## Stabilité d'un point d'équilibre

Soit $x_e$ point d'équilibre de l'ÉD $x' = f(x)$.

Le point d'équilibre $x_e$ est *stable* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x_0$ dans la boule $B(x_e, \eta)$, le problème de Cauchy de condition initiale $x(t_0) = x_0$ a une solution définie sur $[t_0, +\infty)$ et la trajectoire $x(t_0 + \mathbb{R}^+)$ reste dans la boule $B(x_e, \varepsilon)$.

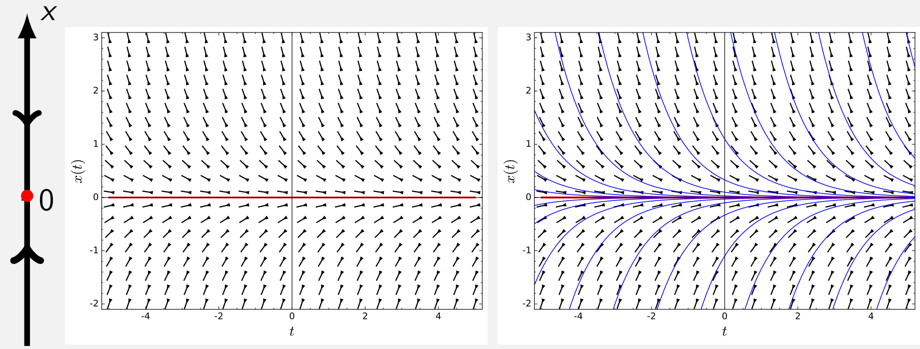
Le point d'équilibre $x_e$ est *asymptotiquement stable* si $x_e$ est stable et s'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x_0$ dans la boule $B(x_e, \eta)$ la solution du problème de Cauchy de condition initiale $x(t_0) = x_0$ converge vers $x_e$.

L'*ensemble de stabilité* (ou *bassin d'attraction*) $S(x_e)$ du point d'équilibre $x_e$ est la partie des $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que la solution du problème de Cauchy partant de $x_0$ converge vers $x_e$.



## Stabilités en dimension 1

$$x' = -x, \quad \mathcal{E} = \{0_s\}$$




$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{-(t-t_0)}$$
$$S(0_s) = \mathbb{R}$$

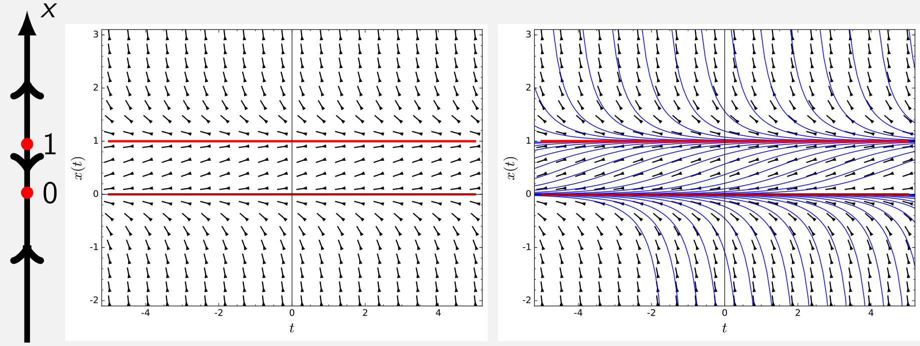


Soit $p$ un polynôme du second degré.

En considérant le changement de fonction $y(t) = ax(kt) + b$, l'équation différentielle
$$x' = p(x)$$
peut être transformée en l'un des trois types suivants
$$x' = x(x-1), \qquad x' = -x^2, \qquad x' = 1 + x^2.$$



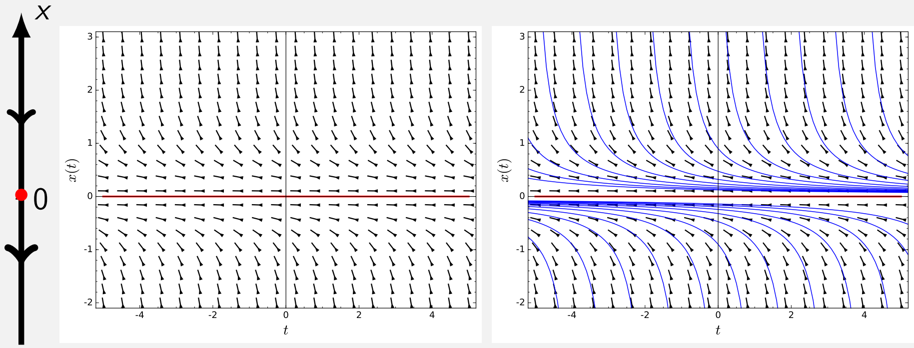
$$x' = x(x-1), \quad \mathcal{E} = \{0_s, 1\}$$




$$x(t) = x_0 \left[x_0(1 - \mathrm{e}^{t_0 - t}) + \mathrm{e}^{t_0 - t}\right]^{-1}$$

$$x' = -x + x^2 = (x-1) + (x-1)^2,$$
$$S(0_s) = (-\infty, 1)$$

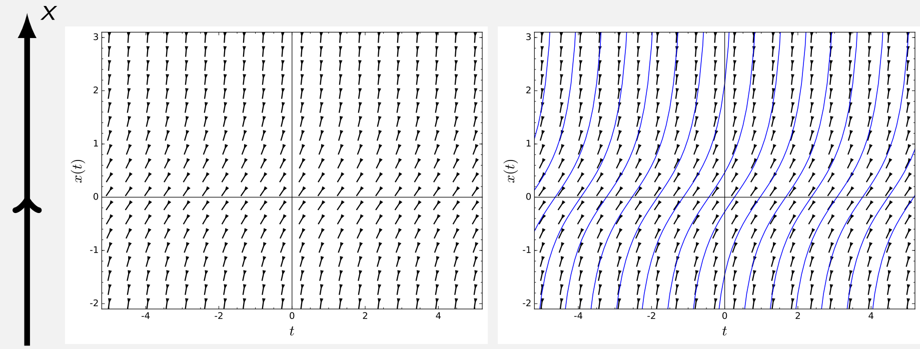
$$x' = -x^2, \quad \mathcal{E} = \{0\}$$




$$x(t) = \frac{x_0}{1 + x_0(t - t_0)}$$



$$x' = 1 + x^2, \quad \mathcal{E} = \emptyset$$




$$x(t) = \tan(t - t_0 - \arctan x_0)$$



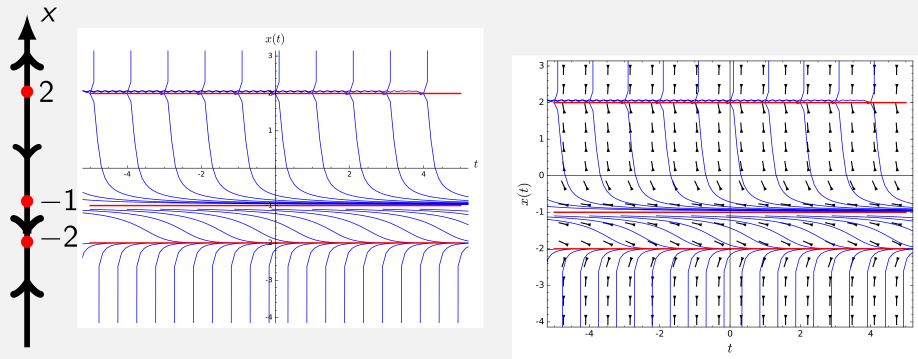
Pour $p$ de degré au moins 3, l'équation $x' = p(x)$ n'a pas de solution exprimable en terme de fonctions classiques.

Les tracés (comme les précédents) ont été obtenus par des méthodes numériques approchées.

Néanmoins, suivant le signe de $p$ sur les intervalles constituant $\mathbb{R} \setminus p^{-1}(0)$, on peut préciser aisément les zéros de $p$ qui sont stables.



$$x' = (x^2 - 4)(x + 1)^2, \quad \mathcal{E} = \{-2_s, 1, 2\}$$




$$p'(-2) = -4, \quad p'(-1) = 0, \quad p'(2) = 36$$

$$S(-2_s) = (-\infty, -1)$$

```
maxima('plotdf([1,(y-2)**2*(y**2-1)],[y,-3,3],[x,-2,2])')
```

*Soit $x_e$ un point d'équilibre de l'ÉD scalaire $x' = F(x)$. Si $F'(x_e) < 0$, alors le point d'équilibre $x_e$ est asymptotiquement stable.*

En dimension supérieure, une condition suffisante d'équilibre asymptotiquement stable au point d'équilibre $x_e$ consiste en

$$\mathrm{Spectre}(DF(x_e)) \subset \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \Re e\, \zeta < 0\}\,.$$