

- 1 Dérivée trajectorielle
- 2 Oscillateur harmonique
- 3 Quelques champs de gradients
- 4 Champs et stabilité
- 5 Coordonnées polaires
- 6 Le modèle de Goodwin
- 7 Isoclines

Oscillateur harmonique I

La dynamique d'un ressort est modélisée par l'équation de Newton

$$h'' - kh = 0$$

Poser $x = h, y = h'$, d'où le système $x' = y, y' = -kx$. Ajouter un amortissement $-dx' = -dy$, introduire une raideur de telle manière que la force $k(x)$ ne soit pas exactement proportionnelle à x : $k(x) = x\kappa(x)$ avec $\kappa(a) > 0$.

$$x' = y, y' = -k(x) - dy \text{ soit } (x, y)' = f(x, y) = (y, -x\kappa(x) - dy)$$

L'énergie $E(x, y) = \int_0^x a\kappa(a)da + y^2/2$ à raideur $x\kappa(x)$ et sans amortissement est constante le long de chaque trajectoire

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \langle \nabla E(x, y), f(x, y) \rangle = \partial_x E(x, y)[y] + \partial_y E(x, y)[-kx - dy] \\ &= x\kappa(x)[y] + y[-k(x)x - dy] = 0 \end{aligned}$$

D'où stabilité

Soit $f, L : U(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$. La *dérivée trajectorielle* \dot{L} de L le long des trajectoires de l'ÉD autonome $x'(t) = f(x(t))$ est définie suivant

$$\begin{aligned} \dot{L}(x) &= \frac{d}{dt} [L(x(t; x))]_{|t=0} = [\langle \nabla L(x(t; x)), x'(t; x) \rangle]_{|t=0} \\ &= \langle \nabla L(x), f(x) \rangle, \quad x \in U. \end{aligned}$$

Théorème de Liapounov Soit x_e PÉ. Si L telle que $L > 0$ sauf $L(x_e) = 0$ et $\dot{L} \leq 0$ sauf en x_e , alors le PÉ x_e est stable. Si de plus \dot{L} est strictement négative (sauf en x_e), alors PÉ asymptotiquement stable.

Oscillateur harmonique II

Avec amortissement $d > 0$, raideur $k(x) = x\kappa(x)$ et énergie $E_0(x, y) = \int_0^x a\kappa(a)da + y^2/2$

$$\begin{aligned} \dot{E}_d &= \langle \nabla E_d, (y, -x\kappa(x) - dy) \rangle \\ &= (x\kappa(x))(y) + (y)(-x\kappa(x) - dy) = -dy^2. \end{aligned}$$

Mais le linéarisé au PÉ est

$$A = Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -d \end{pmatrix}, \quad \det A = k > 0, \text{ tr } A < 0$$

Le PÉ a deux valeurs propres à partie réelle strictement négative : c'est un PÉ hyperbolique, et asymptotiquement stable !

On calcule les valeurs propres : $(-d \pm \sqrt{d^2 - 4k})/2$.

La fonction $L_{\alpha,\beta,\gamma}(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ vérifie

$$\begin{aligned} \dot{L}_{\alpha,\beta,\gamma}(x, y) &= (2\alpha x + \beta y)(y) + (\beta x + 2\gamma y)(-kx - dy) \\ &= (2\alpha - \beta d - 2\gamma dk)xy - k\beta x^2 + (\beta - 2\gamma d)y^2 \end{aligned}$$

Si $k = 2$, $d = 1$, $\alpha = 7$, $\beta = 2$ et $\gamma = 3$, alors

$$\dot{L}_{7,2,3}(x, y, z) = -4(x^2 + y^2)$$

avec la forme quadratique $L_{7,2,3}(x, y, z) = 7x^2 + 2xy + 3y^2$ définie positive.

Ainsi, la fonction $L_{7,2,3}$ est fortement Liapounov pour le PÉ $(0, 0)$ de l'ÉD $h'' + dh' + kh$, et donc la stabilité asymptotique.

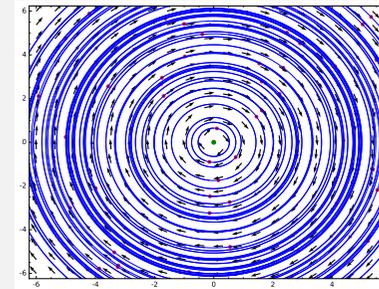
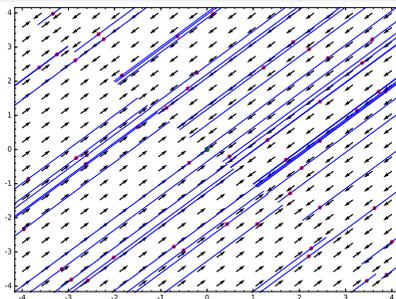
Cet exemple illustre le fait que la fonction énergie n'est pas toujours la plus apte à détecter une stabilité asymptotique.

Champ de gradients de $-(x + y)^2$ I

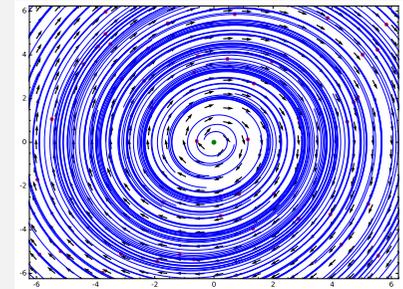
Soit $J(x, y) = -(x + y)^2$, avec $\nabla J(x, y) = -2(x + y, x + y)$
L'ÉD du champ de gradients est

$$x' = -2(x + y), \quad y' = -2(x + y).$$

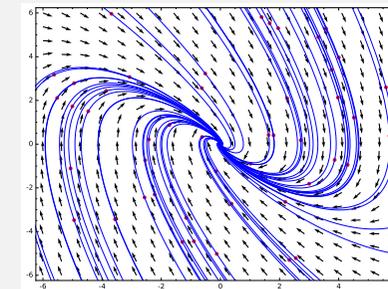
C'est un système dégénéré (linéarisé non inversible), avec la droite $\{x + y = 0\}$ de PÉ non isolés. Si $z = x + y$, alors $z' = -4z$, ce qui implique la stabilité asymptotique de l'origine pour la fonction $z : t \mapsto z_0 e^{-4t}$.



$$h'' + 1.5h = 0,$$

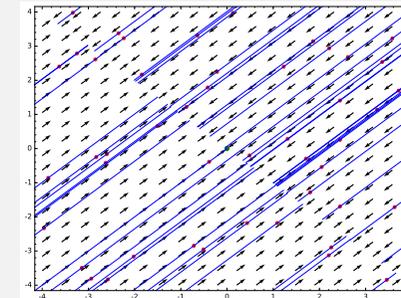


$$h'' + 0.2h' + 1.5h = 0$$



$$h'' + 2h' + 1.5h = 0$$

Champ de gradients de $-(x + y)^2$ I



Les lignes de niveau de J sont des droites $\{x + y = C\}$ (dans la direction de la diagonale non principale), orthogonales au champ ∇J (dans la direction de la diagonale principale).

La fonction $x - y$ est constante le long des trajectoires qui sont donc portées par les droites $y = x + A$. Les solutions x, y sont données par

$$x(t) = x_0 + z_0(e^{-4t} - 1)/2, \quad y(t) = y_0 + z_0(e^{-4t} - 1)/2.$$

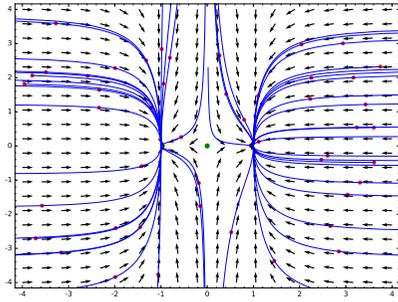
Champ de gradients de $ax^4/4 - x^2/2 + y^2/2$

$$-\nabla J(x, y) = (x - ax^3, -y)$$

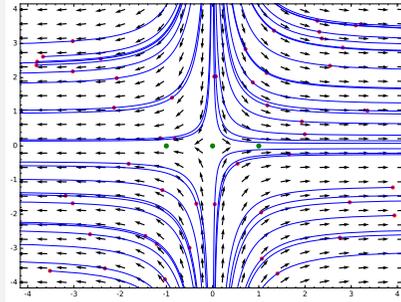
avec dérivée

$$D[-\nabla J](x, y) = -\text{Hess } J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - 3ax^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tous les PÉ sont hyperboliques : $(0, 0)$ PÉ de type selle. Seulement si $a > 0$, deux autres PÉ $(\pm 1/\sqrt{a}, 0)$ de type nœud.



$a = -1$



$a = 1$

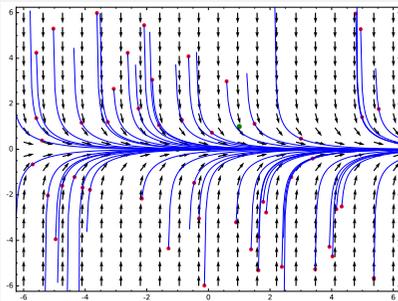
$f_a(x) = -x(1 + |x|^a), a > 1$

La fonction $L(x) = x^2$ est de Liapounov stricte

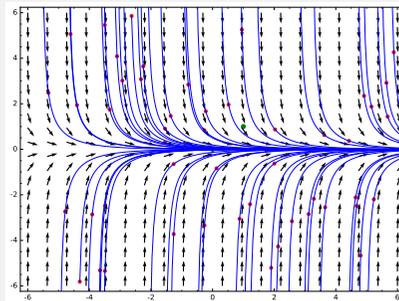
$$\dot{L}(x) = L'(x)f_a(x) = 2x[-x(1 + |x|^a)] = -2x^2(1 + |x|^a).$$

Pour $a = 2$, Les solutions (ne s'annulant pas) ont une expression analytique (obtenue en séparant les variables ou via Bernoulli)

$$x(t; x) = \frac{x}{\sqrt{(1 + x^2)e^{2t} - x^2}}, \quad t \in (-\ln(1 + x^{-2})/2, +\infty).$$



$a = 2$



$a = 1.2$

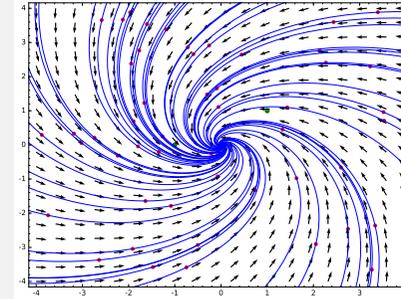
$f(x, y) = (-x - y, x - y)$

Soit L définie par $L(X) = x^2 + y^2$

$$\dot{L}(X) = 2x[-x - y] + 2y[x - y] = -2(x^2 + y^2).$$

La fonction L est de Liapounov stricte.

Au PÉ $x_e = (0, 0)$, la linéarisée $DF(x_e) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a $-1 \pm i$ comme valeurs propres.



$f(x, y) = (-2x + 2y^4, -y)$

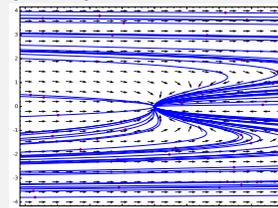
La fonction

$$L(x) = 6x^2 + 12y^2 + 4xy^4 + y^8 = (2x + y^4)^2 + 2x^2 + 12y^2.$$

est Liapounov stricte vu que

$$\begin{aligned} \dot{L}(x, y) &= (12x + 4y^4)[-2x + 2y^4] + (24y + 16xy^3 + 8y^7)[-y] \\ &= -24(x^2 + y^2), \end{aligned}$$

Le PÉ $x_e = 0$ est asymptotiquement stable.

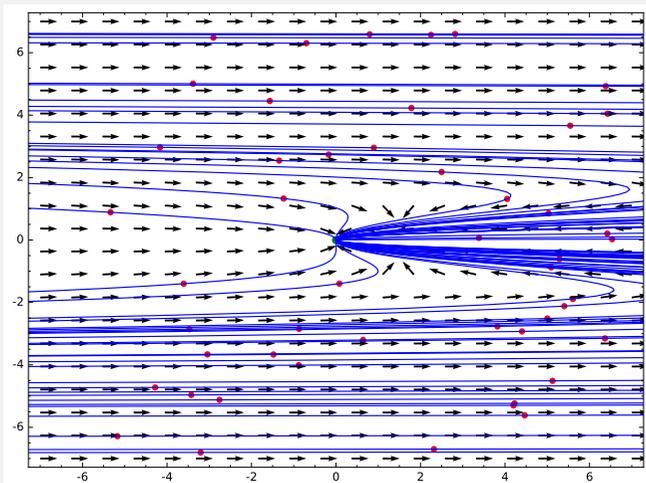


Le bassin d'attraction de l'origine égal au plan tout entier.

$$f(x, y) = (-2x + 2y^4, -y) \text{ II}$$

Cela provient de la résolution explicite de l'ÉD (la composante y , puis x) :

$$x(t) = -y_0^4 e^{-4t}/2 + (x_0 + y_0^4/2)e^{-2t}, \quad y(t) = y_0 e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



13 / 24

Laurent Guillopé

Systèmes dynamiques : 31 novembre

$$F(x, y, z) = (-2y + yz, x - xz, xy) \text{ et}$$

$$F(x, y, z) + (-x^3, -y^3, -z^3)$$

La fonction $L_{a,b,c}(x, y, z) = (ax^2 + by^2 + cz^2)/2$ a comme dérivée trajectorielle

$$\dot{L}_{a,b,c}(x, y, z) = (a - b + c)xyz + (b - 2a)xy$$

le choix $a - b + c = 0$ et $a = c$, avec a, b, c strictement positifs, assure que $L_{a,b,c}$ (par exemple $L_{1,2,1}$) est de Liapounov, et assure la stabilité de l'origine.

Pour le système perturbé

$$\tilde{F}(x, y, z) = (-2y + yz - x^3, x - xz - y^3, xy - z^3),$$

on a $\dot{L}_{1,2,1}(X) = -(x^4 + 2y^4 + z^4) < 0$ pour $X \neq 0$. Il y a stabilité asymptotique.

15 / 24

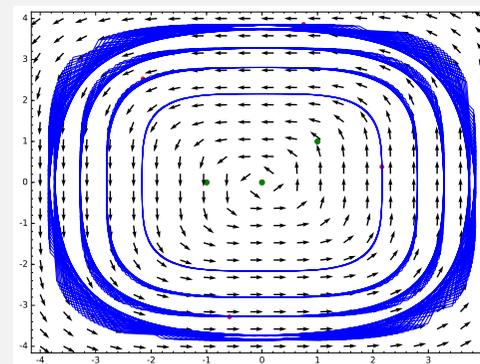
Laurent Guillopé

Systèmes dynamiques : 31 novembre

$$x' = -y^3, y' = x^3$$

Ce système avec PÉ $(0, 0)$ a $L(x, y) = x^4 + y^4$ comme fonction de Liapounov : le PÉ d'équilibre x_e est stable.

En fait l'ÉD $dy/dx = -x^3/y^3$ est à variables séparables, ce qui donne comme intégrale première $x^4 + y^4$: il y a stabilité.



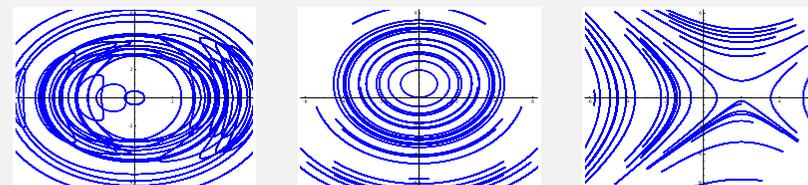
14 / 24

Laurent Guillopé

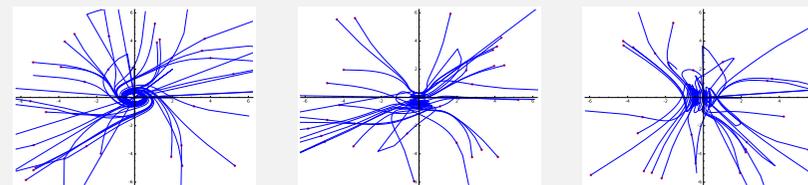
Systèmes dynamiques : 31 novembre

Projections planes de trajectoires 3d

Les plans de projection sont xy, yz et zx .



$$(-2y + yz, x - xz, xy)$$



$$(-2y + yz - x^3, x - xz - y^3, xy - z^3)$$

16 / 24

Laurent Guillopé

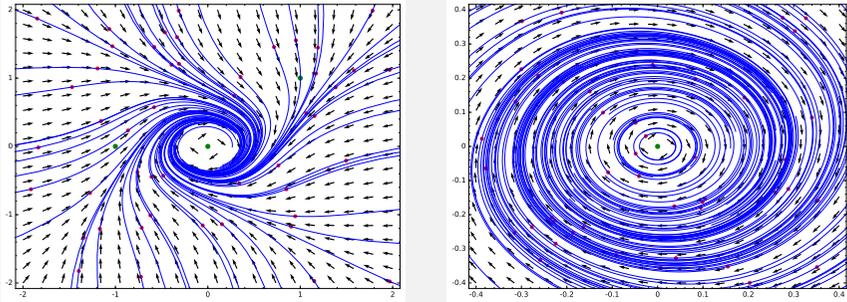
Systèmes dynamiques : 31 novembre

$$f(x, y) = (y - x^3, -x - y^3)$$

La fonction $L(x, y) = x^2 + y^2$ est une fonction de Liapounov stricte

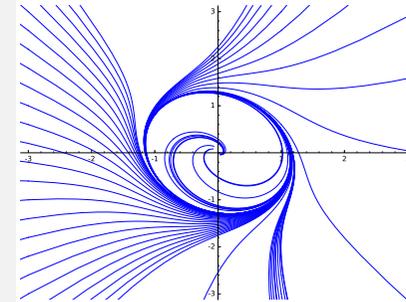
$$\dot{L}(x, y) = 2x[y - x^3] + 2y[-x - y^3] = -2(x^4 + y^4).$$

Le PÉ $(0, 0)$ est asymptotiquement stable.



Le linéarisé du système au PÉ $(0, 0)$ est de type centre.

$$x' = -\frac{x}{2} + y + \frac{x}{2}(x^2 + y^2), \quad y' = -x - \frac{y}{2} + \frac{y}{2}(y^2 + x^2)$$



L'origine est l'unique PÉ : il est hyperbolique avec linéarisée

$$X' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & +1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} X$$

de valeurs propres $-\frac{1}{2} \pm i$.

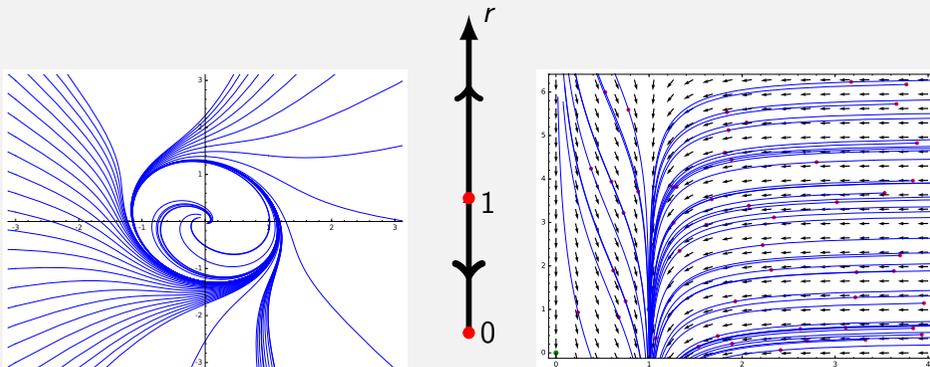
$$(r' = r(1 - r^2), \theta' = 1)$$

En coordonnées polaires (r, θ) avec $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta,$

$$r' \cos \theta - r \sin \theta \theta' = x' = \frac{r}{2}(r^2 - 1) \cos \theta + r \sin \theta,$$

$$r' \sin \theta + r \cos \theta \theta' = y' = \frac{r}{2}(r^2 - 1) \sin \theta - r \cos \theta,$$

Soit, en ajoutant les deux lignes multipliées par $\cos \theta, \sin \theta$ ou $-\sin \theta, \cos \theta$ resp., $r' = r(r^2 - 1)/2, \quad \theta' = -1.$



Théorie de la croissance : quelques développements récents

2. Le modèle de Goodwin (1967)

On note u et v respectivement la part des salaires dans le revenu et le taux d'emploi.

Hypothèses :

- i) le ratio capital / produit $\sigma = \frac{k}{y}$ est constant
- ii) la productivité croît à un taux constant α
- iii) la population active est stationnaire
- iv) les profits sont intégralement ré-investis

1°) Evolution du taux d'emploi

(1) $\dot{v} = \delta - \alpha = \frac{(1-u)\Omega}{K} - \alpha = \frac{1-u}{\sigma} - \alpha$

2°) Evolution de la part des salaires

Les salaires réels, w , croissent linéairement avec le taux d'emploi conformément à une relation du type « courbe de Phillips ».

$\dot{w} = -\gamma + pv$

Où :

(2) $\dot{u} = \dot{w} - \alpha = -(\gamma + \alpha) + pv$

La forme réduite du modèle s'écrit comme un système dynamique constitué des équations (1) et (2). Son point stationnaire est un centre et admet pour coordonnées :

$$\begin{cases} u^* = \frac{\gamma + \alpha}{\sigma} \\ v^* = 1 - \sigma \alpha \end{cases}$$

2. Le modèle de Goodwin (1967)

On note u et v respectivement la part des salaires dans le revenu et le taux d'emploi.

Hypothèses :

- i) le ratio capital / produit $\sigma = \frac{k}{Q}$ est constant
- ii) la productivité croît à un taux constant α
- iii) la population active est stationnaire
- iv) les profits sont intégralement ré-investis

1°) Evolution du taux d'emploi

$$(1) \dot{v} = \dot{Q} - \alpha = \frac{(1-u)Q}{K} - \alpha = \frac{1-u}{\sigma} - \alpha$$

2°) Evolution de la part des salaires

Les salaires réels, w , croissent linéairement avec le taux d'emploi conformément à une relation du type « courbe de Phillips ».

$$\dot{w} = -\gamma + \rho v$$

D'où :

$$(2) \dot{u} = \dot{w} - \alpha = -(\gamma + \alpha) + \rho v$$

La forme réduite du modèle s'écrit comme un système dynamique constitué des équations (1) et (2). Son point stationnaire est un centre et admet pour coordonnées :

$$\begin{cases} u^* = \frac{\gamma + \alpha}{\sigma} \\ v^* = 1 - \sigma \alpha \end{cases}$$

$$\dot{v} = \frac{1-u}{\sigma} - \alpha, \quad \dot{u} = -(\gamma + \alpha + \rho v)$$

Attention ici, $\dot{u} = u'/u$!!!!

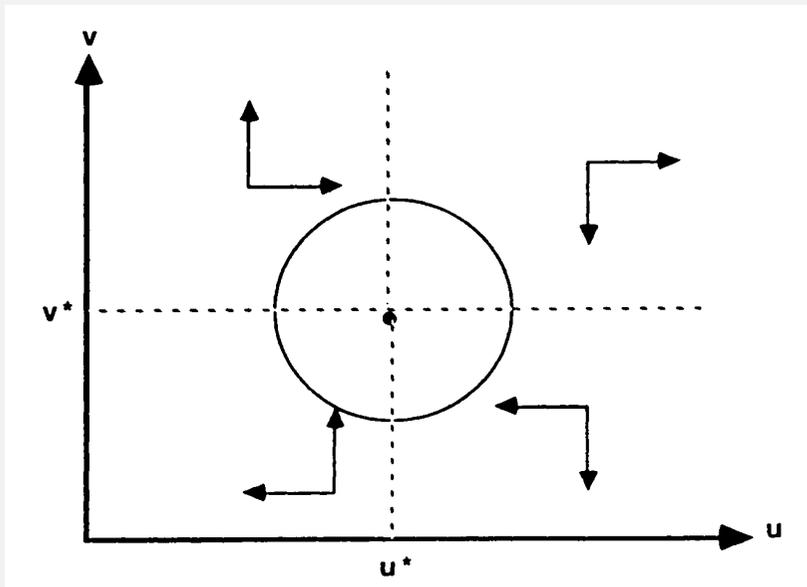
Ainsi

$$\frac{v'}{v} = B(v^* - u), \quad \frac{u'}{u} = A(v - u^*)$$

ou encore

$$v' = Bv(v^* - u), \quad u' = Au(v - u^*)$$

C'est le modèle proie/prédateur de Lotka-Volterra.



Soit $X \rightarrow f(X)$ un champ de vecteurs sur un ouvert du plan. Une *isocline de pente α* pour le champ f est une courbe où le champ V a une pente α .

Si $f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, l'isocline verticale (*resp.* horizontale) a pour équation $P(x, y) = 0$ (*resp.* $Q(x, y) = 0$).

Si un domaine Ω est délimité par des isoclines, P et Q sont de signe constant sur Ω et la direction du champ de vecteurs peut être esquissée par des flèches ou une combinaison de flèches vers un des points cardinaux suivant le signe de P et Q . Complément de l'analyse des points d'équilibre, l'étude des isoclines fait partie de l'analyse qualitative des solutions d'une ÉD.

