Modèle de croissance de Solow (1956)

A CONTRIBUTION TO THE THEORY OF ECONOMIC GROWTH

By ROBERT M. SOLOW

I. Introduction, 65. — II. A model of long-run growth, 66. — III. Possible growth patterns, 68. — IV. Examples, 73. — V. Behavior of interest and wage rates, 78. — VI. Extensions, 85. — VII. Qualifications, 91.

I. INTRODUCTION

All theory depends on assumptions which are not quite true. That is what makes it theory. The art of successful theorizing is to make the inevitable simplifying assumptions in such a way that the final results are not very sensitive.[1] A "crucial" assumption is one on which the conclusions do depend sensitively, and it is important that crucial assumptions be reasonably realistic. When the results of a theory seem to flow specifically from a special crucial assumption, then if the assumption is dubious, the results are suspect.

$$L'(t) = \nu L(t)$$
$$K'(t) = sP(K(t), L(t)) - \mu K(t)$$

- L : force de travail
- K : capital
- $P(K, L)$: fonction de production
- ν : taux de croissance
- μ : taux de dépréciation physique du capital
- s : taux d'épargne
- $k(t) = K(t)/L(t)$: capital par unité de travail
- $a = \mu + \nu$

Modèle rudimentaire : d'autres facteurs (par ex. progrès technique) peuvent être introduits.

P homogène de degré 1 (rendements d'échelle constants) : en posant $p(k) = P(k, 1)$, on a

$$P(K, L) = LP(K/L, 1) = Lp(K/L)$$

et donc, vu que $L' = \nu L, K' = sP(K, L) - \mu K$,

$$\begin{aligned} k'(t) &= (K(t)/L(t))' \\ &= K'(t)/L(t) - K(t)L'(t)/L^2(t) \\ &= sp(k(t)) - (\mu + \nu)k(t) \\ &= sp(k(t)) - ak(t) \end{aligned}$$

En particulier, une fonction de production P de Cobb-Douglas du type $P(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$ avec $\alpha \in (0, 1)$, vérifie les hypothèses économiques : la fonction $p(k) = k^\alpha$ satisfait à l'ÉD

$$k'(t) = sk^\alpha(t) - ak(t)$$

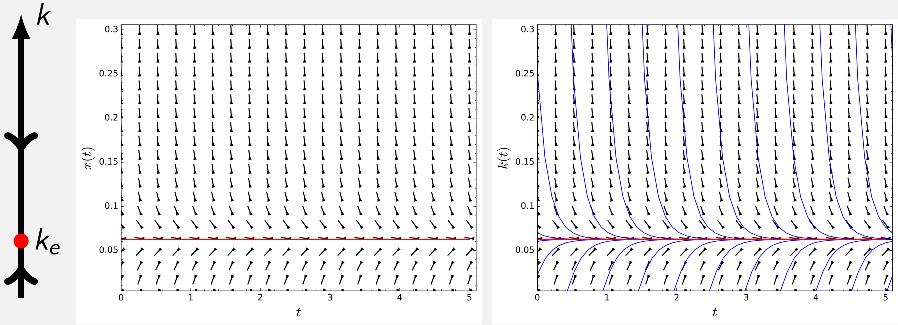
$$k'(t) = sk^\alpha(t) - ak(t), \quad k_0 \in \mathbb{R}_+^*$$

C'est une équation du premier ordre de type Bernoulli et à variables séparables.
La fonction $k_s = s^{1/(\alpha-1)}k$ vérifie l'ÉD $k_s' = k_s^\alpha - ak_s$: on supposera $s = 1$

Il y a un seul point d'équilibre $k_e = a^{1/(\alpha-1)}$.
La solution du problème de Cauchy $k' = k^\alpha - ak, k(t_0) = k_0$ est

$$k(t) = \left[\left(k_0^{1-\alpha} - k_e^{1-\alpha}\right) \mathrm{e}^{-(1-\alpha)a(t-t_0)} + k_e^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

convergente vers le point d'équilibre k_e lorsque $t \to +\infty$.
Suivant le signe de $k_0 - k_e$, la solution est globale, ou pas, lorsque $t \to -\infty$.



ÉD scalaire $k' = k^{1/4} - 8k$: son portrait de phases 1d avec son unique point d'équilibre $k_e = 1/16$ (attractif) et le sens de variation des trajectoires, puis le champ des vitesses pour l'ÉD (augmentée), complété par le graphe de quelques solutions.

```
maxima('plotdf([1,k**(1/4)-8*k],[t,k],[t,0,5],[k,0,0.3])')
```