point d'équilibre $x_e = 0$ un bassin d'attraction égal à E tout entier, bien qu'il n'y ait pas stabilité au sens du premier alinéa de la définition de stabilité¹. ◀

△ REMARQUE 4.1: Il y a de multiples notions de stabilité : exponentielle, uniforme, Lagrange ($\|x(t)\|$ uniformément borné), globale ($B(x_e) = E$), ...

La définition de la stabilité asymptotique inclut la stabilité : celle-ci ne résulte pas des convergences des orbites vers le PÉ, comme c'est le cas pour l'ÉD $z' = z^2$ dans le plan complexe (cf. figure 4.1). ▽

En général, établir la stabilité d'un PÉ d'une ÉD non linéaire n'est pas aisé.

Notons qu'une ÉD non linéaire a souvent plusieurs PÉ : au voisinage d'un de ces PÉ, on a souvent un portrait de phase voisin d'un de ceux des systèmes linéaires (cf. figure IV.1), à moins qu'il ne soit tout à fait différent (cf. figure IV.7).

4.2 Système linéarisé au voisinage d'un équilibre

Pour une ÉD autonome $x' = f(x)$ avec f ne s'annulant pas, le portrait de phase est constitué, à difféomorphisme près sur un petit voisinage de tout point x_0 , de segments linéaires dans la direction de $f(x_0)$.

1. (Complément heuristique) Si on imagine ajouter à cette figure un point ∞ à l'infini vers lequel les points réels positifs se dirigent (et le dépassent en continuant sur l'axe des réels négatifs) alors que les points de l'axe négatif en viennent, on obtient un portrait tracé sur la sphère (le plan complété par le point ∞), dont toutes les trajectoires convergent vers l'origine, sans que pour autant l'ÉD soit stable, cf. la figure 4.1.

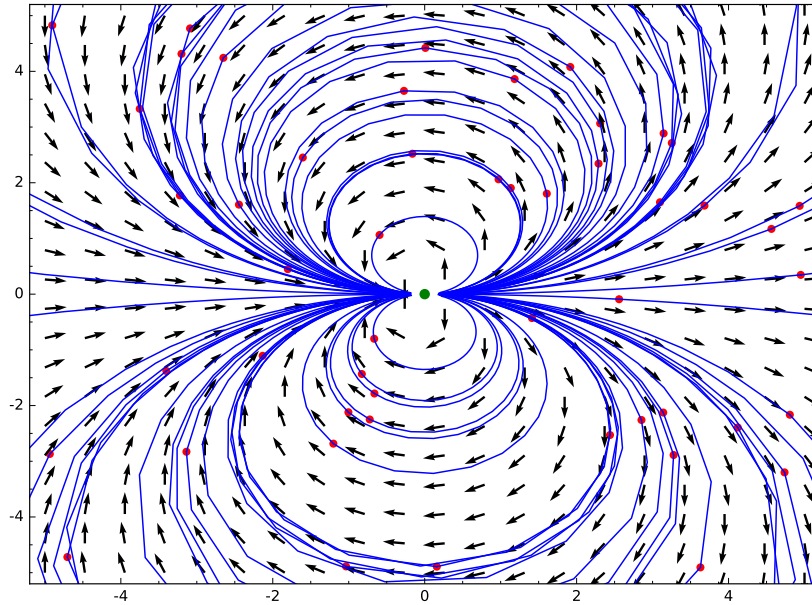


FIGURE IV.2 – Portrait de phase du système différentiel $(x', y') = (x^2 - y^2, 2xy)$ ou, en termes de coordonnées complexes $z = x + iz$, l'ÉD $z' = z^2$: les trajectoires sont des cercles tangents à l'axe horizontal au PÉ $x_e = 0$ d'équation $(x^2 + y^2)/y = C$, ou encore $\Im m(1/z) = \tilde{C}$, vu que $\Im m(1/z)' = \Im m(-z'/z^2) = 0$. Ce PÉ n'est pas stable, le bassin d'attraction du PÉ est le plan privé du demi-axe horizontal positif.

THÉORÈME 4.1: Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $x_* \in \Omega$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si $f(x_0)$ est non nul, il existe un difféomorphisme $\chi : U_* \rightarrow V_*$ d'un voisinage U_* de x_* transportant les trajectoires de l'ÉD $x' = f(x)$ dans U_* sur les trajectoires de l'ÉD $y' = v_*$ dans V_* avec $v_* = f(x_*)$.

DÉMONSTRATION. Admis □

D'après la formule de Taylor, au voisinage d'un PÉ du système autonome $x' = f(x)$, on a les approximations²

$$f(x) = f(x_e) + Df(x_e)(x - x_e) + \mathcal{O}(\|x - x_e\|^2) \simeq Df(x_e)(x - x_e)$$

Le système non linéaire $x' = f(x)$ est donc au voisinage du PÉ x_e proche du système linéaire $u' = Df(x_e)u$ où on a posé $u = x - x_e$. Dans certains cas, la solution du système non linéaire (non exprimable par des fonctions classiques) est proche de celle (calculable) du système linéarisé.

DÉFINITION 4.2: Soit $f : \Omega(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 et $x_e \in \Omega$ un zéro de f . La linéarisée de l'ÉD $u' = f(u)$ au point d'équilibre x_e est le système différentiel linéaire $u' = Df(x_e)u$.

2. La dérivée de l'application f au point m est notée ici par $Df(m)$. La notation $f'(m)$ est aussi souvent utilisée.

Si f a pour fonctions coordonnées f_1, \dots, f_n , alors la matrice jacobienne $Df(X)$, identifiée à la matrice représentant l'endomorphisme de linéarisation $Df(X)$, est

$$Df(X) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(X) & \dots & \partial_{x_n} f_1(X) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_n(X) & \dots & \partial_{x_n} f_n(X) \end{pmatrix}.$$

▷ EXEMPLES 4.2:

4.2.1 Soit a réel et $f_a : (x, y) \mapsto (y, -x - x^2 - ay)$. Sa différentielle est donnée par

$$D(f_a)(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2x & -a \end{pmatrix}$$

L'ÉD $(x', y') = f_a(x, y)$ a deux PÉ, $(0, 0)$ et $(-1, 0)$, avec linéarisés respectifs $(x' = y, y' = -x - ay)$ et $(x' = y, y' = x + ay)$.

4.2.2 Soit f donnée par le gradient $\nabla J = (\partial_{x_i} J)$ d'une fonction $J : U(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$. Sa dérivée $Df(X) = D\nabla J(X)$ est la matrice $D\nabla J(X) = (\partial_{x_i x_j}^2 J(X))$, appelée *matrice hessienne* de J . ◀

On aura besoin du lemme suivant.

LEMME 4.1: Soit $A \in \mathcal{M}_n$ et m, M tels que $\Re \lambda \in (m, M)$ pour toute valeur propre λ de A . Alors il existe un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$, avec norme associée $\| \cdot \|_A$, tel que

$$m \|v\|_A^2 \leq \langle Av, v \rangle_A \leq M \|v\|_A^2, \quad v \in \mathbb{R}^n. \quad (4.1)$$

DÉMONSTRATION. Notons λ_A, Λ_A les extrema

$$\lambda_A = \min_{\lambda \in \sigma(A)} [\Re \lambda], \quad \Lambda_A = \max_{\lambda \in \sigma(A)} [\Re \lambda]$$

où $\sigma(A)$ désigne le spectre de valeurs propres de A . Avec les notations de l'énoncé, on a donc $m < \lambda_A \leq \Lambda_A < M$.

Si A est diagonalisable sur \mathbb{R} , soit $((v_j, \lambda_j), j = 1, \dots, n)$ une base d'éléments propres. Tout vecteur x s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs propres $v_1, \dots, v_n : x = \sum_j x_j v_j$. On pose comme produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$

$$\langle x, y \rangle_A = \sum_j x_j y_j, \quad x = \sum_j x_j v_j, y = \sum_j y_j v_j$$

qui fait de la famille des vecteurs propres (v_j) une base orthonormée relativement au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$. Par suite

$$\lambda_A \|x\|_A^2 = \min_k \lambda_k \sum_j x_j^2 \leq \langle Ax, x \rangle_A = \sum_j \lambda_j x_j^2 \leq \max_k \lambda_k \sum_j x_j^2 = \Lambda_A \|x\|_A^2, \quad x = \sum_j x_j v_j,$$

ce qui montre le résultat du lemme dans le cas A diagonalisable³ sur \mathbb{R} .

Si A est diagonalisable sur \mathbb{C} , ses valeurs propres non réelles se regroupent par paires $\lambda, \bar{\lambda}$ et la matrice A est équivalente par une conjugaison appropriée à une matrice diagonale par blocs de dimension 1 et 2 : un bloc unidimensionnel $[\mu]$ est associé à un vecteur propre v_μ de valeur propre réelle μ , un bloc de dimension 2 $B_\lambda = \begin{pmatrix} \Re \lambda & \Im \lambda \\ -\Im \lambda & \Re \lambda \end{pmatrix}$ est associé à une paire $\lambda, \bar{\lambda}$ de valeurs propres non réelles conjuguées l'une de l'autre, avec vecteurs propres associés $v_\lambda, \bar{v}_\lambda$ déterminant les vecteurs réels $v_{+\lambda} = \Re v_\lambda, v_{-\lambda} = \Im v_\lambda$ linéairement indépendants. On a

$$Av_{+\lambda} = \Re \lambda v_{+\lambda} - \Im \lambda v_{-\lambda}, \quad Av_{-\lambda} = \Im \lambda v_{+\lambda} + \Re \lambda v_{-\lambda},$$

Via la décomposition (unique)

$$x = \sum_{\mu} x_{\mu} v_{\mu} + \sum_{\lambda} [x_{+\lambda} v_{+\lambda} + x_{-\lambda} v_{-\lambda}]$$

associée au choix des blocs (v_{μ}, μ) induits par les valeurs propres réelles et $B_{\lambda} = (v_{+\lambda}, v_{-\lambda})$ provenant des éléments propres complexes non réels, on pose le produit scalaire

$$\langle x, y \rangle_A = \sum_{\mu} x_{\mu} y_{\mu} + \sum_{\lambda} [x_{+\lambda} y_{+\lambda} + x_{-\lambda} y_{-\lambda}]$$

qui vérifie

$$\begin{aligned} \langle Ax, x \rangle_A &= \sum_{\mu} \mu x_{\mu}^2 + \sum_{\lambda} [[\Re \lambda x_{+\lambda} + \Im \lambda x_{-\lambda}] x_{+\lambda} + [-\Im \lambda x_{+\lambda} + \Re \lambda x_{-\lambda}] x_{-\lambda}] \\ &= \sum_{\mu} \mu x_{\mu}^2 + \sum_{\lambda} [\Re \lambda (x_{+\lambda}^2 + x_{-\lambda}^2)], \end{aligned}$$

et qui est encadré par $\lambda_A \|x\|_A^2$ et $\Lambda_A \|x\|_A^2$.

Le cas A non diagonalisable requiert l'usage des réduites de Jordan et des minorant/majorant m, M stricts pour les λ_A, Λ_A dans (4.1). Commençons par remarquer comment à un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (resp. une norme $\| \cdot \|$) et un automorphisme H de \mathbb{R}^n est associé un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ (resp. une norme $\| \cdot \|_H$) vérifiant

$$\langle u, v \rangle_H = \langle Hu, Hv \rangle, \quad \|u\|_H = \|Hu\|, \quad u, v \in \mathbb{R}^n.$$

La norme matricielle associée à la norme $\| \cdot \|_H$ vaut pour $A \in \mathcal{M}_n$

$$\|A\|_H = \sup_u \frac{\|Au\|_H}{\|u\|_H} = \sup_u \frac{\|HAu\|}{\|Hu\|} = \sup_u \frac{\|HAH^{-1}Hu\|}{\|Hu\|} = \sup_v \frac{\|HAH^{-1}v\|}{\|v\|} = \|HAH^{-1}\|.$$

3. Si $P = (v_1, \dots, v_n)$ est la matrice des coefficients des vecteurs (colonne) de cette base propre de \mathbb{R}^n , le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ sur \mathbb{R}^n est simplement donné en terme du produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur \mathbb{R}^n par $\langle x, y \rangle_A = \langle P^{-1}x, P^{-1}y \rangle$. En effet, si $X = (x_j), Y = (y_j)$ sont les vecteurs des coordonnées de $v = \sum_j x_j v_j, w = \sum_j y_j v_j$, on a $PX = v, PY = w$ et donc $\langle v, w \rangle_A = \langle X, Y \rangle = \langle P^{-1}v, P^{-1}w \rangle$. Si la base (v_j) est orthonormée (ce qui est possible de choisir si A est symétrique), la matrice P est orthogonale et le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ est le produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Nous allons construire un produit scalaire convenable pour la “partie diagonalisable de A ”, puis l’ajuster par le choix d’un H convenable dans un processus similaire à celui qui vient d’être rappelé.

Soit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_K\}$ le spectre de $A \in \mathcal{M}_n$. La réduction de Jordan de A énonce l’existence des décompositions $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^K V_k$ avec $V_k = \ker(A - \lambda_k)^{n_k}$ de dimension n_k , d’une décomposition $A = S + N$ avec V_k stable par A et N de telle sorte que $S|_{V_k} = \lambda_k \mathbb{1}$ et N nilpotente : la restriction $N|_{V_k}$ peut être représentée par une matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale. Soit $H_{k\varepsilon}$ la matrice diagonale avec les coefficients $(\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n_k})$ sur la diagonale principale et $H_\varepsilon = \bigoplus_k H_{k\varepsilon}$. Les opérateurs S et H_ε commutent (comme le font leurs restrictions à V_k).

La matrice $H_\varepsilon N H_\varepsilon^{-1}$ tend vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow \infty$. En effet, un coefficient non nul n_{ij} de N implique $j > i$ et la conjuguée $H_\varepsilon N H_\varepsilon^{-1}$ a comme coefficient $n_{ij} \varepsilon^{i-j}$, nul si $i \geq j$.

Enfin, ces décompositions (spectrale pour un S réel diagonalisable sur \mathbb{C} et de Jordan avec la partie nilpotente N) sont compatibles : l’espace \mathbb{C}^n est muni d’un produit scalaire adapté à la théorie spectrale de l’opérateur S (diagonalisable sur \mathbb{C}) avec même spectre que A tels que

$$\lambda_A \|v\|_S^2 = \lambda_S \|v\|_S^2 \leq \langle Sv, v \rangle \leq \Lambda_S \|v\|_S^2 = \Lambda_A \|v\|_S^2$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle_{H_\varepsilon} &= \langle Su, u \rangle_{H_\varepsilon} + \langle Nu, u \rangle_{H_\varepsilon} = \langle H_\varepsilon S u, H_\varepsilon u \rangle + \langle H_\varepsilon N u, H_\varepsilon u \rangle \\ &= \langle S H_\varepsilon u, H_\varepsilon u \rangle + \langle H_\varepsilon N H_\varepsilon^{-1} H_\varepsilon u, H_\varepsilon u \rangle \\ &\leq [\Lambda_S] \langle H_\varepsilon u, H_\varepsilon u \rangle + \|H_\varepsilon N H_\varepsilon^{-1}\| \|H_\varepsilon u\|^2 \\ &\leq [\Lambda_A + \|H_\varepsilon N H_\varepsilon^{-1}\|] \|u\|_{H_\varepsilon}^2. \end{aligned}$$

avec la minoration

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle_{H_\varepsilon} &= \langle S H_\varepsilon u, H_\varepsilon u \rangle + \langle H_\varepsilon N H_\varepsilon^{-1} H_\varepsilon u, H_\varepsilon u \rangle \\ &\geq [\lambda_S] \langle H_\varepsilon u, H_\varepsilon u \rangle - \|H_\varepsilon N H_\varepsilon^{-1}\| \|H_\varepsilon u\|^2 \\ &\geq [\lambda_A - \|H_\varepsilon N H_\varepsilon^{-1}\|] \|u\|_{H_\varepsilon}^2. \end{aligned}$$

On prendra ε suffisamment grand tel que $\|H_\varepsilon N H_\varepsilon^{-1}\|$ soit majoré strictement par $M - \Lambda_A$ et $\lambda_A - m$. \square

On comparera le théorème suivant avec le théorème 4.9 de la théorie de Liapounov.

THÉORÈME 4.2 (Critère de Routh): *Soit f de classe \mathcal{C}^2 , nulle en x_e et avec sa linéarisée $Df(x_e)$. Si toutes les valeurs propres de la linéarisée $Df(x_e)$ pour le PÉ x_e du système $x' = f(x)$ sont à partie réelle strictement négative, alors x_e est un PÉ asymptotiquement stable.*

DÉMONSTRATION. Notons par A la linéarisée⁴ $Df(x_e)$. D'après l'hypothèse sur les valeurs propres de la linéarisée A , il existe $\alpha > 0$ et un produit scalaire $\langle u, v \rangle_A$ tels que $\langle Au, u \rangle_A \leq -\alpha \langle u, u \rangle_A$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$. La formule de Taylor en $x = x_e$ à l'ordre 2 assure que le reste $r_A(x) = f(x) - A(x - x_e)$ est un $o(\|x - x_e\|_A)$ et donc l'existence d'un $\delta > 0$ tel que

$$\|f(x) - A(x - x_e)\| \leq \frac{\alpha}{2} \|x - x_e\|_A$$

pour tout x vérifiant $\|x - x_e\|_A \leq \delta$ et donc

$$\langle f(x), x - x_e \rangle_A = \langle A(x - x_e) + r_A(x), x - x_e \rangle_A \leq -\alpha \|x - x_e\|_A^2 + \frac{\alpha}{2} \|x - x_e\|_A^2 \leq -\frac{\alpha}{2} \|x - x_e\|_A^2.$$

Ainsi, il existe $\tau > 0$ tel que la portion de trajectoire $x(t)$, $t \in (0, \tau)$ issue de $x_0 \neq x_e$ et $\|x_0 - x_e\|_A < \delta$ vérifie

$$\frac{d}{dt} [\|x(t) - x_e\|_A^2] = 2 \langle x'(t), x(t) - x_e \rangle_A = 2 \langle f(x(t)), x(t) - x_e \rangle_A \leq -\alpha \|x(t) - x_e\|_A^2.$$

Ainsi la fonction $t \in [0, \tau] \mapsto \|x(t) - x_e\|_A^2$ est décroissante, ce qui confine le bout de solution dans la boule compacte $\{\|x_0 - x_e\|_A \leq \delta\}$ et assure le prolongement à \mathbb{R}^+ de toute solution (ainsi la stabilité de x_e), avec les estimations

$$\frac{d}{dt} (\|x(t) - x_e\|_A^2 e^{\alpha t}) \leq 0, \quad t \geq 0,$$

soit après intégration et racine carrée

$$\|x(t) - x_e\|_A \leq \|x_0 - x_e\|_A \exp\left[-\frac{\alpha}{2} t\right], \quad t \geq 0,$$

ce qui assure que la solution $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto x(t)$ tend vers l'origine avec $t \rightarrow +\infty$ et achève la démonstration de la stabilité asymptotique du point d'équilibre x_e . \square

▷ EXEMPLES 4.3:

4.3.1 Soit le système $x' = ax + by^2$, $y' = b(x + y) - y^3$. Cette ÉD a $X_e = (0, 0)$

comme PÉ⁵, avec linéarisée $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & b \end{pmatrix}$. Ainsi

— Si $a < 0$ et $b < 0$, l'équilibre est asymptotiquement stable. Si $a > 0$ ou $b > 0$, l'équilibre $X_e = (0, 0)$ n'est pas stable.

— Si $a < 0$ et $b = 0$, le système est découpé en deux équations scalaires, l'une $x' = ax$ vérifiant le critère de Routh, l'autre $y' = -y^3$ ayant ses trajectoires convergentes vers l'origine (cf. la remarque 2.3 après le théorème 2.2 du chapitre 2) : il y a stabilité asymptotique vers $X_e = (0, 0)$.

— Si $a = 0$ et $b \leq 0$, alors $x' = by^2 \leq 0$, ce qui implique la décroissance de x et empêche la stabilité : si $x_0 < 0$, alors la solution décroît en dessous de x_0 , ce qui empêche la convergence vers $X_e = (0, 0)$.

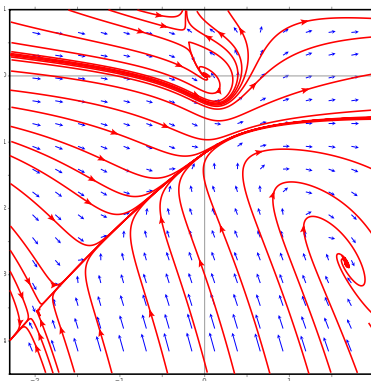


FIGURE IV.3 – Le portrait de phase de l'ÉD $(x' = (-3x - 2y + 8x^2 + y^3), y' = 3x + y - 3x^2y^2 + y^4)$, avec ses trois points d'équilibre $(0,0)$, $(1.67, -2.84)$ et $(-1.98, -3.54)$.

4.3.2 Le champ

$$F(x, y) = (-3x - 2y + 8x^2 + y^3, 3x + y - 3x^2y^2 + y^4), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

a $(0,0)$ comme PÉ⁶, avec linéarisé $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ dont $-1 \pm i\sqrt{2}$ sont les valeurs propres. Ainsi le PÉ est asymptotiquement stable.



FIGURE IV.4 – Le portrait de phase de $x' = -x^n$ suivant la parité de n (pair à gauche).

4.3.3 La condition de Routh est une condition suffisante, pas nécessaire. L'avant-dernier exemple traitait le cas particulier de l'ÉD $x' = -x^n$ avec $n = 3$. Pour n entier naturel au moins égal à 2, la résolution est aisée par séparation des variables

$$x^{-n} dx = -dt$$

d'où $(x^{1-n}/(1-n))' = -t$, puis

$$\frac{x^{1-n}}{1-n} - \frac{x_0^{1-n}}{1-n} = -t$$

soit finalement

$$x(t) = x_0 \left(1 + (n-1)tx_0^{n-1} \right)^{1/(1-n)}.$$

4. On peut se ramener à $x_e = 0$ via le changement de variable par translation $x \rightarrow y = x - x_e$. Cela allégerait un peu la démonstration.

5. Il y a deux autres PÉ : $(-b^5 + 2a^2b^2 \pm \sqrt{b^4 + 4a^2bb^3})/(2a^3)$, $-(b^2 \pm \sqrt{b^4 + 4a^2b})/(2a)$.

6. SageMath en indique deux autres réels : $(1.6664?, -2.8396?)$ et $(-1.9838?, -3.5443?)$, cf. la figure IV.3.

La jacobienne (la dérivée!) $nx_{|x=0}^{n-1}$ de x^n a 0 comme valeur propre. Notons $T_{x_0 n} = -x_0^{n-1}/(n-1)$. Quelle que soit la parité de n , la trajectoire maximale passant par $x_0 > 0$ est définie sur $]T_{x_0 n}, +\infty[$, convergente vers 0^+ lorsque $t \rightarrow +\infty$; si n est pair la solution maximale est définie sur l'intervalle $(-\infty, T_{x_0 n}[$ (avec convergence vers 0 lorsque $t \rightarrow -\infty$), alors que si n est impair, la trajectoire maximale passant par $x_0 < 0$ est définie sur $]T_{x_0 n}, +\infty[$, avec limite nulle lorsque $t \rightarrow +\infty$. Le portrait de phase est dans la figure IV.4.

Plus généralement, soit le problème de Cauchy $x'(t) = K|x|^\alpha$ et $x(t_0) = x_0 > 0$, avec $K > 0, \alpha > 0$. La méthode de séparation des variables permet de calculer explicitement les solutions : si $0 < \alpha \leq 1$ alors les solutions maximales sont globales alors que, si $\alpha > 1$, les solutions maximales explosent (du côté des t croissants) : elles sont définies sur un intervalle du type $] -\infty, T[$ avec $T < +\infty$ et tendent vers $+\infty$ quand $t \rightarrow T_-$. \triangleleft

En fait le théorème de Routh est une équivalence pour les systèmes linéaires, comme l'indique le théorème de type Routh suivant (donné pour mémoire) :

THÉORÈME 4.3: *Soit l'ÉD homogène $X' = AX$ à coefficients constants.*

L'origine est un équilibre stable si et seulement si le spectre de A est inclus dans le demi-plan fermé $\{\Re \lambda \leq 0\}$, avec l'absence de blocs de Jordan pour les valeurs propres λ imaginaires pures.

L'équilibre est asymptotiquement stable si et seulement si le spectre de A est inclus dans le demi-plan ouvert $\{\Re \lambda < 0\}$.

Le dernier théorème sur la stabilité apporte un autre point de vue :

THÉORÈME 4.4: *Soit x_e PÉ de l'ÉD $X' = f(X)$. Si $DF(x_e)$ a une valeur propre réelle de partie réelle positive non nulle, alors le PÉ n'est pas stable.*

DÉMONSTRATION. On peut supposer $x_e = 0$. Soit $A = Df(x_e)$. On décompose $\mathbb{R}^n = E_+ \oplus E_-$ où E_+, E_- sont invariants par A , avec spectres de valeurs propres inclus dans $\{\Re \lambda > 0\}$ et $\{\Re \lambda \leq 0\}$ resp. On note par Π_\pm les projections sur E_\pm parallèlement à E_\mp .

D'après le lemme 4.1, pour $a \in]0, \min_{\lambda \in \sigma(A_+)}(\Re \lambda)[$ et $b \in]0, a[$, il existe des produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle_\pm$ sur E_\pm tels que

$$\langle Ax_+, x_+ \rangle_+ \geq a \|x_+\|_+^2, \quad x_+ \in A_+, \quad \langle Ax_-, x_- \rangle_- \leq b \|x_-\|_-^2, \quad x_- \in A_-.$$

On note par $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ le produit scalaire induit par somme directe

$$\langle x, x \rangle_A = \langle x_+, x_+ \rangle_+ + \langle x_-, x_- \rangle_-, \quad x = x_+ + x_-, \quad x_\pm = \Pi_\pm x \in E_\pm,$$

la norme induite $\| \cdot \|_A$ et les boules $B_A(\rho) = \{\|m - x_e\|_A \leq \rho\}$. On introduit la fonction Φ définie par

$$\Phi(x_+ + x_-) = \frac{1}{2} (\|x_+\|_+^2 - \|x_-\|_-^2), \quad x_+ + x_- \in E_+ \oplus E_-.$$

Soit $\alpha = (a - b)/4$ et r la partie non linéaire de $f : r(x) = f(x) - Df(x_e)(x)$. Alors, vu que $r(x) = o(\|x\|_A)$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que si $\|x\|_A \leq \varepsilon$, alors $\|r(x)\|_A \leq \alpha\|x\|_A$.

Supposons la stabilité : il existe un $\tilde{\eta}$ tel que toute trajectoire maximale issue de $x(0) \in B_A(x_e, \tilde{\eta})$ reste dans la boule $B_A(x_e, \eta)$. Quitte à diminuer $\tilde{\eta}$, on peut supposer que $\tilde{\eta} \leq \varepsilon$.

Considérons une solution x telle que $\|x(0)\|_A \leq \tilde{\eta}$ et $\Phi(x(0)) > 0$: de telles conditions initiales existent car A_+ est supposé non trivial et par hypothèse de stabilité la durée de vie de x est $+\infty$. Introduisons la fonction φ_x telle que $\varphi_x(t) = \Phi(x(t))$, $t \geq 0$ et les projections $x_{\pm}(t) = \Pi_{\pm}x(t)$, $x'_{\pm}(t) = \Pi_{\pm}x'(t)$.

Soit $t_+ = \inf\{t > 0, \varphi_x(t) \leq 0\}$ (t_+ valant $+\infty$ si $\varphi(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$), qui est strictement positif par continuité de φ_x et vu $\varphi_x(0)$. Alors, le long de cette trajectoire issue de $x(0) \in B_A(x_e, \tilde{\eta})$

$$\begin{aligned} \varphi'_x(t) &= \langle x'_+(t), x_+(t) \rangle_+ - \langle x'_-(t), x_-(t) \rangle_- \\ &= \langle A_+x_+(t), x_+(t) \rangle_+ - \langle A_-x_-(t), x_-(t) \rangle_- + \langle \Pi_+r(t), x_+(t) \rangle_+ - \langle \Pi_-r(t), x_-(t) \rangle_- \\ &\geq a\|x_+(t)\|_+^2 - b\|x_-(t)\|_-^2 - \alpha(\|x_+(t)\|_+ + \|x_-(t)\|_-)\|x(t)\|_A. \end{aligned}$$

Sur $[0, t_+]$, on a $\|x_-(t)\|_A \leq \|x_+(t)\|_A$ et $\|x(t)\|_A \leq 2\|x_+(t)\|_A$, ce qui donne

$$\varphi'_x(t) \geq (a - 4\alpha)\|x_+(t)\|_+^2 - b\|x_-(t)\|_-^2 \geq b(\|x_+(t)\|_+^2 - \|x_-(t)\|_-^2) = 2b\varphi_x(t), \quad t \in [0, t_+]$$

et par intégration,

$$\varphi_x(t) \geq \varphi_x(0)e^{2bt}, \quad t \in [0, t_+].$$

Vu que $b > 0$ et $\varphi_x(0) > 0$, on en déduit $t_+ = +\infty$ et

$$\varphi_x(t) = \frac{1}{2} [\|x_+(t)\|_+^2 - \|x_-(t)\|_-^2] \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty,$$

ce qui contredit la majoration $\|x(t)\|_A \leq \eta$ le long de la trajectoire de la solution x : il n'y a pas stabilité. \square

Ces théorèmes de type Routh sont complétés par des conditions de stabilité (relativement aux variations d'un système ou PC) pour les matrices dites *hyperboliques* :

DÉFINITION 4.3: *Une matrice est dite hyperbolique si aucune de ses valeurs propres n'est imaginaire pure. Un PÉ de $x' = f(x)$ est dit hyperbolique si sa linéarisée l'est.*

Si le système $x' = f(x)$ dépend d'un paramètre a de manière régulière, de telle sorte que l'équation au point d'équilibre $f(x_e(a), a)$ ait une solution régulière. Si $x_e(a_0)$ est hyperbolique, alors le PÉ $x_e(a)$ est aussi hyperbolique. Cette propriété de maintien du type hyperbolique n'est pas vrai pour des points non hyperboliques. L'exemple suivant présente un système dont le PÉ n'est pas hyperbolique et ses perturbations.

▷ EXEMPLE 4.4: Soit le système différentiel $X' = f_\varepsilon(X)$ défini suivant

$$x' = -y + \varepsilon x(x^2 + y^2), \quad y' = x + \varepsilon y(x^2 + y^2)$$

qui prend la forme $r' = \varepsilon r^3, \theta' = 1$ en coordonnées polaires. En effet, d'une part la formule $r^2 = x^2 + y^2$ est dérivée en $rr' = xx' + yy'$, où les substitutions de x' et y' donnent la première équation $r' = \varepsilon r^3$, d'autre part l'équation $\tan\theta = y/x$ induit $(1 + \tan^2\theta)\theta' = y'/x - yx'/x^2$, ce qui donne après substitution des expressions des dérivées de x' et y' la seconde.

Si $\varepsilon > 0$ (< 0 resp.), les trajectoires spiralent vers l'infini (vers l'origine). Le système linéarisé en l'origine (unique PÉ) a des trajectoires fermées : l'ajout de la perturbation de taille ε aussi faible soit elle ne parvient pas à éviter le changement drastique du portrait de phase. La linéarisation échoue à décrire le portrait (global) de phase du système non linéaire. ◁

Donnons quelques autres exemples.

▷ EXEMPLES 4.5:

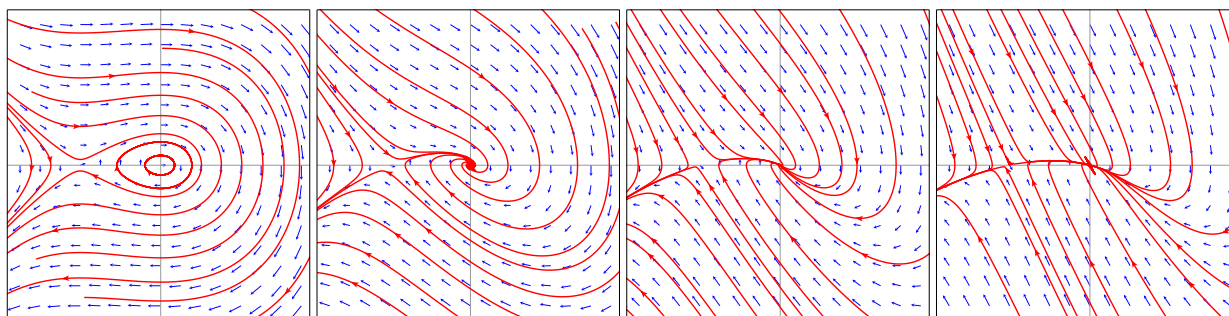


FIGURE IV.5 – Portrait de phase pour $(x' = y, y' = -x - x^2 - ay)$: en $(-1, 0)$ le PÉ est toujours un point selle; en $(0, 0)$ centre, foyer et nœuds pour $a = 0, 1, 2$ et 3.

4.5.1 Soit a réel. Le système $(x' = y, y') = -x - x^2 - ay)$ a deux PÉ, $(0, 0)$ et $(-1, 0)$ a deux PÉ, $(0, 0)$ et $(-1, 0)$, dont les linéarisés respectifs $(X' = Y, Y' = -X - aY)$ et $(X' = Y, Y' = X + aY)$ correspondent aux matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}.$$

avec valeurs propres

$$\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \quad \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}.$$

Le PÉ $(-1, 0)$ est toujours un point selle, alors que le PÉ $(0, 0)$ est hyperbolique si et seulement si a est non nul : si $|a| > 2$ (resp. $|a| < 2$ non nul, $|a| = 2$), le linéarisé du PÉ $(0, 0)$ est un nœud (resp. foyer, nœud impropre).

4.5.2 Soit le système (cf. figure IV.6)

$$x' = \frac{x}{2} - y - \frac{x}{2}(x^2 + y^2), \quad y' = x + \frac{y}{2} - \frac{y}{2}(y^2 + x^2).$$

L'origine est un PÉ (le seul de ce système) qui est hyperbolique et a comme linéarisé

$$X' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} X$$

de valeurs propres $\frac{1}{2} \pm i$: les trajectoires du système linéarisé spiralent vers l'infini autour de l'origine dans le sens trigonométrique. En passant en coordonnées polaires, le système non linéaire induit les équations

$$\begin{aligned} r' \cos \theta - r \sin \theta \theta' &= x' = \frac{r}{2}(1 - r^2) \cos \theta - r \sin \theta, \\ r' \sin \theta + r \cos \theta \theta' &= y' = \frac{r}{2}(1 - r^2) \sin \theta + r \cos \theta, \end{aligned}$$

soit en prenant les coefficients⁷ de $\sin \theta, \cos \theta$

$$r' = r(1 - r^2)/2, \quad \theta' = 1.$$

Considérant l'ÉD (autonome) en r , on constate que le cercle de rayon 1 est

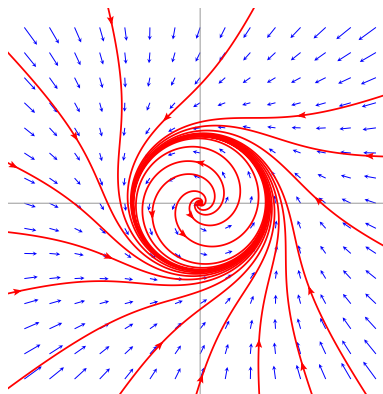


FIGURE IV.6 – Dans le plan $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, le portrait de phase du système ($r' = r(1 - r^2)/2, \theta' = 1$).

une trajectoire, qu'une trajectoire issue d'un point intérieur (extérieur resp.) au disque de rayon 1 spirale en convergeant vers le cercle. Ce portrait de phase n'est pas dans la liste des portraits de systèmes linéaires : il n'y a pas de changement de variable (global) qui relie système non linéaire et son linéarisé.

7. on a un système du type $A \cos \theta + B \sin \theta = 0, A \sin \theta + B \cos \theta = 0$ qui entraîne la nullité de A et B si $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta \neq 0$ et aussi pour les autres θ par continuité.

Le linéarisé $u' = u/2 - v, v' = u + v/2$ prend en coordonnées polaires la forme $r' = r/2, \theta' = 1$ vu que

$$r' \cos \theta - r \sin \theta \theta' = u' = r \cos \theta / 2 - r \sin \theta,$$

$$r' \sin \theta + r \cos \theta \theta' = v' = r \cos \theta + r \sin \theta / 2.$$

4.5.3 Le système $x' = x^2, y' = -y$ (cf. figure IV.7) a l'origine comme seul PÉ. Il est résoluble explicitement en terme de fonctions élémentaires ($t_{x_0, y_0} : t \in (t_-, t_+) \rightarrow (x(t), y(t)) = (x_0/(1 - x_0 t), y_0 e^{-t})$), même si les éléments qualitatifs ci-dessous n'ont pas tous besoin de cette expression. Toutes les trajectoires évoluent vers la droite, en étant asymptote à une droite horizontale : une trajectoire partant du demi-plan gauche converge vers le PÉ (asymptotiquement le long de l'axe horizontal), alors que celle partant du demi-plan droit converge vers l'infini asymptotiquement le long de l'horizontale de hauteur $y_0 e^{-1/x_0}$ (cela correspond à $t \rightarrow t_+ = 1/x_0$ qui induit $y(t) \rightarrow_{t \rightarrow t_+} y_0 e^{-1/x_0}$); l'axe vertical est partitionné en le PÉ et les deux trajectoires convergeant vers le PÉ. Le linéarisé $x' = 0, y' = -y$ a toutes ses trajectoires verticales, chacune convergeant vers le point sur l'axe horizontal correspondant. Comme dans

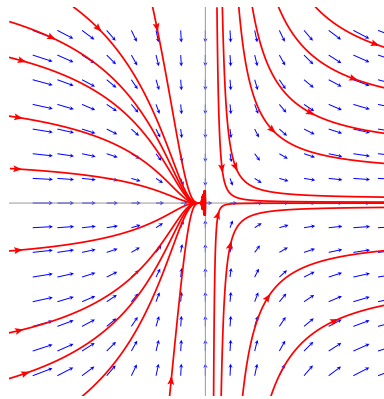


FIGURE IV.7 – Portrait de phase du système $(x' = x^2, y' = -y)$ de solution $x(t) = x_0/(1 - x_0 t), y(t) = y_0 e^{-t}$: mis à part les demi-axes, une trajectoire dans le demi-plan droit est asymptote à l'axe vertical ($t \rightarrow -\infty$) et à la droite $y = y_0 e^{-1/x_0}$ ($t \rightarrow +\infty$), alors qu'une trajectoire dans le demi-plan gauche est asymptote à la droite $y = y_0 e^{-1/x_0}$ ($t \rightarrow -\infty$) et converge vers le PÉ ($t \rightarrow +\infty$) : tangentiellement à l'axe horizontal, donnant l'impression de coïncider avec cet axe, vu qu'il y a convergence exponentielle $y(t) = y_0 e^{-t}$ et convergence polynomiale $x(t) = x_0/(1 - x_0 t)$.

les exemples précédents, le PÉ n'est pas hyperbolique : dans ce cas, l'ajout d'un terme non linéaire, si petit soit-il, induit un changement radical du portrait de phase, qui n'a aucun lien avec les types de système linéaire. \triangleleft

Un PÉ hyperbolique est robuste : des petites perturbations ne changent pas cette propriété, ni le type de portrait de phase au voisinage du PÉ. En effet, il y a continuité des valeurs propres et donc maintien du type de portrait de phase du modèle

linéaire. En outre, le portrait de phase au voisinage du PÉ et celui de son linéarisé sont équivalents : c'est le théorème de Grobman-Hartman (~ 1960).

THÉORÈME 4.5 (Hartman-Grobman): Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 nulle en x_e et $A = Df(x_e)$ la matrice jacobienne de f au point x_e . Si x_e est un PÉ hyperbolique, il existe deux voisinages ouverts U et V de x_e et de 0 , un homéomorphisme $h : U \rightarrow V$ qui envoie les trajectoires de $x' = f(x)$ dans U bijectivement sur les trajectoires de $y'(t) = Ay(t)$ dans V en gardant l'orientation donnée par le temps t . En fait si $x_f(t, x)$ et $y_A(t, y)$ sont les solutions des problèmes de Cauchy associés à f et A respectivement, alors, pour un intervalle I_x , on a

$$h(x_f(t, x)) = y_A(t, h(x)), \quad x \in U, t \in I_x.$$

▷ EXEMPLE 4.6:

Le système (cf. la figure IV.8)

$$(x' = x + y^2, y' = -y) \tag{4.2}$$

est, bien que non linéaire, résoluble explicitement avec solution

$$\left(\left(x_0 + \frac{y_0^2}{3} \right) e^t - \frac{y_0^2}{3} e^{-2t}, y_0 e^{-t} \right)$$

Si la donnée initiale est sur l'axe horizontal (*i. e.* y_0 nul), la trajectoire fuit le PÉ (direction de non stabilité). Au contraire, si la donnée initiale est sur la parabole $x + y^2/3 = 0$ (tangente à l'axe des y), la trajectoire y reste avec convergence vers le PÉ.

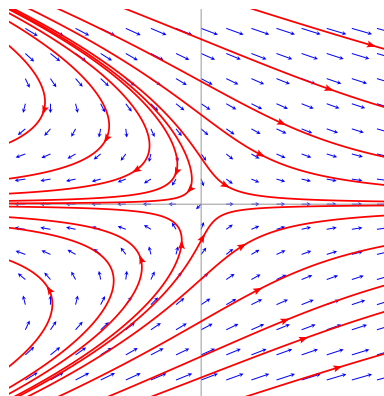


FIGURE IV.8 – Le portrait de phase du système $(x' = x + y^2, y' = -y)$. La parabole $x + y^2/3 = 0$ (tangente à l'axe vertical) et la droite $y = 0$ contiennent les trajectoires séparant les différents secteurs déterminés par le PÉ $(0, 0)$ de type selle.

Le changement de variable $(u(x, y) = x + y^2/3, v(x, y) = y)$ transforme le système (4.2) en un système linéaire :

$$\begin{aligned}u'(x, y) &= x' + 2yy'/3 = x + y^2 + 2y(-y)/3 = x + y^2/3 = u(x, y), \\v'(x, y) &= y' = -y = -v(x, y).\end{aligned}$$

◁

4.3 Le théorème de Routh-Hurwitz

Le premier énoncé donne une condition nécessaire pour que les zéros d'un polynôme soient à partie réelle strictement négative.

PROPOSITION 4.1: *Soit $P(r) = r^d + p_1 r^{d-1} + \dots + p_{d-1} r + p_d$ un polynôme de degré d à coefficients réels. Si toutes les racines de P sont à partie réelle strictement négative, alors tous les coefficients p_i sont strictement positifs.*

Pour un polynôme P de degré 2, la condition $p_1 > 0, p_2 > 0$ est suffisante à dire que les racines de P sont de partie réelle strictement négative.

DÉMONSTRATION. Le polynôme $P(r)$ est produit de facteurs linéaires (réels) $r - s$ avec $s < 0$ ou de facteurs du second degré $(r - s)(r - \bar{s}) = r^2 - (s + \bar{s})r + s\bar{s}$, tous ces coefficients étant positifs. La positivité des coefficients p_k en résulte.

Pour $P = x^2 + p_1 x + p_2$ de degré 2, ses racines sont $x_{\pm} = -(p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - p_2})/2$: soit ces deux racines sont réelles, la positivité $p_1 > 0$ affirmant l'existence d'une valeur propre strictement négative et celle de p_2 l'existence de deux racines strictement positive, soit il y a deux racines non réelles, et la positivité de p_1 assurant que les parties réelles $\Re p_1$ des deux valeurs propres strictement positives. □

△ REMARQUES 4.2:

1. Cette condition n'est pas suffisante si $n > 2$: le polynôme $x^3 + x^2 + x + 6$ a pour racines -2 et $1/2 \pm i\sqrt{11}/2$. Ce polynôme a comme matrice de H-R $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 1 \\ & 1 & 6 \end{pmatrix}$ avec mineurs $m_{31} = 1, m_{32} = -5, m_{33} = -30$, matrice qui ne satisfait pas les conditions du théorème 4.7 ci-dessous.
2. Pour un système autonome $x' = f(x)$ de dimension 2, la condition sur $Df(x_e)$ est équivalente à $-p_1 = \text{tr} Df(x_e) < 0$ et $p_2 = \det Df(x_e) > 0$.
3. Le théorème d'Olech énonce des conditions suffisantes pour que le bassin d'attraction de l'origine soit \mathbb{R}^2 tout entier :

THÉORÈME 4.6: *Soit $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ différentiable avec un PÉ tel qu'au point s_e on ait les relations*

$$\text{tr} Df < 0, \quad \det Df > 0, \quad \partial_1 f_1 \partial_2 f_2 \neq 0, \quad \partial_2 f_1 \partial_1 f_2 \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Alors le PÉ est globalement asymptotiquement stable.

Ces conditions d'Olech sont relativement aisées à vérifier (trouver une fonction de Liapounov globale n'est pas en général évident aussi). Le théorème est faux en dimension supérieure à 3. ∇

Le théorème suivant caractérise les matrices à spectre inclus strictement dans le demi-plan gauche. À l'heure où un ordinateur calcule rapidement et, avec acuité, les valeurs propres d'une matrice, le résultat suivant (qui n'est pas d'usage aisé!) perd un peu d'attractivité.

THÉORÈME 4.7 (Hurwitz-Routh): Soit $P = r^d + p_1 r^{d-1} + \dots + p_{d-1} r + p_d$ un polynôme de degré d à coefficients réels et H_P la matrice carrée d'ordre d associée

$$H_P = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 & p_5 & \dots & \dots & \dots & p_{2d-1} \\ 1 & p_2 & p_4 & \dots & \dots & \dots & p_{2d-2} \\ 0 & p_1 & p_3 & p_5 & \dots & \dots & p_{2d-3} \\ 0 & 1 & p_2 & p_4 & \dots & \dots & p_{2d-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & p_{d-3} & p_{d-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & p_{d-2} & p_d \end{pmatrix}$$

où on a convenu p_k si $k > d$. Alors, les racines de P sont à partie réelle strictement négative si et seulement si les d mineurs principaux de la matrice H_P sont strictement positifs.

Δ REMARQUE 4.3: Les matrices de H-R sont en bas degré $d = 2, 3, 4$

$$\begin{pmatrix} p_1 & \\ 1 & p_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ 1 & p_2 \\ & p_1 & p_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ 1 & p_2 & p_4 \\ & p_1 & p_3 \\ & & 1 & p_2 & p_4 \end{pmatrix},$$

avec mineurs principaux $m_{dq}, q = 1, \dots, d$ en petit degré

$$d = 2: m_{21} = p_1, m_{22} = p_1 p_2$$

$$d = 3: m_{31} = p_1, m_{32} = p_1 p_2 - p_3, m_{33} = p_3 m_{32}$$

$$d = 4: m_{41} = p_1, m_{42} = m_{32}, m_{43} = p_1(p_2 p_3 - p_1 p_4) - p_3^2, m_{44} = p_4 m_{43}.$$

avec conditions de H-R

$$d = 2: p_1 > 0, p_2 > 0$$

$$d = 3: p_1 > 0, p_1 p_2 > p_3, p_3 > 0$$

$$d = 4: p_1 > 0, p_3 > 0, p_4 > 0, p_1 p_2 p_3 > p_1^2 p_4 + p_3^2 > 0$$

On a toujours $m_{dd} = m_{d(d-1)} p_d$, soit p_d comme une des conditions nécessaires (en plus de $p_1 = m_{d1} > 0$). ∇

△ REMARQUE 4.4: On ne confondra pas le critère de R-H avec la caractérisation des matrices symétriques définies positives dans l'espace des matrices symétriques réelles : la matrice symétrique A d'ordre n est définie positive si et seulement si les n mineurs principaux sont strictement positifs.

Par ailleurs, si P est le polynôme caractéristique d'une matrice M d'ordre $d = q + 2r$ (décomposition correspondant aux q valeurs propres réelles et r paires de valeurs propres conjuguées non réelles), la matrice de R-H associée à P n'a pas de relation simple avec la matrice M . Si M de R-H, alors $\text{tr}M < 0$ et $(-1)^q \det M > 0$. En effet, si on a q valeurs propres réelles λ_j et r paires $(\mu_k, \overline{\mu}_k)$ de valeurs propres conjuguées, on obtient

$$\text{tr}M = \sum_j \lambda_j + 2 \sum_k 2\Re \mu_k < 0, \quad (-1)^q \det M = \prod_j (-\lambda_j) \prod_k |\mu_k|^2 > 0.$$

On a aussi le cas des matrices à diagonale dominantes négatives : $m_{kk} < 0$ et $|m_{kk}| > \sum_{j \neq k} |m_{jk}|$. ▽

4.4 Fonction et stabilité de Liapounov

La théorie de Liapounov décrit certaines propriétés des trajectoires d'une ÉD sans la résoudre explicitement, sans description explicite de ces trajectoires.

Commençons par définir la dérivée trajectorielle associée à l'ÉD autonome $x' = f(x)$ pour une fonction numérique L .

DÉFINITION 4.4: Soit $L : U(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, soit l'ÉD $x'(t) = f(x(t))$ avec $t \rightarrow x(t; x)$ la solution du PC $x' = f(x)$, $x(t=0) = x$ définie au voisinage de $t=0$. La dérivée trajectorielle $\overset{\circ}{L}_f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de L le long des trajectoires de l'ÉD $x' = f(x)$ est définie suivant

$$\overset{\circ}{L}_f(x) = \left[\frac{d}{dt} L(x(t; x)) \right]_{|t=0} = [\langle \nabla L(x(t; x)), x'(t; x) \rangle]_{|t=0} = \langle \nabla L(x), f(x) \rangle, \quad x \in U.$$

On notera simplement $\overset{\circ}{L}$ s'il n'y a pas ambiguïté sur l'ÉD impliquée.

DÉFINITION 4.5: Soit l'ÉD $x' = f(x)$, x_e un PÉ et U un voisinage de x_e . La fonction $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de Liapounov (faible) pour le PÉ x_e si

1. $L(x_e) = 0$, $L > 0$ en dehors de x_e ,
2. $\overset{\circ}{L}(x) \leq 0$ sur U en dehors de x_e .

La fonction L est dite de Liapounov stricte (ou forte) si $\overset{\circ}{L} < 0$ en dehors du PÉ.

▷ EXEMPLES 4.7:

4.7.1 Pour l'ÉD linéaire $x' = ax$ avec $a < 0$, la fonction $L : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ vérifie la première condition, ainsi que la seconde :

$$\dot{L}(x) = \nabla L(x)(ax) = 2x(ax) = 2ax^2 = -2|a|x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

C'est donc une fonction de Liapounov. Plus généralement en dimension n , soit A matrice avec toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement négative et l'ÉD linéaire $x' = Ax$. La proposition 4.3 (p. 91) fournit une fonction de Liapounov définie sur \mathbb{R}^n tout entier. Pour la matrice diagonale $A = \text{diag}(a_i)$ réelle avec ses valeurs propres a_i toutes strictement négatives, il suffit de prendre $L(x) = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ de telle sorte que

$$\dot{L} = \langle \nabla L(x), Ax \rangle = \sum_i 2x_i(a_i x_i) \leq 2 \left[\max_i a_i \right] L(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

4.7.2 La fonction $L(X) = x^2 + y^2$ est une fonction de Liapounov stricte pour le système $X' = f(X)$ avec $f(x, y) = (-x - y, x - y)$ et son PÉ $x_e = (0, 0)$:

$$\langle \nabla L(X), f(X) \rangle = 2x[-x - y] + 2y[x - y] = -2(x^2 + y^2), \quad X = (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Au point d'équilibre $x_e = (0, 0)$, la linéarisée $DF(x_e) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a comme valeurs propres $-1 + i$ et $-1 - i$.

4.7.3 La fonction $L(x, y) = x^4 + y^4$ est de Liapounov pour le système $x' = -y^3, y' = x^3$. Le PÉ d'équilibre x_e est stable. En fait l'ÉD $dy/dx = -x^3/y^3$ est à variables séparables, ce qui donne comme intégrale première $x^4 + y^4$: il y a stabilité.

4.7.4 Soit $X' = f(X)$ avec

$$f(x, y, z) = (-2y + yz, x - xz, xy), \quad x, y, z \in \mathbb{R}^3.$$

La fonction $L_{a,b,c}(x, y, z) = (ax^2 + by^2 + cz^2)/2$ est de Liapounov pour cette ÉD avec un choix approprié de a, b, c : le choix $a - b + c = 0$ et $b = 2a$ avec a, b, c strictement positifs (par exemple $(a, b, c) = (1, 2, 1)$) assure que $L_{a,b,c}$ est de Liapounov, vu que

$$\dot{L}_{a,b,c}(f(x, y, z)) = \begin{pmatrix} ax & by & cz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2y + yz \\ x - xz \\ xy \end{pmatrix} = (a - b + c)xyz + (b - 2a)xy, \quad x, y, z \in \mathbb{R}^3.$$

et assure de la stabilité de l'origine. Le linéarisé $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de valeurs propres

$0, \pm\sqrt{2}i$, n'est pas hyperbolique. Pour le système perturbé

$$\tilde{f}(x, y, z) = (-2y + yz - x^3, x - xz - y^2, xy - z^2) = f(x, y, z) + (-x^3, -y^2, -z^2), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

on a

$$\dot{L}_{1,2,1}(X) = -(x^4 + 2y^4 + z^4), \quad X = (x, y, z),$$

non nul pour $X \neq 0$. Il y a stabilité asymptotique.

4.7.5 La fonction $L(x, y) = x^2 + y^2$ est une fonction de Liapounov stricte pour le système $x' = y - x^3, y' = -x - y^3$ vu que

$$\dot{L}(x, y) = 2x[y - x^3] + 2y[-x - y^3] = -2(x^4 + y^4).$$

Le PÉ $(0, 0)$ est asymptotiquement stable. Le linéarisé du système au PÉ $(0, 0)$ est de type centre. \triangleleft

\triangle REMARQUES 4.5:

1. Souvent, pour les ÉD provenant de la mécanique, on prend comme fonction de Liapounov la fonction énergie, dont la constance le long de chaque trajectoire induit la stabilité du point d'équilibre. En général, la fonction de Liapounov sera considérée comme une fonction d'énergie généralisée, la dérivée $-\dot{L}$ comme une dissipation généralisée. Par ailleurs, en lien avec la stabilité, les sous-domaines de niveau $\{X : L(X) \leq a\}$ seront supposés compacts.
2. Si le champ de vecteur f est l'opposé $f = -\nabla J$ du gradient ∇J d'une fonction J de classe \mathcal{C}^2 , le point d'équilibre x_e est un point critique de J (candidat à être un point de minimum, de maximum ou de type selle...), la condition (faible) pour que $L_J = J - J_*$ avec $J_* = \min_{x \in U} J(x)$ soit de Liapounov est

$$\dot{L}_J(x) = \langle \nabla J(x), -\nabla J(x) \rangle = -\|\nabla J(x)\|^2 \leq 0,$$

condition qui est automatiquement vérifiée. Si la matrice hessienne $\text{Hess}J(x_e)$ est définie positive, d'une part le PÉ x_e est un point de minimum local strict pour J , d'autre part il existe un voisinage de x_e où $J(x)$ est strictement de Liapounov vu le développement de Taylor

$$\nabla J(x_e + h) = \nabla J(x_e) + \text{Hess}J(x_e)[h] + \mathcal{O}(\|h\|^2) = \text{Hess}J(x_e)[h] + \mathcal{O}(\|h\|^2), \quad h \sim 0,$$

qui donne

$$\dot{L}_J(x_e + h) = -\|\nabla J(x_e + h)\|^2 = -\|\text{Hess}J(x_e)[h]\|^2 + \mathcal{O}(\|h\|^3), \quad h \sim 0.$$

Ainsi pour atteindre un point de minimum (non dégénéré), il suffit de suivre les trajectoires de gradient en partant d'un voisinage suffisamment de ce point de minimum.

3. L'importance de la notion de fonction de Liapounov [9] est apparue dans la seconde moitié du XXe siècle. J. L. Massera a montré que l'existence d'une fonction de Liapounov (qui est liée à la fonction f de l'ÉD, et non aux solutions de l'ÉD) est une condition nécessaire et suffisante de stabilité globale. ∇

THÉORÈME 4.8: Soit le système $x' = f(x)$ avec PÉ x_e admettant une fonction de Liapounov L définie sur un domaine U contenant x_e .

1. Le PÉ est stable.
2. Si la fonction de Liapounov est stricte, le PÉ x_e est asymptotiquement stable.
3. Si $\dot{L}(x) = \langle \nabla L(x), f(x) \rangle \geq 0$ pour tout $x \neq x_e$ et si pour tout voisinage V de x_e , la fonction L est positive en un point de V , alors x_e est non stable.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE LIAPOUNOV. Supposons que $\text{dom } L$ contient la boule compacte $\overline{B(x_e, \varepsilon)}$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Le bord $S_\varepsilon = S(x_e, \varepsilon)$ de la boule $\overline{B(x_e, \varepsilon)}$ étant compact, et vu les propriétés de positivité de L , l'infimum $\alpha = \inf_{x \in S_\varepsilon} L(x)$ est strictement positif. On peut choisir $\delta > 0$ tel que $\delta < \varepsilon$ et $L(x) < \alpha$ pour x dans la boule $B_\delta = B(x_e, \delta)$. Vu l'inégalité de Liapounov

$$\frac{d}{dt}L(x(t)) = \langle \nabla L(x(t)), f(x(t)) \rangle = \dot{L}(x(t)) \leq 0,$$

la fonction L décroît le long de toute trajectoire $x([0, +\infty])$, une solution démarrant dans la boule B_δ vérifie $L(x(0)) < \alpha$. Cette trajectoire reste dans la boule $\overline{B(x_e, \varepsilon)}$, car sinon elle atteindrait la sphère S_ε en t_0 , donnant les inégalités (contradictoires)

$$\alpha \leq L(x(t_0)) \leq L(x(0)) < \alpha,$$

ainsi la trajectoire $x([0, +\infty])$ reste confinée dans la boule $\overline{B(x_e, \varepsilon)}$, sans phénomène d'explosion possible : il y a stabilité (locale au voisinage du PÉ x_e).

Soit L fonction de Liapounov forte. Comme précédemment, il existe une petite boule B_ε centrée en x_e telle que pour une donnée initiale x_0 dans cette boule la solution maximale issue de x_0 existe en tout temps $t \geq 0$, en étant confinée dans cette boule B_ε .

Nous allons établir que toute solution $x : t \in [0, \infty) \mapsto x(t)$ avec condition initiale $x_0 \in B_\varepsilon$ (ou dans une boule éventuellement plus petite) converge vers x_e lorsque $t \rightarrow +\infty$. La fonction $t \in [0, +\infty) \rightarrow L(x(t))$, décroissante et à valeurs positives, converge vers $L_* \geq 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Il nous suffit d'établir que pour toute sous-suite $(x(t_j))_{j \geq 0}$ convergente vers x_* avec $t_j \rightarrow +\infty$ on ait $x_* = x_e$. Considérons une telle sous-suite. On a alors

$$L(x(t)) > L(x_*), \quad t > 0. \tag{4.3}$$

Sinon, il existerait $t > 0$ tel que $L(x(t)) \leq L(x_*)$ et, grâce à l'inégalité obtenue par décroissance stricte (L a été supposée de type Liapounov stricte), on aurait, pour t_j suffisamment grand,

$$L(x(t_j)) = L(x(2t + t_j - 2t)) \leq L(x(2t)) < L(x(t)) \leq L(x_*)$$

et par passage à la limite $L(x_*) \leq L(x(2t)) < L(x(t)) \leq L(x_*)$, ce qui n'est pas possible. Si $x_* \neq x_e$, on a $L(x(s; x_*)) < L(x_*)$ pour $s > 0$. Fixons un tel $s > 0$. Par continuité par

rapport à la condition initiale dans $x(s; x_*)$, si j est assez grand de telle sorte que $x(t_j)$ soit proche de x_* , on a pareillement la même inégalité que la précédente

$$L(x(s; x(t_j))) = L(x(s + t_j)) < L(x_*),$$

ce qui contredit l'inégalité (4.3) et assure que l'hypothèse $x_* \neq x_e$ est absurde, soit la convergence des trajectoires vers x_e et la stabilité asymptotique annoncée.

On aurait pu raisonner différemment. Vu que $t \mapsto L(x(t))$ est décroissante, la limite $L_* = \lim_{t \rightarrow +\infty} L(x(t))$ existe et pour toute suite $(t_j)_{j \geq 0}$ convergente vers $+\infty$, la suite $(L(x(t_j)))_{j \geq 0}$ converge avec même limite L_* . Il s'agit de trouver une suite $(\sigma_j)_{j \geq 0}$ telle que $(x(\sigma_j))_{j \geq 0}$ converge vers x_e (unique zéro de L) et alors cela sera aussi le cas pour toute suite $(L(x(s_j)))_{j \geq 0}$, impliquant la convergence de $(x(s_j))_{j \geq 0}$ vers x_e (unique zéro de L). Une telle suite va nous être fournie par le théorème des accroissements finis.

Soit $(t_j)_{j \geq 0}$ tendant vers $+\infty$ telle que $(x(t_j))_{j \geq 0}$ converge vers x_* . D'après le théorème des accroissements finis, pour tout entier j , il existe $\tau_j \in (t_j, t_j + 1)$ tel que

$$L(x(t_j + 1)) - L(x(t_j)) = (L \circ x)'(\tau_j) = \overset{\circ}{L}(x(\tau_j)).$$

On peut prendre une suite extraite convergente $(x(\tau_{j_\ell}))_{\ell \geq 0}$ de $(x(\tau_j))_{j \geq 0}$ de limite x_{**} . À la limite, vu que le membre de gauche converge vers $0 = L_* - L_*$, on a $\overset{\circ}{L}(x_{**}) = 0$ et donc $x_{**} = x_e$ vu que x_e est le seul zéro de $\overset{\circ}{L}$, vu le caractère strict de la fonction de Liapounov L .

On a par la décroissance de L sur la trajectoire

$$L_* = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} L(x(\tau_{j_\ell})) = L(x_e) = 0$$

et donc aussi en passant à la limite

$$L(x_*) = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} L(x(t_{j_\ell})) = L_* = 0,$$

ce qui donne $x_* = x_e$ (le seul zéro de L). La seule valeur d'adhérence de $(x(t_j))_{j \geq 0}$ est donc x_e , ce qui montre que la suite $(x(t_j))_{j \geq 0}$ converge vers le PÉ x_e .

[item 3] : à compléter □

△ REMARQUE 4.6: Il n'y a guère de démarche générale pour déterminer une fonction de Liapounov : on cherchera une fonction énergie du type $\sum_{i=1}^n a_i (x_i - x_{ei})^2$ ou une fonction constante sur les trajectoires. ▽

Pour l'équation linéaire $x' = Ax$ et son PÉ l'origine, on peut construire des fonctions de Liapounov adaptées : on fera l'hypothèse naturelle que le spectre de A est inclus dans le demi-plan gauche et que A est hyperbolique.

PROPOSITION 4.2: Soit A avec $\text{spec} A \subset \{\Re z < 0\}$ et Q une matrice symétrique définie positive. Soit P_Q la solution de l'équation de Liapounov $PA + {}^TAP = Q$. Alors la forme quadratique $x \mapsto L_Q(x) = \langle P_Q x, x \rangle$ est une fonction de Liapounov pour le PÉ $x_e = 0$ de l'ÉD linéaire $x' = Ax$.

DÉMONSTRATION. Notons \mathcal{L}_P l'application $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle Px, x \rangle$ pour une matrice P . Sa dérivée trajectorielle vérifie

$$\overset{\circ}{\mathcal{L}}_P(x) = \langle PAx, x \rangle + \langle Px, Ax \rangle = \langle x, [PA + {}^TAP]x \rangle,$$

ce qui amène à l'équation linéaire de Liapounov $PA + {}^TAP = -Q$ avec Q définie positive.

L'équation linéaire de Liapounov $PA + {}^TAP = -Q$ est un cas particulier de l'équation de Sylvester $AX - XB = C$, à solution unique suivant le critère suivant :

LEMME 4.2: Soient \mathcal{M}_n l'espace des matrices carrées d'ordre n , A, B matrices carrées d'ordre n . L'endomorphisme $X \in \mathcal{M}_n \mapsto AX - XB$ est un isomorphisme si et seulement si les matrices A et B n'ont pas de valeur propre commune.

DÉMONSTRATION DU LEMME DE SYLVESTER. Il suffit d'étudier la trivialité du noyau de l'application linéaire $L : X \mapsto AX - XB$, propriété indépendante de l'extension de corps : on peut se placer dans une clôture algébrique. Supposons que λ soit une valeur propre commune à A et B . Alors on a (λ, a) et $(\bar{\lambda}, b^*)$ comme éléments propres respectifs de A et B^* : $Aa = \lambda a$ et $B^*b^* = \bar{\lambda}b^*$. On a donc pour $X = a \otimes b^*$ au sens où $[a \otimes b^*](v) = a\langle v, b^* \rangle$ pour un vecteur v ,

$$\begin{aligned} AX(v) &= A(a\langle v, b^* \rangle) = Aa\langle v, b^* \rangle = \lambda a\langle v, b^* \rangle = a\langle v, \bar{\lambda}b^* \rangle \\ &= a\langle v, B^*b^* \rangle = a\langle Bv, b^* \rangle = X(Bv) = XB(v) \end{aligned}$$

soit $AX = XB$ et donc la non trivialité du noyau $\ker L$.

Réciproquement, soit X vecteur non nul du noyau $\ker L$. L'espace \mathbb{R}^n est une somme directe $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda} \ker(B - \lambda)^{k_{\lambda}}$. Il existe un vecteur v dans un de ces noyaux qui n'est pas annulé par X . Si ce v est un vecteur propre avec valeur propre λ , vu que $X \in \ker L$, alors

$$0 = (AX - XB)v = A(Xv) - \lambda Xv = (A - \lambda)Xv \quad (4.4)$$

ce qui montre que Xv (non nul!) est un vecteur propre de A avec valeur propre λ . Si v est un vecteur propre généralisé de B , on considère un tel $v \in \ker(B - \lambda)^k$ avec le plus petit indice k tel que Xv non nul. Alors $(B - \lambda)v = \hat{v}$ avec Xv non nul et $X\hat{v} = 0$ (car $(B - \lambda)^{k-1}v = 0$) : $XBv = \lambda Xv + X\hat{v} = \lambda Xv$ et l'identité (4.4) donne à nouveau λ valeur propre de A . \square

Ainsi, l'équation linéaire de Liapounov $PA + {}^TAP = -Q$ pour A asymptotiquement stable (*i. e.* le spectre de A est dans $\{\Re z < 0\}$) a une solution unique P_Q . Par symétrie de Q , si $-Q = PA + {}^TAP$, alors $-Q = {}^TPA + {}^TA{}^TP$ et donc par unicité $P_Q = {}^TP_Q$: P_Q est symétrique. Pour montrer que P_Q est définie positive, on va exprimer P_Q par une formule intégrale qui représente une matrice définie négative du fait de la même propriété pour $-Q$:

$$P_Q = \int_0^{+\infty} e^{TAt} Q e^{At} dt, \quad (4.5)$$

puisque

$$-e^{\top A t} Q e^{A t} = e^{\top A t} [P_Q A + \top A P_Q] e^{A t} = \top A e^{\top A t} P_Q e^{A t} + e^{\top A t} P_Q e^{A t} A = \partial_t (e^{\top A t} P_Q e^{A t})$$

et donc

$$-\int_0^{+\infty} e^{\top A t} Q e^{A t} dt = \left[e^{\top A t} P_Q e^{A t} \right]_0^{+\infty} = -P_Q$$

Ainsi, si Q est symétrique définie positive, alors la solution P_Q de $PA + \top AP = -Q$ est symétrique définie positive. Le système linéaire $x' = Ax$ admet donc comme fonction de Liapounov la forme quadratique $L_P(x) = \langle x, P_Q x \rangle$, où on a pris P_Q comme l'unique solution de l'équation linéaire de Liapounov $P_Q A + \top AP_Q = -Q$ avec Q définie positive. \square

La fonction de Liapounov de la proposition suivante est du type L_P avec P solution de l'équation linéaire de Liapounov $PA + \top AP = -I/2$ (cf. la forme (4.5)).

PROPOSITION 4.3: Soit A une matrice dont toutes les valeurs propres sont à partie réelle strictement négative. La fonction L_A définie⁸ par

$$L_A(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \|e^{sA} x\|_2^2 ds, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (4.6)$$

est une fonction stricte de Liapounov pour le système linéaire $x' = Ax$. Sa dérivée trajectorielle \dot{L} est donnée par $\dot{L}(x) = -\|x\|^2/2$, $x \in \mathbb{R}^n$.

DÉMONSTRATION. L'intégrale converge vu l'hypothèse sur les parties réelles des valeurs propres : les coordonnées de la fonction $t \mapsto e^{tA} x$ sont des produits de polynômes en t par des exponentielles $e^{t\lambda}$ avec λ dans le spectre de A : la norme $\|e^{tA} x\|_2^2$ est donc la somme de produits du type $t^k e^{t(\lambda+\mu)}$. La dérivation sous le signe d'intégration est justifiée et on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L_A(x(t)) &= dL_A(x(t))[x'(t)] = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d(\|e^{sA} x(t)\|_2^2) [x'(t)] ds \\ &= \int_0^{\infty} \langle e^{sA} x(t), e^{sA} x'(t) \rangle ds = \int_0^{\infty} \langle e^{sA} x(t), e^{sA} Ax(t) \rangle ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} [\|e^{sA} x(t)\|_2^2] ds = -\frac{1}{2} \|x(t)\|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

On aura utilisé que la différentielle du composé de produit scalaire

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|e^{sA} x\|_2^2 = \langle e^{sA} x, e^{sA} x \rangle$$

est l'application linéaire $h \in \mathbb{R}^n \mapsto 2\langle e^{sA} x, e^{sA} h \rangle$. \square

8. On a utilisé la norme euclidienne dans \mathbb{R}^n .

L'existence d'une fonction de Liapounov stricte pour un système non linéaire est assurée par une fonction de Liapounov pour son linéarisé $x' = Ax$ où A est supposé avoir toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement négative. On comparera avec le théorème 4.2 (critère de Routh).

THÉORÈME 4.9: *Soit A une matrice avec $\text{spec } A \subset \{\Re z < 0\}$ et soit l'ÉD $x' = Ax + r(x)$ non linéaire avec $\|r(x)\| = \mathcal{O}(\|x\|^2)$. Alors il existe une fonction de Liapounov stricte pour le système non linéaire.*

DÉMONSTRATION. Soit P symétrique définie positive solution de l'équation de Liapounov ${}^TAP + PA = -\mathbf{1}$ et la fonction $L_P(x) = \langle x, Px \rangle$. Soit U un voisinage de x_e et K une constante telle $\|r(x)\| \leq K\|x\|^2$. Alors

$$\begin{aligned} \dot{L}_P(x) &= 2\langle x, P(Ax + r(x)) \rangle = \langle x, ({}^TAP + PA)x \rangle + 2\langle x, Pr(x) \rangle \\ &\leq -\|x\|^2 + 2\|x\|\|P\|\|r(x)\| \leq -\|x\|^2 + 2K\|P\|\|x\|^3 = -\|x\|^2(1 - 2K\|P\|\|x\|) \end{aligned}$$

et par suite, si $\|x\| \leq 1/(4K\|P\|)$

$$\dot{L}_P(x) \leq -\frac{\|x\|^2}{2} \leq -\frac{\langle x, Px \rangle}{2\lambda_{\max}(P)} = -\frac{\langle x, Px \rangle}{2\|P\|} = -\frac{L_P(x)}{2\|P\|}.$$

Ainsi, vu que $L_P(x) \geq \lambda_{\min}(P)\|x\|^2$, si

$$L_P(x) \leq \lambda_{\min}(P)/(4K\|P\|)^2,$$

alors

$$\dot{L}_P(x) \leq -\frac{L_P(x)}{2\|P\|}, \quad \|x\| \leq 1/(4K\|P\|),$$

ce qui montre que L_P est de Liapounov stricte pour le PÉ $x_e = 0$ de l'ÉD non linéaire $x' = Ax + r(x)$. La dernière majoration permet d'établir le caractère exponentiel (en résolvant l'inégalité différentielle $u' \leq -u/A \leq 0$ avec $A = 2\|P\|$ et $u(t) := L_P(x_0)$) de la décroissance exponentielle vers le PÉ

$$L_P(x(t; x_0)) \leq e^{-t/(2\|P\|)} L_P(x_0),$$

pour une trajectoire démarrant en $x \in U_* = \{x \in U, \|x\| \leq 1/(4K\|P\|)\}$. \square

Δ **REMARQUE 4.7:** La preuve affirme que l'ellipsoïde $\{L(x) \leq \lambda_{\min}(P)/(4K\|P\|)^2\}$ est inclus dans le bassin d'attraction de l'origine et donne une borne sur le taux exponentiel $1/(2\|P\|)$ de convergence : examinant la preuve du théorème de Liapounov, on constate que le théorème Liapounov, tout en affirmant la convergence vers le PÉ, donne des précisions sur le bassin d'attraction (les énoncés de perturbation comme le théorème 4.2 ne le précisent pas).

Par ailleurs le choix de P résultant de celui de $Q = \mathbf{1}$ dans le second membre de l'équation linéaire de Liapounov n'est sans doute pas optimal. ∇

Terminons par quelques autres exemples

▷ EXEMPLES 4.8:

4.8.1 L'ÉD $x' = -1 - x^3$ admet $L(x) = x^2$ comme fonction de Liapounov stricte : $\dot{L}(x) = L'(x)(-x - x^3) = -2x^2(1 + x^2)$. Toute trajectoire converge vers l'origine : on a une stabilité asymptotique globale (qu'on avait déjà observée avec le théorème 2.2. La solution est donnée explicitement (après avoir utilisé la séparation des variables)

$$x(t) = \pm((1 + x_0^{-2}) \exp(2(t - t_0)) - 1)^{-1/2}, \quad t \geq 0.$$

4.8.2 Le système

$$x' = -2x + 2y^4, \quad y' = -y$$

a un linéarisé ($x' = -2x, y' = -y$) hyperbolique au PÉ l'origine : il y a stabilité asymptotique sur un voisinage de $(0, 0)$. La fonction

$$L(x, y) = 6x^2 + 12y^2 + 4xy^4 + y^8 = (2x + y^4)^2 + 2x^2 + 12y^2$$

vérifie pour $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \dot{L}(x, y) &= (12x + 4y^4)(-2x + 2y^4) + (24y + 16xy^3 + 8y^7)(-y) \\ &= -24(x^2 + y^2), \end{aligned}$$

Le PÉ est globalement asymptotiquement stable (*i. e.* toute trajectoire converge dans le futur vers $(0, 0)$). On le vérifie avec une résolution explicite de l'ÉD (en commençant pour résoudre y) :

$$x(t) = y_0^4 e^{-4t} + (x_0 e^{2t_0} - y_0^4 e^{-2t_0}) e^{-2t}, \quad y(t) = y_0 e^{-t}.$$

Trouver une fonction de Liapounov qui soit un polynôme de degré 2 semble difficile, par exemple la fonction $M_a(x, y) = ax^2 + y^2$ a comme dérivée trajectorielle

$$\dot{M}_a(x, y) = 2ax(-2x + y^4) + 2y(-y) = -2[2ax^2 - y^4x + y^2]$$

qui n'est pas partout négative (faire $x \rightarrow 0$ à y fixé) : ce n'est pas une fonction de Liapounov.

4.8.3 Soit ε réel et le système différentiel

$$(x' = -x + y + \varepsilon x(x^2 + y^2), \quad y' = -x - y + \varepsilon y(x^2 + y^2))$$

Le linéarisé en x_e est hyperbolique, avec valeurs propres $-1 \pm i$. La fonction $L(x, y) = x^2 + y^2$ est de Liapounov pour ce linéarisé (correspondant en fait à $\varepsilon = 0$)

$$\dot{L}(x, y) = 2x(-x + y) + 2y(-x - y) = -2(x^2 + y^2).$$

Pour le système non linéaire, on a

$$\dot{L}(x, y) = 2(x^2 + y^2)(-1 + \varepsilon(x^2 + y^2)) = -2L(x, y)(1 - \varepsilon L(x, y))$$

Ainsi, pour $\varepsilon < 0$, la fonction L est de Liapounov et l'origine est donc globalement asymptotiquement stable. De plus, $\dot{L}(x, y) \leq -2L(x, y)$ et par intégration $L(X(t)) \leq L(X_0)e^{2(t_0-t)}$ et par suite $\|X(t)\| \leq \|X_0\|e^{t_0-t}$.

Par ailleurs, pour $\varepsilon > 0$, soit un état initial situé à l'extérieur de la boule $\{\|X\| \leq \varepsilon\}$: on a $\dot{L}(X) > 0$, donc $L(X)$ ne peut qu'augmenter, le point (x, y) s'éloignant de cette boule. L'origine n'est donc pas globalement asymptotiquement stable. Son bassin d'attraction est la boule $\{\|X\| < \varepsilon^{-1}\}$ car pour un état initial X_0 avec $\|X_0\| < 1/\varepsilon$, la quantité $\dot{L}(X) < 0$ et l'« énergie » $L(X)$ tend vers 0 le long de chaque trajectoire à l'infini $t \sim +\infty$. Enfin, mentionons que ce système a une variation $\theta' = 1$. \triangleleft

▷ EXEMPLE 4.9 (L'équilibre de Walras [12, p. 719]): Dans une économie d'échange de n biens, l'ajustement du prix p_k pour $k = 1, \dots, n$ est proportionnel à l'excès de demande $D_k(\mathbf{p})$, soit l'ÉD

$$\mathbf{p}'(t) = a * D(\mathbf{p}(t)),$$

où les coefficients a_k sont positifs non nuls. Dépendantes du seul système des prix relatif, les fonctions D_k sont homogènes de degré 0. En fait il y a $n - 1$ prix indépendants : la loi de Walras⁹

$$\langle \mathbf{p}, D(\mathbf{p}) \rangle = \sum_k p_k D_k(\mathbf{p}) = 0 \quad (W)$$

implique

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_k \frac{p_k(t)^2}{a_k} \right) = \sum_k \frac{2p_k(t)p'_k(t)}{a_k} = 2 \sum_k p_k(t) D_k(\mathbf{p}(t)) = 2 \langle \mathbf{p}(t), D(\mathbf{p}(t)) \rangle = 0, \quad (4.7)$$

soit la constance de $\sum_k [p_k^2(t)/a_k]$ le long d'une trajectoire. Une trajectoire est donc incluse dans l'ellipsoïde $\mathcal{E}_C = \{(p_k) \in (\mathbb{R}^{*+})^n, \sum_k p_k^2/a_k = C\}$ pour un C convenable. Ainsi, vu que les a_k sont supposés positifs non nuls, la trajectoire de \mathbf{p} est bornée, ce qui implique que la durée de vie de \mathbf{p} est $+\infty$.

On suppose l'existence avec unicité d'un point d'équilibre \mathbf{p}_e dans l'espace des prix. Soit L la fonction définie par $L_a(\mathbf{p}) = \sum_k (p_k - p_{ek})^2/a_k$, qui vérifie $L_a(\mathbf{p}_e) = 0$, $L_a(\mathbf{p}) > 0$ si $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_e$ et

$$\langle \nabla L_a(\mathbf{p}), a * D(\mathbf{p}) \rangle = \sum_k 2(p_k - p_{ek}) D_k(\mathbf{p}) = -2 \sum_k p_{ek} D_k(\mathbf{p}) = -2 \langle \mathbf{p}_e, D(\mathbf{p}) \rangle$$

où on a utilisé à nouveau le loi de Walras (W). Ainsi, sous l'hypothèse

$$\langle \mathbf{p}_e, D(\mathbf{p}) \rangle > 0 \text{ si } \mathbf{p}_e \neq \mathbf{p}, \quad (H)$$

9. Sur l'ensemble des marchés, la somme des demandes nettes pondérées par les prix est nulle.

la fonction L_a est une fonction de Liapounov, avec comme conséquence la stabilité asymptotique de l'équilibre \mathbf{p}_e sur E_C .

Mais, la validité de l'hypothèse (H) n'est pas garantie.

◁

Chapitre 5

Quelques classes d'ÉD particulières

5.1 Champ de gradients

La différentielle d'une fonction $J : U (\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ au point $x \in U$ est une application linéaire $dJ(x)$, qu'on représente par un vecteur, dit *gradient* et noté $\nabla J(x)$, de telle manière que

$$dJ(x)[h] = \langle \nabla J(x), h \rangle, \quad h \in \mathbb{R}^n.$$

En coordonnées locales, le vecteur $\nabla J(x)$ est représenté par les dérivées partielles $\nabla J(x) = (\partial_{x_1} J(x), \dots, \partial_{x_n} J(x))$.

DÉFINITION 5.1: Une ÉD autonome $x' = f(x)$ sur un ouvert U de \mathbb{R}^n est dit de gradient s'il existe une fonction $J : U \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f = -\nabla J$.

▷ EXEMPLES 5.1:

5.1.1 En dimension $d = 1$, toute ÉD est de type gradient : il suffit de prendre une primitive $-J$ de f ¹.

5.1.2 En dimension 2, si le champ $m \in \mathbb{R}^2 \mapsto (X(m), Y(m))$ est de gradient, alors il existe $J : m \in \mathbb{R}^2 \mapsto J(m) \in \mathbb{R}$ tel que $\partial_x J = -X, \partial_y J = -Y$: ainsi si J est de classe \mathcal{C}^2 , on a $\partial_{xy}^2 J = \partial_{yx}^2 J$ et donc

$$\partial_y X(x, y) = \partial_x Y(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (5.1)$$

Ainsi ni le champ linéaire $(2x + 3y, 4x + 5y)$ ni le champ $(x, x^2 y^2)$ ne sont des champs de gradients. La condition (5.1) est suffisante : en posant

$$J(x, y) = - \int_0^y Y(x, b) db - \int_0^x X(a, 0) da, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (5.2)$$

on peut vérifier

$$\begin{aligned} \partial_x J(x, y) &= - \int_0^y \partial_x Y(x, b) db - X(x, 0) = - \int_0^y \partial_y X(x, b) db - X(x, 0) \\ &= - [X(x, b)]_0^y - X(x, 0) = -X(x, y) \end{aligned}$$

1. On aura donc l'ÉD $x' = -J'(x)$, qu'on ne résoudra pas par $x = -J(x) + C$!!

et simplement $\partial_y J(x, y) = -Y(x, y)$.

Néanmoins, la condition (5.1) n'est pas suffisante à l'existence d'un potentiel I pour tout champ $V : \Omega(\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Par exemple, le champ $V(x, y) = (y(x^2 + y^2)^{-1}, -x(x^2 + y^2)^{-1})$ bien défini sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ vérifie (5.1) : s'il admettait un potentiel I , on pourrait calculer

$$\begin{aligned} 0 &= I(e^{2i\pi}) - I(1) = \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} (I(e^{it})) dt = \int_0^{2\pi} \langle \nabla I(e^{it}), ie^{it} \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \langle (\sin t, -\cos t), (-\sin t, \cos t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} (-1) dt = -2\pi, \end{aligned}$$

ce qui n'est pas possible.

5.1.3 En dimension quelconque, si le champ $V = (V_1, \dots, V_n)$ est de gradient, alors $\partial_{x_i} V_j = \partial_{x_j} V_i$ pour $i, j \in [1, \dots, n]$. Cette condition est suffisante si le domaine de définition de V est une boule de rayon $R \in (0, +\infty]$. \triangleleft

\triangle REMARQUES 5.1:

1. Un point d'équilibre x_e de l'ÉD $x' = -\nabla J(x)$ associée au gradient de J est un point critique de J , *i. e.* $\nabla J(x_e) = 0$.
2. On fera l'hypothèse (minimum) de régularité \mathcal{C}^2 pour J afin de pouvoir appliquer les résultats d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz découlant d'une régularité \mathcal{C}^1 pour le membre de droite de l'ÉD $x' = -\nabla J(x)$.
3. On a aussi des équations du second ordre de type gradient pour $y : t \in I \mapsto y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$y'' + \alpha y' + \nabla J(y(t)) = 0$$

avec $\alpha \geq 0$ un coefficient de frottement. Le système d'ordre 1 associé est

$$y' = z, \quad z' = -\alpha z - \nabla J(y).$$

La fonction L_J définie par

$$L_J(y, z) = \frac{1}{2} \|z\|^2 + J(y)$$

avec dérivée trajectorielle

$$\overset{\circ}{L}_J(y, z) = \langle \nabla J(y), z \rangle + \langle z, -\alpha z - \nabla J(y) \rangle = -\alpha \|z\|^2.$$

est éventuellement une fonction de Liapounov ∇

Pour un champ de gradient, la dérivée trajectorielle $\overset{\circ}{J}$ est $\overset{\circ}{J} = \langle \nabla J, f \rangle = -\|\nabla J\|^2$. Cette fonction J est candidate à être une fonction de Liapounov! La dérivée du gradient $\nabla J(x)$ s'identifie à la matrice hessienne $\text{Hess} J(x) = (\partial_{x_i x_j}^2 J(x))$ de J dont le spectre est réel (puisque la matrice $\text{Hess} J$ est symétrique).

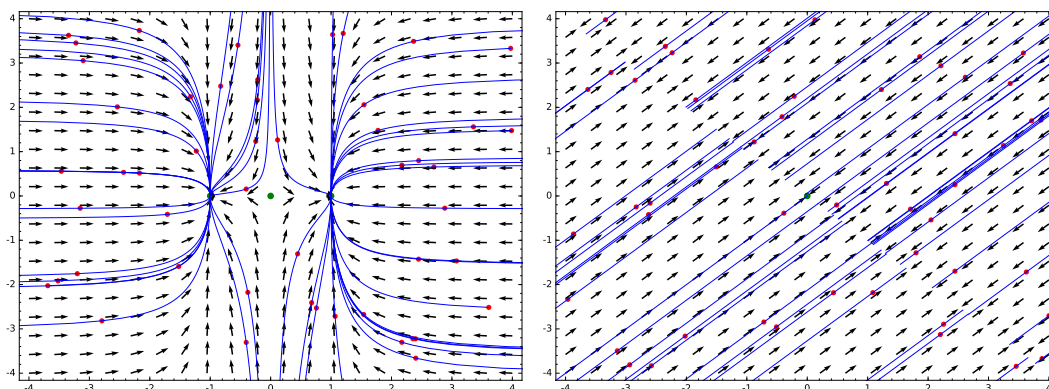


FIGURE V.1 – Les portraits de phase associés au champ de gradients des fonctions (a) $x^4/4 - x^2/2 + y^2/2$, (b) $(x + y)^2$.

THÉORÈME 5.1: Soit J une fonction uniformément convexe de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^n . Alors J a un unique point de minimum x_* et le système $x' = -\nabla J(x)$ a des trajectoires globales convergentes vers x_* telles que $\|x(t) - x_*\| \leq e^{-t\lambda_*} \|x_0 - x_*\|$ où $\lambda_* = \min_j \lambda_j(x_*)$ est la plus petite des valeurs propres (positives) de la hessienne de J . Ainsi le point x_* de minimum de J est, comme point d'équilibre de l'ÉD $x' = -\nabla J(x)$, asymptotiquement stable.

DÉMONSTRATION. À compléter □

Les deux exemples suivants sont repris graphiquement dans la figure V.1

▷ EXEMPLES 5.2:

5.2.1 Le champ de gradients $-\nabla J$ de la fonction

$$J(x, y) = \frac{ax^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

est $-\nabla J = (x - ax^3, -y)$. Tous les PÉ sont hyperboliques.

– L'origine $(0, 0)$, avec linéarisé $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, est un PÉ de type selle.

– Si, et seulement si, $a > 0$, il y a deux autres PÉ $(\pm 1/\sqrt{a}, 0)$ de linéarisé $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, et donc de type nœud.

5.2.2 Soit $J(x, y) = (x + y)^2$ avec $\nabla J(x, y) = -2(x + y, x + y)$: l'ÉD de ce champ de gradients est

$$x' = -2(x + y), \quad y' = -2(x + y).$$

C'est un système dégénéré, avec la droite $\{x + y = 0\}$ de PÉ non isolés. Si $z : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + y$, alors $z' = -4z$ et donc $z = z_0 e^{-4t}$ qui converge vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$. Les lignes de niveau de J sont des droites $\{x + y = C\}$. La

fonction $x - y$ est constante le long des trajectoires qui sont donc portées par les droites $y = x + A$. Les solutions x, y sont données par

$$x(t) = x_0 + z_0(e^{-4t} - 1)/2, \quad y(t) = y_0 + z_0(e^{-4t} - 1)/2,$$

vu que, par exemple, $x' = -2z = -2z_0e^{-4t}$ et la formule précédente par intégration. \triangleleft

5.2 Système hamiltonien

DÉFINITION 5.2: *Un système hamiltonien dans \mathbb{R}^2 est du type*

$$(x', y') = (\partial_y H(x, y), -\partial_x H(x, y))$$

où H est une fonction nommée hamiltonien du système.

Plus généralement, un système différentiel dit hamiltonien est de la forme

$$(x', y') = X_H(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{2n},$$

associé à la fonction (dite hamiltonienne) $H : (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \rightarrow H(x, y) \in \mathbb{R}$ est déterminé par le champ de vecteurs

$$X_H : (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mapsto (\partial_{y_1} H(x, y), \dots, \partial_{y_n} H(x, y), -\partial_{x_1} H(x, y), \dots, -\partial_{x_n} H(x, y)) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

▷ EXEMPLES 5.3:

5.3.1 La mécanique donne une foule de systèmes hamiltoniens sur $\mathbb{R}_{x,p}^{2n}$ à partir de la fonction énergie $H(q, p) = \|p\|^2/2 + V(q)$: l'équation hamiltonienne de degré $2n$ $(q, p)' = (p, -V'(q))$ est équivalente à l'équation de Newton $q'' = -V'(q)$.

– L'oscillateur harmonique $mh'' + kh = 0$ (cf. sous-section 5.3), équivalent au système du premier ordre

$$x' = y, \quad y' = -kx,$$

est hamiltonien d'hamiltonien $(kx^2 + y^2)/2$. Ses trajectoires sont portées par les ellipsoïdes (ellipses si $n = 1$) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}; kx^2 + y^2 = C\}$.

– Le pendule non amorti $\theta'' = -\omega^2 \sin \theta$ (cf. sous-section 5.5), ou sous la forme d'une ÉD d'ordre 1

$$\theta' = p, \quad p' = -\omega^2 \sin \theta,$$

a pour hamiltonien $H(\theta, p) = p^2/2 - \omega^2(\cos \theta - 1)$. Son linéarisé au PÉ $(k\pi, 0)$

$(k \in \mathbb{Z})$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(-1)^k & 0 \end{pmatrix}$: pour k pair, ses valeurs propres sont imaginaires pures, si bien que les trajectoires du linéarisé sont des ellipses.

5.3.2 Soit J la fonction définie par $J(x, y) = y^2 + x^2(x - 1)^2$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Il lui est associé son gradient ∇J et son hamiltonien H_J , tous deux champs de vecteurs donnés pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\nabla J(x, y) = (-2x(x - 1)(2x - 1), 2y), \quad H_J(x, y) = (2y, 2x(x - 1)(2x - 1)),$$

Les deux champs ∇J et H_J constituent un *système orthogonal* de champs de vecteurs. Ces deux champs déterminent des ÉD $X'(t) = \nabla J(X(t))$ et $Y'(t) = X_H(Y(t))$ qui ont les mêmes points d'équilibre, mais avec des propriétés de stabilité et des portraits de phase totalement différents. \triangleleft

Si (f, g) est un champ hamiltonien dans le plan avec hamiltonien H , alors $\partial_x f = \partial_x \partial_y H = \partial_{xy}^2 H = -\partial_y g$. La proposition suivante² assure que cette relation différentielle est caractéristique des champs hamiltoniens sur le plan \mathbb{R}^2 (de manière analogue à la caractérisation des champs de gradient avec la formule (5.2) ci-dessus)

PROPOSITION 5.1: Soient f, g de classe \mathcal{C}^1 deux fonctions numériques sur \mathbb{R}^2 . Alors le champ plan (f, g) est un champ hamiltonien si et seulement si $\partial_x f = -\partial_y g$. Une fonction hamiltonienne est

$$H(x, y) = \int_{y_0}^y f(x, u) du - \int_{x_0}^x g(u, y_0) du \quad (5.3)$$

où x_0, y_0 sont arbitraires.

DÉMONSTRATION. En dérivant (5.3), on montre que la formule (5.3) convient, *i. e.* vérifie $\partial_y H = f$ et $\partial_x H = -g$. Cette formule s'obtient par deux intégrations successives comme on va l'expliquer.

Tout d'abord, x étant fixé, on considère une primitive de $y \mapsto f(x, y)$, à savoir

$$h(x, y) = \int_{y_0}^y f(x, u) du + k(x)$$

dont la dérivée de h par rapport à y donne bien f et où la fonction k est encore à déterminer. Quant à la dérivée $\partial_x h$, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_x h(x, y) &= \int_{y_0}^y \partial_x f(x, u) du + k'(x) = - \int_{y_0}^y \partial_y g(x, u) du + k'(x) \\ &= -[g(x, u)]_{y_0}^y + k'(x) = -g(x, y) + g(x, y_0) + k'(x) \end{aligned}$$

ce qui amène à choisir k tel que $k'(x) = -g(x, y_0)$ soit $k(x) = -\int_{x_0}^x g(u, y_0) du$ par exemple. On a donc obtenu la formule (5.3) qui convient comme il a été affirmé. \square

2. En dimension 2, cette proposition a été déjà mentionnée dans l'exemple 5.1.1

△ REMARQUE 5.2: Le résultat reste vrai pour tout ouvert du plan simplement connexe (une boule, un rectangle). En dimension $2n$ avec $n > 1$, l'énoncé, et sa démonstration, est plus compliqué. ▽

LEMME 5.1: *La fonction H est constante le long d'une trajectoire.*

DÉMONSTRATION. On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(x(t)) &= \sum_{j=1}^n \left[\partial_{x_j}H(x(t))x'_j(t) + \partial_{y_j}H(x(t))y'_j(t) \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\partial_{x_j}H(x(t))\partial_{y_j}H(x(t)) + \partial_{y_j}H(x(t)) \left[-\partial_{x_j}H(x(t)) \right] \right] = 0. \end{aligned}$$

ce qui assure de la constante de H suivant chaque trajectoire. □

C'est donc la situation assez complémentaire de celle des systèmes de gradient ∇J où la fonction J décroît le long des trajectoires. Un système qui possède une fonction I constante le long de chaque trajectoire et non constante sur aucun ouvert est dit *conservatif*, la fonction I étant dite *intégrale première* du système ou *constante du mouvement*.

LEMME 5.2: *Un système hamiltonien ne peut avoir de PÉ asymptotiquement stable.*

DÉMONSTRATION. Raisonnons par l'absurde. Soit U un voisinage du PÉ asymptotiquement stable x_e . Il existe une boule (ouverte) $B(x_e)$ centrée en x_e stable et telle que toute trajectoire issue de $x \in B(x_e)$ converge vers x_e . Ainsi, pour $\bar{x} \in B(x_e)$,

$$H(\bar{x}) = H(x(t; \bar{x})) = \lim_{t \rightarrow +\infty} H(x(t; \bar{x})) = H(x_e)$$

et la fonction H serait constante sur l'ouvert $B(x_e)$ ce qui est exclus. □

△ REMARQUE 5.3: Le linéarisé d'un système hamiltonien d'hamiltonien H en un point d'équilibre est

$$\begin{pmatrix} \partial_{xy}^2 H & \partial_{y^2}^2 H \\ -\partial_{x^2}^2 H & -\partial_{yx}^2 H \end{pmatrix}$$

avec polynôme caractéristique

$$X^2 - [\partial_{yx}^2 H]^2 + \partial_{x^2}^2 H \partial_{y^2}^2 H$$

dont les racines sont soit réelles de signe distinct, soit purement imaginaires, soit nulles, Le linéarisé d'un système hamiltonien ne peut être ni de type col, ni de type foyer. ▽

PROPOSITION 5.2: *Soit un système hamiltonien d'hamiltonien H et x_e un PÉ de ce système. Si x_e est un minimum local strict de H, alors le PÉ est stable.*

DÉMONSTRATION. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, la sphère $S_\varepsilon = \{x/\|x - x_e\| = \varepsilon\}$ est dans un voisinage U de x_e , avec $m_\varepsilon = \inf_{S_\varepsilon} H > H(x_e)$. Soit $\delta > 0$ tel que $H(x_e) < H(x) < m_\varepsilon$ pour tout x dans la boule $B(x_e, \delta) = \{\|x - x_e\| < \delta\}$ excepté x_e . Alors, pour tout x dans la boule $B(x_e, \delta)$, on a $H(x) = H(x(t; x)) < m_\varepsilon$ et la trajectoire $(x(t; x))_{t \geq 0}$ issue de x est astreinte à rester pour le futur dans la boule $B(x_e, \varepsilon)$: sinon elle atteindrait en un point $x(t_*; x)$ la sphère S_ε et on aurait $H(x) = H(x(t_*; x)) \geq m_\varepsilon$ qui contredit $H(x) < m_\varepsilon$. La trajectoire confinée dans cette boule est aussi définie en tout temps $t \geq 0$: on a donc établi la stabilité du PÉ x_e . \square

▷ EXEMPLES 5.4:

5.4.1 Si $H(x, y) = U(x) + \|y\|^2$, les minima locaux stricts de U correspondent à des PÉ stables.

5.4.1 Un PÉ du linéarisé non stable n'implique pas la non stabilité du système non linéaire. Par exemple, soit H défini suivant $H(x, y) = x^2 + y^4$: l'ÉD hamiltonienne associée est $x' = 4y^3, y' = -2x$, dont le linéarisé $X' = 0, Y' = -2x$ en $x_e = (0, 0)$ n'est pas stable : il y a des trajectoires linéaires (pour $x_0 \neq 0$). Cependant, vu que le PÉ à l'origine est un minimum local strict de H , le PÉ de l'ÉD hamiltonienne est stable.

5.4.1 La stabilité du linéarisé n'implique pas celle du système hamiltonien. Soit l'hamiltonien de Cherry (1929),

$$H(x, u, y, v) = \frac{x^2 + y^2}{2} - (u^2 + v^2) + \frac{v(y^2 - x^2)}{2} - xyu, \quad (x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4.$$

avec ÉD associée

$$\begin{aligned} x' &= \partial_y H = y + yv - xu, & y' &= -\partial_x H = -x + xv + yu, \\ u' &= \partial_v H = -2v + \frac{1}{2}(y^2 - x^2), & v' &= -\partial_u H = 2u + xy. \end{aligned}$$

L'origine est un PÉ stable pour le linéarisé

$$x' = y, \quad y' = -x, \quad u' = -2v, \quad v' = 2u.$$

Néanmoins, pour tout $T > 0$, la fonction définie par

$$t \mapsto \left[x(t) = -\frac{\sqrt{2} \cos \tilde{t}}{\tilde{t}}, u(t) = \frac{\cos(2\tilde{t})}{\tilde{t}}, y(t) = \frac{\sqrt{2} \sin \tilde{t}}{\tilde{t}}, v(t) = \frac{\sin(2\tilde{t})}{\tilde{t}} \right]$$

où on a noté $\tilde{t} = t - T$, est une solution de l'ÉD non linéaire explosant au temps fini T . \triangleleft

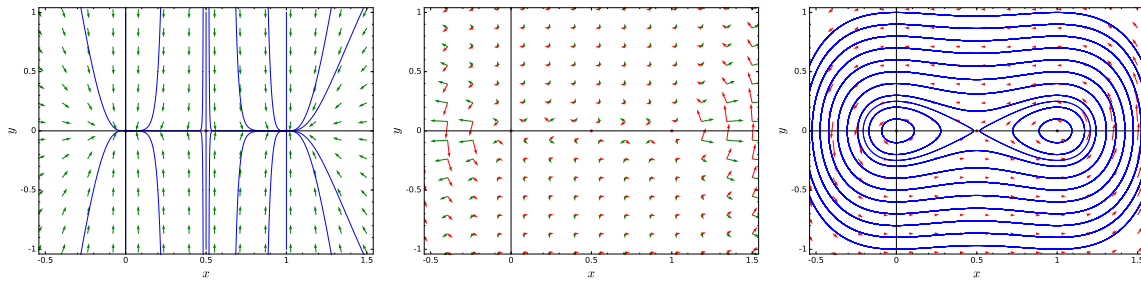


FIGURE V.2 – Portraits de phase du champ de gradients (à gauche) et du champ hamiltonien (à droite) de la fonction $F(x, y) = x^2(x-1)^2 + y^2$, avec champs de directions orthogonaux (au centre).

5.3 L'oscillateur harmonique

Soit une masse accrochée à un ressort (fil avec une certaine élasticité) de raideur : suivant la loi de Hooke, son mouvement vertical est décrit par l'ÉD $mh'' = -\kappa h$ où $m > 0$ est une masse normalisée à $m = 1$ et la tension ou raideur $\kappa > 0$, soit en posant $x = h$ et $y = h'$, le système

$$x' = y, \quad y' = -\kappa x.$$

Ce système est hamiltonien de fonction hamiltonienne $E(x, y) = (\kappa x^2 + y^2)/2$, et donc conservatif, avec comme intégrale première l'énergie totale $E(x, y) = (\kappa x^2 + y^2)/2$, qui est une fonction de Liapounov associé au PÉ à l'origine. On retrouve la stabilité de l'origine, qui est l'unique PÉ de cet oscillateur.

Supposons que la force opérant sur le fil ne soit plus linéaire mais de la forme $x\kappa(x)$ avec $\kappa(0) = 0$ et $\kappa(x) > 0$ si $x \neq 0$. Le système devient

$$x' = y, \quad y' = -x\kappa(x).$$

avec énergie totale

$$E(x, y) = \int_0^x u\kappa(u)du + y^2/2$$

qui est à nouveau une intégrale première :

$$\langle \nabla E(x, y), (y, -x\kappa(x)) \rangle = x\kappa(x)[y] + y[-x\kappa(x)] = 0.$$

Ajoutons un terme d'amortissement à l'ÉD, *i. e.* un terme de la forme $ax' = ay$ avec la constante $a \geq 0$, soit le système

$$x' = y, \quad y' = -\kappa x - ay$$

induisant la dérivée trajectorielle

$$\overset{\circ}{E}(x, y) = \langle \nabla E(x, y), (y, -\kappa x - ay) \rangle = (\kappa x)(y) + (y)(-\kappa x - ay) = -ay^2$$

pour l'énergie $E(x, y) = (\kappa x^2 + y^2)/2$. Ceci établit la stabilité du PÉ $(0, 0)$.

Si on considère la fonction $L_{\alpha, \beta, \gamma}(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ comme éventuelle fonction de Liapounov le long de ces trajectoires, on vérifie

$$\begin{aligned} \langle \nabla L_{\alpha, \beta, \gamma}, (y, -\kappa x - ay) \rangle &= (2\alpha x + \beta y)(y) + (\beta x + 2\gamma y)(-\kappa x - ay) \\ &= (2\alpha - \beta a - 2\gamma a \kappa)xy - \kappa \beta x^2 + (\beta - 2\gamma a)y^2. \end{aligned}$$

Si $\kappa = 2$ et $a = 1$, alors le choix $\alpha = 7$, $\beta = 2$ et $\gamma = 3$, donne une fonction de Liapounov forte

$$\overset{\circ}{L}_{7,2,3} = \langle \nabla L_{7,2,3}, (y, -2x - y) \rangle = -4(x^2 + y^2),$$

la forme quadratique $7x^2 + 2xy + 3y^2$ étant bien définie positive. Ceci implique que le PÉ $x_e = (0, 0)$ est asymptotiquement stable. Cet exemple illustre le fait que la fonction énergie n'est pas toujours la plus apte à détecter une stabilité asymptotique.

Modifions cet exemple en supposant κ et a non constants, avec comme ci-dessus $k(x) = \int_0^x u\kappa(u)du$ et a ayant la propriété $a(x) > 0$ si $x \neq 0$ et $a(0) = 0$. L'ÉD est toujours

$$x' = y, \quad y' = -k(x) - a(x)y.$$

En prenant comme fonction énergie $\tilde{E}(x, y) = \int_0^x u\kappa(u)du + y^2/2$, on obtient

$$\langle \nabla \tilde{E}(x, y), (y, -a(x) - \kappa y) \rangle = x\kappa(x)[y] + y[-x\kappa(x) - ya(x)] = -y^2 a(x) \leq 0.$$

On retrouve une stabilité asymptotique vu l'hypothèse $a(x) > 0$.

5.4 Modèle prédateurs/proies, modèle de Goodwin

Reprenons le modèle de Lotka-Volterra introduit dans la section 1.3 (chapitre 1) : son ÉD est $X' = V(x, y)$ où $V(x, y) = (x(1 - y), y(x - 1))$, avec deux points d'équilibre $(0, 0)$ et $(1, 1)$ dans le plan (un seul $(1, 1)$ dans le quadrant \mathbb{Q}^2) et leur linéarisées respectives

$$(0, 0) : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1, 1) : \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

le premier étant un point selle ($\text{Spec} = \{\pm 1\}$), le second un centre ($\text{Spec} = \{\pm i\}$). Sa perturbation $V_\varepsilon(x, y) = V(x, y) + \varepsilon(x^2, 0)$ par ajout du terme purement quadratique $\varepsilon(x^2, 0)$ à V , ε supposé petit, a 3 PÉ avec applications linéarisées de la fonction V_ε respectives

$$(0, 0) : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1, 1 - \varepsilon) : \begin{pmatrix} 3\varepsilon & -1 \\ 1 - \varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \quad (-\varepsilon^{-1}, 0) : \begin{pmatrix} -1 & \varepsilon^{-1} \\ 0 & -\varepsilon^{-1} - 1 \end{pmatrix}.$$

Le second PÉ a comme spectre de son linéarisé $\left\{ 3\varepsilon/2 \pm i\sqrt{1 - \varepsilon - 9\varepsilon^2/4} \right\}$. Pour ε petit non nul, aucune des valeurs propres de ces matrices n'est purement imaginaire : toutes les valeurs propres sont hyperboliques. Les valeurs propres de la linéarisée

au PÉ $(0, -\varepsilon^{-1})$ sont à partie imaginaire strictement négative pour $\varepsilon > 0$; ce PÉ est donc stable asymptotiquement.

La fonction

$$(x, y) \in \mathbb{O}^2 \mapsto y + x - \ln y - \ln x$$

est constante le long de toute trajectoire. En fait, le changement de variable $u = \log x, v = \log y$ introduit le nouveau système

$$u' = 1 - e^v, v' = e^u - 1, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

hamiltonien, d'hamiltonien $H(u, v) = u - e^u + v - e^v$.

PROPOSITION 5.3: *Les trajectoires du système de Lotka-Volterra du quadrant positif \mathbb{O}^2 sont périodiques.*

DÉMONSTRATION. Vu la partition en trajectoires du plan, une trajectoire ayant un point dans \mathbb{O}^2 y reste : sinon, elle rencontrerait nécessairement un demi-axe ou l'origine (qui sont des trajectoires) et s'y confondrait, ce qui n'est pas possible. Par ailleurs, une trajectoire est bornée, car sinon on aurait une suite de points sur la trajectoire tendant vers l'infini, avec les valeurs de l'intégrale première $T(x, y) = x - \ln(x) + y - \ln(y)$ tendrait aussi vers $+\infty$. Soit les quatre sous-domaines $\mathcal{D}_{\pm\pm} =$

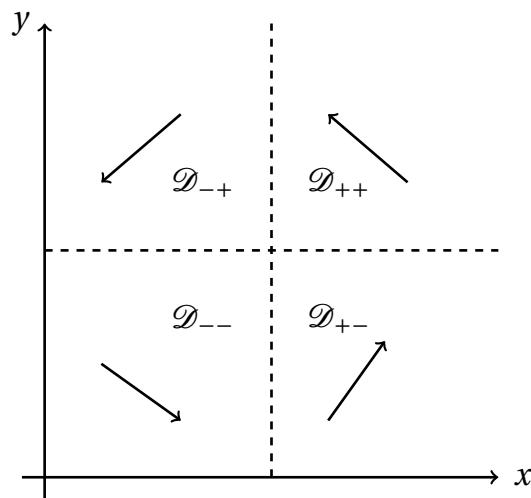


FIGURE V.3 – Le quadrant \mathbb{O}^2 partitionné en les $\mathcal{D}_{\pm\pm}$.

$\{\pm(x-1) > 0, \pm(y-1) > 0\}$ de \mathbb{O}_+^2 . On va tout d'abord montrer qu'une trajectoire $\mathcal{T} : t \in \mathbb{R} \mapsto T(t)$ ayant un point $X(t_0)$ dans \mathcal{D}_{--} en a un autre $X(t_1)$ dans \mathcal{D}_{+-} avec $t_1 > t_0$. En effet, le long de la trajectoire dans \mathcal{D}_{--} on a $x' > 0, y' < 0$ donc x est croissante et y est décroissante : ces coordonnées convergent donc vers x_∞ et y_∞ : vu que $y(t_0) < 1$ et y décroissante, on a $y_\infty < 1$: soit $y_\infty = 0$ (ce qui n'est pas possible d'après la remarque liminaire), soit le point limite $X(\infty)$ reste dans l'intérieur du domaine \mathcal{D}_{--} (ce qui n'est pas : on peut continuer la trajectoire et donc dépasser le x_∞). On a donc M_∞ dans le bord vertical de \mathcal{D}_{--} : la trajectoire continuée rentre

dans l'intérieur du domaine \mathcal{D}_{+-} : notons $X(t_1)$ le point de passage sur la verticale entre \mathcal{D}_{--} et \mathcal{D}_{+-} . Les passages successifs par la trajectoire de \mathcal{D}_{+-} à \mathcal{D}_{++} , de \mathcal{D}_{++} à \mathcal{D}_{-+} , de \mathcal{D}_{-+} à \mathcal{D}_{--} , de \mathcal{D}_{--} à \mathcal{D}_{+-} s'établissent de la même façon. Les domaines autres que \mathcal{D}_{--} ne sont pas bornés : néanmoins, du fait de l'intégrale première T une trajectoire est nécessairement bornée, car sinon T ne serait pas bornée le long de cette trajectoire.

Ainsi le second passage de \mathcal{D}_{--} à \mathcal{D}_{+-} détermine un point $X(t_2) = (1, y(t_2))$. L'intégrale première T a même valeur en $X(t_1)$ et $X(t_2)$, soit donc $1 - y(t_1) + \ln y(t_1) = 1 - y(t_2) + \ln y(t_2)$. La fonction $u \in (0, 1) \mapsto u - \ln u$ est injective (car strictement décroissante). Il en résulte l'égalité $y(t_1) = y(t_2)$ et la coïncidence des points $X(t_1) = X(t_2)$. Il en résulte d'après l'unicité du problème de Cauchy l'égalité $X(t_1 + t) = X(t_2 + t)$ pour $t \geq t_0$, soit $X(t) = X(t + T)$ avec $T = t_2 - t_1$ et pour tout $t \geq 0$. \square

▷ EXEMPLES 5.5:

5.5.1 Introduit en 1967, le modèle de Goodwin décrit les dynamiques combinées de la part $u \in (0, 1)$ de salaires dans le revenu et du taux d'emploi v . Cette dynamique est exactement déterminée par un système de type Lotka-Volterra avec les demandes salariales en populations de proies et le nombre de salariés comme les prédateurs. Les différents paramètres socio-économiques, avec des hypothèses de modélisation afférentes, sont

- le ratio capital/produit $\sigma = K/Q$ est constant,
- la productivité croît à un taux constant α ,
- la population active est stationnaire,
- les profits sont intégralement réinvestis,

hypothèses qui se traduisent dans les équations

$$\begin{aligned}\frac{Q'}{Q} &= \frac{1-u}{K}Q = \frac{1-u}{\sigma}, \\ \frac{v'}{v} &= \frac{Q'}{Q} - \alpha, \\ \frac{w'}{w} &= -\gamma + \rho v, \\ \frac{u'}{u} &= \frac{w'}{w} - \alpha.\end{aligned}$$

où on a supposé que les salaires w croissent linéairement avec le taux d'emploi (relation du type *courbe de Phillips*). Finalement, les quantités u, v vérifient ainsi le système (non linéaire) d'ÉD

$$u' = u(-(\gamma + \alpha) + \rho v), \quad v' = v(\sigma^{-1}(1-u) - \alpha).$$

Dans le premier quadrant $\mathbb{O}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$, le système de Goodwin $X' = G(X)$ avec

$$G(u, v) = (u(-(\gamma + \alpha) + \rho v), v(\sigma^{-1}(1-u) - \alpha)), \quad u, v > 0$$

a un seul PÉ $m_e = (u_e, v_e)$ tel que

$$u_e = 1 - \sigma\alpha, v_e = (\gamma + \alpha)/\sigma,$$

et avec linéarisé en ce PÉ m_e

$$\text{DG}(m_e) = \begin{pmatrix} 0 & \rho u_e \\ -\sigma^{-1} v_e & 0 \end{pmatrix},$$

opérateur à valeurs propres purement imaginaires

$$\pm \sqrt{\rho/\sigma u_e v_e} = \pm \sqrt{\rho\sigma^{-2}(1 - \sigma\alpha)(\gamma + \alpha)},$$

les trajectoires du linéarisé étant des courbes compactes fermées (homéomorphes à des ellipses). Le système de Goodwin est de type Lotka-Volterra, système hamiltonien relativement aux variables $u = \log x, v = \log y$ comme il sera développé ci-après.

5.5.2 Le modèle épidémiologique, dit *SIR*, décrit l'évolution des trois composantes d'une population en interaction : la première *S* avec des individus sains et susceptibles d'être contaminés, la seconde *I* d'individus infectés susceptibles de contaminer et celle *R* d'individus immunisés partiellement (susceptibles de rechutes). Le système différentiel décrivant ce modèle est

$$S' = -\beta IS + \gamma R, \quad I' = \beta IS - \nu I, \quad R' = \nu I - \gamma R$$

Les constantes $\beta, \nu, \gamma > 0$ proviennent des observations. Le terme βIS exprime l'interaction entre les individus sains et les infectés : c'est la quantité d'individus sains devenant infectés par unité de temps dt , alors que Le terme νI est le nombre d'individus infectés guérissant et le terme γR est le nombre d'individus immunisés qui redeviennent malades.

Vu la constante de $N_0 = S + I + R$, ce système différentiel est en fait un système différentiel de dimension 2 :

$$S' = \gamma(N_0 - I) - (\beta I + \gamma)S, \quad I' = \beta IS - \nu I.$$

Les points d'équilibre sont $(S = N_0, I = 0, R = 0)$ (toute la population est saine), $(S = \nu/\beta, I = \gamma(\beta N_0 - \nu)/[\beta(\gamma + \nu)])$ nombres tous positifs que si $N_0 > \nu/\beta$. Le premier est un point selle si $N_0 > \nu/\gamma$, un nœud stable si $N_0 < \nu/\gamma$, le second est toujours asymptotiquement stable.

5.5.3 Plus généralement, la dynamique des populations amène à des systèmes avec des champs de vecteurs quadratiques. Par exemple, on observe l'évolution de deux populations. Si elles sont séparées leur dynamique est modélisée par un champ logistique $f(x, y) = (x(X - Ax), y(Y - Cy))$ (cf. exemple 1.2.4). Leur mise en compétition pour la nourriture est modélisée par l'ajout du champ $(-Bxy, -Dxy)$. On a donc le système [17]

$$x' = x(X - Ax - By), \quad y' = y(Y - Cy - Dx)$$

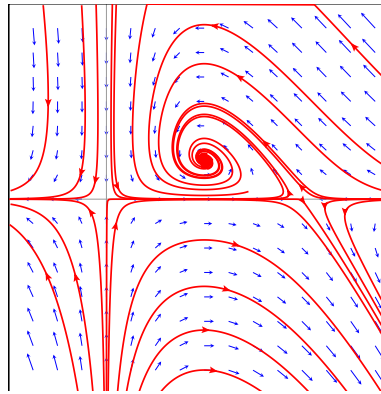


FIGURE V.4 – Solutions du système $(x', y') = V(x, y) - (x^2/5, 0)$, perturbation de $V(x, y) = (x(2 - y), y(x - 5))$ de type Lotka-Volterra. Il y a stabilité asymptotique vers le PÉ $(-5, 0)$.

pour certaines constantes X, Y, A, B, C, D positives. On a tracé dans la figure V.5 le portrait de phase pour deux choix de paramètres. Le PÉ à coordonnées strictement positives est un point asymptotiquement stable pour le premier système, un point selle pour le second. \triangleleft

5.5 Le pendule

Soit $\alpha \geq 0$. Le pendule à sa dynamique angulaire décrite par l'ÉD non linéaire

$$\theta'' + 2\alpha\theta' + \omega^2 \sin \theta = 0,$$

soit en terme de système différentiel d'ordre 1

$$u' = v, \quad v' = -\omega^2 \sin u - 2\alpha v. \quad (5.4)$$

où $u = \theta$ est l'angle et $v = \theta'$ la vitesse angulaire. Le coefficient α donne un terme d'amortissement (frottement, résistance de l'air), le modèle linéaire a un terme θ au lieu du terme $\sin \theta$ (approcher par θ lorsque l'angle θ est petit) et le coefficient ω^2 est donné comme quotient $\omega^2 = g/\ell$ de la constante gravitationnelle g et la longueur ℓ du pendule.

Le système (5.4) du pendule admet $(\mathbb{Z}\pi, 0)$ comme ensemble de PÉ dans la représentation de système différentiel d'ordre 1. La jacobienne de l'application $f : (u, v) \mapsto (v, -\omega^2 \sin u - 2\alpha v)$ est

$$Df(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos u & -2\alpha \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Si k est pair, $Df(k\pi, 0)$ a comme valeurs propres $-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$, dont les parties réelles sont toutes strictement négatives s'il y a amortissement $\alpha > 0$: ces PÉ sont

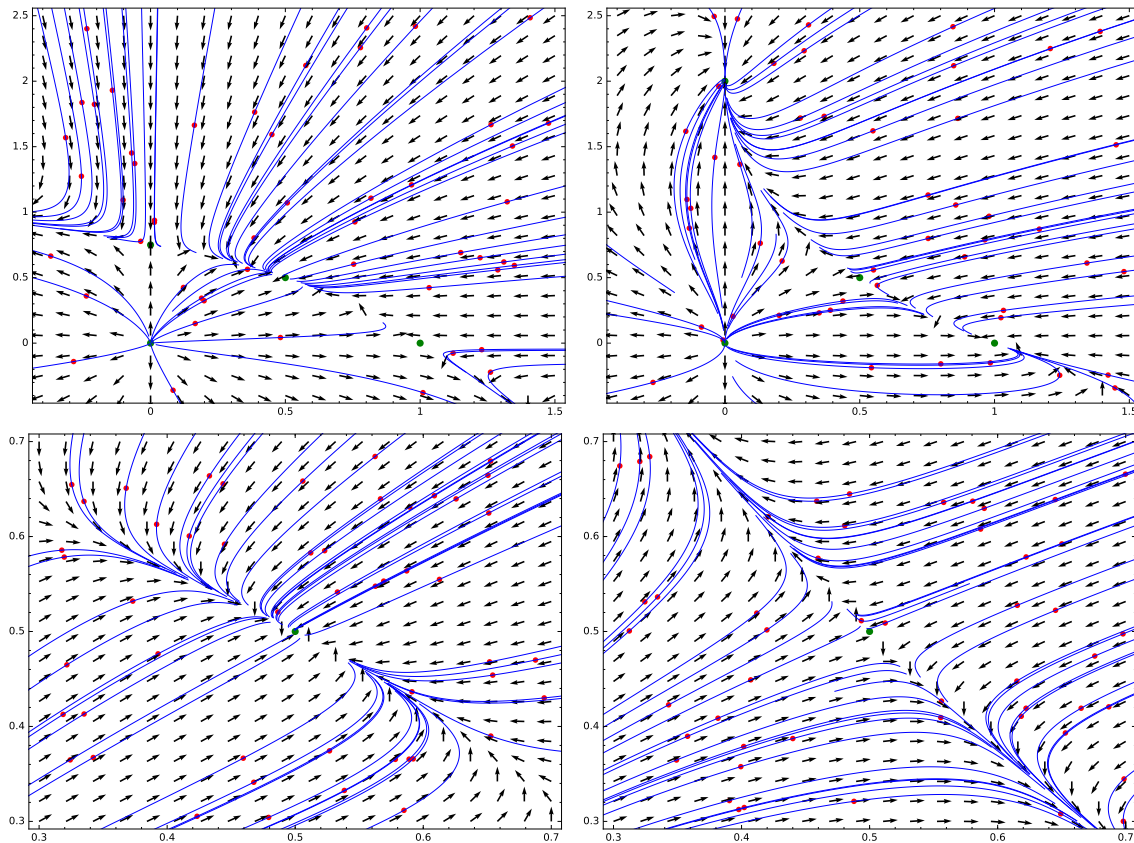


FIGURE V.5 – Évolution de deux espèces en interaction (avec les 4 PÉ, puis zoomé sur le PÉ $(0.5, 0.5)$) : à gauche $x' = x(1 - x - y)$, $y' = y(0.75 - y - 0.5x)$, à droite $x' = x(1 - x - y)$, $y' = y(0.5 - 0.25y - 0.75x)$.

donc asymptotiquement stables. Pour k impair, la matrice jacobienne $Df(k\pi, 0)$ a comme valeurs propres $-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$, dont une est positive : l'équilibre n'est pas stable dans ce cas.

Le pendule non amorti est le cas où $\alpha = 0$: l'ÉD est $\theta'' + \omega^2 \sin \theta = 0$ avec système associé $u' = v, v' = -\omega^2 \sin u$. Ce système est hamiltonien avec hamiltonien $H(u, v) = v^2/2 - \omega^2 \cos u$. Le spectre de la jacobienne du PÉ $(0, 0)$ est $\pm i\omega$: les méthodes spectrales précédentes ne répondent pas à la question de stabilité. Vu le caractère hamiltonien du système, le PÉ $(0, 0)$ (minimum strict) est stable.

Le pendule linéaire (amorti ou non) $\theta'' + 2\alpha\theta' + \omega^2\theta = 0$ (obtenu en considérant l'approximation linéaire θ de $\sin \theta$ au $\theta_e = (0, 0)$ équivalent au système différentiel d'ordre 1 $u' = v, v' = -\alpha v - \omega^2 u$. On retrouve l'oscillateur harmonique de la sous-section 5.3.

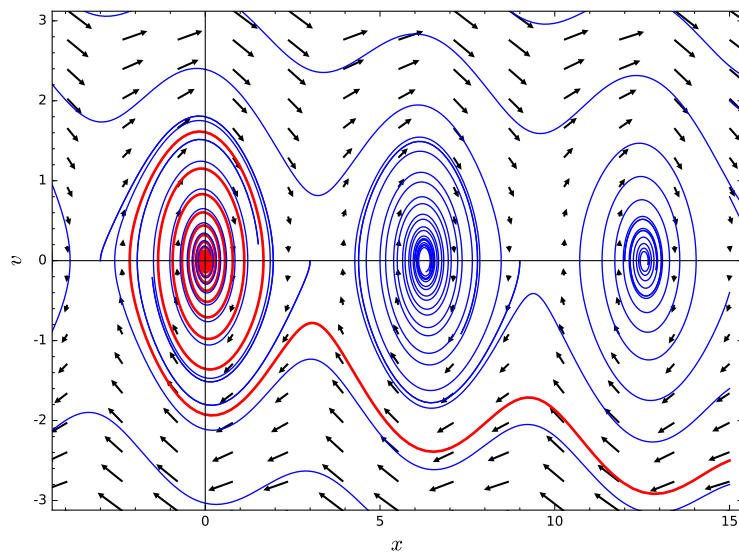


FIGURE V.6 – Diagrammes de phase du pendule non linéaire, avec champs des vitesses.

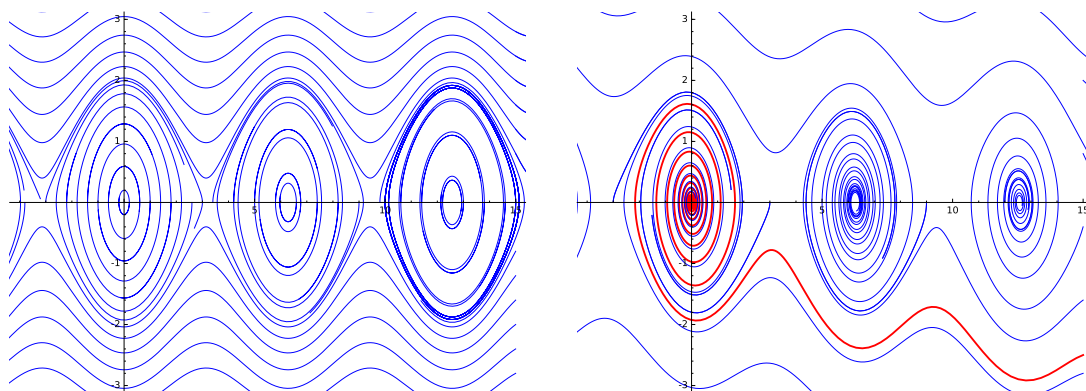


FIGURE V.7 – Diagrammes de phase du pendule non linéaire : sans amortissement à gauche, avec amortissement à droite.

Bibliographie

- [1] A. Alvarez, T'es sûr du résultat? Images des Mathématiques, CNRS, 2015.
- [2] M. Braun, Differential equations and their applications, 1992.
- [3] Pascale Dameron, Mathématiques des modèles économiques, Economica
- [4] R. L. Devaney, M. Hirsch, S. Smale, Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos,
- [5] F. Jean, Stabilité et commande des systèmes dynamiques, Presses de l'ÉNSTA, Prépublication, ([consulté le 25 août 2017](#)).
- [6] John Guckenheimer, P.J. Holmes, Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields, Springer
- [7] P. Hammond, A. Seierstad, A. Strom, K. Sysæter, Further mathematics for economic analysis, Prentice Hall, 2005.
- [8] Thomas W. Judson, The ordinary differential equations project, ([consulté le 4 septembre 2017](#)).
- [9] A. Liapounov, Problème général de la stabilité du mouvement, [Ann. Faculté Sc. de Toulouse, Sér. 2 Vol. 9 \(1907\), 203-474](#)
- [10] François Liret, Maths en pratique à l'usage des étudiants, Dunod
- [11] [F. Lordon, Théorie de la croissance: quelques développements récents, Première partie, La croissance cyclique, OFCE, Observations et diagnostic économique, 36 \(157-211\), 1991.](#)
- [12] Phillipe Michel, Cours de mathématiques pour économistes, Economica, 1989.
- [13] Jean Louis Pac, Systèmes dynamiques, Dunod, 2016.
- [14] Lawrence Perko, Differential equations and dynamical systems, 1999.
- [15] [Herbert Scarf, Some examples of global instability of the competitive equilibrium, International Economic Review, 1#3 \(1960\), 157-172](#)
- [16] Robert M. Solow, A contribution to the theory of economic growth, Quarterly J. Economics, 70 (1956), 65–94.

- [17] [Yu Shih-Hsien, Introduction to ordinary differential equations](#), consulté le 2/12/2017.
- [18] J. Stutzer, Chaotic dynamics and bifurcation in a macro model, J. Eco. Dynamics and Control 2 (1980) 353-376
- [19] A. Takayama, Mathematical economics, CUP, 2006.
- [20] Ferdinand Verhuslt, Nonlinear differential equations and dynamical systems, Springer, 2006.
- [21] Claude Viterbo, Systèmes Dynamiques, équations différentielles et Géométrie différentielle, ([consulté le 32 août 2017](#)).

L'ÉD $y' = 1/(y - t^2 y)$, $y(0) = 4$ a comme solution $y(t) = \sqrt{16 - \log|1 - t^2|}$, définie pour $|t| < 1$. Sage donne comme solution

$$-1/2*y(t)^2 == -1/4*I*pi + 1/2*t + 1/4*log(2*t - 1) - 8$$

Voilà le code résolvant $P' = kP$, $P(t_0) = 1000$.

```
k,t = var( 'k, t ') #declare variables k and t
P = function( 'P ')(t) #declare P to be a function of t
de = diff(P, t) == k*P #differential equation
#solve specifying initial conditions
#and independent variable solution
solution = desolve(de, P, ivar=t, ics=[0, 1000])
solution
```

Équation logistique :

```
t=var('t')
x=function('x')(t)
de= diff(x,t) == x^2-x
sol=desolve(de,x,ivar=t)
sol

... log(x(t) - 1) - log(x(t)) == _C + t
```

Le code SageMath de la Fig. I.5

```
t,y = var('t,y')
f(t,y) = y^2/2 - t
p=plot_slope_field(f, (t,-1,5), (y,-5,10), headaxislength=3, headlength=3,
  axes_labels=[ '$t$', '$y(t)$'])
for yy in [0,-1,0.3,0.325,0.328,0.329,0.3292] :
  p+=desolve_rk4(f,y,ics=[-1,yy],ivar=t,output='plot',end_points=[-1,5],thickness=2)
```

Code de la figure I.9

```
from sage.calculus.desolvers import desolve_odeint
x,y=var('x,y')
f=[x*(1-y)+x*x/10,-y*(1-x)]
p=Graphics()
for yy in [0.5,0.6,0.7,0.8,1,1.2,1.4,1.7] :
  desolve_odeint(f,[1,yy],srange(0,10,0.1),[x,y])
  p+=line(zip(sol[:,0],sol[:,1]))
p
```

Code de la Fig. I.10

```
from sage.calculus.desolvers import desolve_odeint
x,y=var('x,y')
f=[x*(3-x-2*y),y*(2-x-y)]
p=Graphics()
for yy in [0.2,0.5,0.6,0.7,0.8,1,1.2,1.4,1.7] :
  for xx in [0.2,0.5,1,1.2,1.6,3] :
    sol=desolve_odeint(f,[xx,yy],srange(0,10,0.1),[x,y])
    p+=line(zip(sol[:,0],sol[:,1]))
p
```