

- 1 Dérivée trajectorielle
- 2 Oscillateur harmonique
- 3 Quelques champs de gradients
- 4 Champs et stabilité
- 5 Coordonnées polaires
- 6 Le modèle de Goodwin
- 7 Isoclines

## Oscillateur harmonique I

La dynamique d'un ressort est modélisée par l'équation de Newton

$$h'' + kh = 0$$

Poser  $x = h, y = h'$ , d'où le système  $x' = y, y' = -kx$

Ajouter un amortissement  $-dx' = -dy$ , introduire une raideur de telle manière que la force  $k(x)$  ne soit pas exactement proportionnelle à  $x$  :  $k(x) = x\kappa(x)$  avec  $\kappa(a) > 0$ .

$x' = y, y' = -k(x) - dy$  soit  $(x, y)' = f(x, y) = (y, -x\kappa(x) - dy)$   
L'énergie  $E(x, y) = \int_0^x a\kappa(a)da + y^2/2$  à raideur  $x\kappa(x)$  et sans amortissement est constante le long de chaque trajectoire

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \langle \nabla E(x, y), f(x, y) \rangle = \partial_x E(x, y)[y] + \partial_y E(x, y)[-kx] \\ &= x\kappa(x)[y] + y[-k(x)x] = 0\end{aligned}$$

D'où stabilité

Soit  $f, L : U(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . La *dérivée trajectorielle*  $\dot{L}$  de  $L$  le long des trajectoires de l'ÉD autonome  $x'(t) = f(x(t))$  est définie suivant

$$\begin{aligned}\dot{L}(x) &= \frac{d}{dt} [L(x(t; x))]_{|t=0} = [\langle \nabla L(x(t; x)), x'(t; x) \rangle]_{|t=0} \\ &= \langle \nabla L(x), f(x) \rangle, \quad x \in U.\end{aligned}$$

**Théorème de Liapounov** Soit  $x_e$  PÉ. Si  $L$  telle que  $L > 0$  sauf  $L(x_e) = 0$  et  $\dot{L} \leq 0$  sauf en  $x_e$ , alors le PÉ  $x_e$  est stable. Si de plus  $\dot{L}$  est strictement négative (sauf en  $x_e$ ), alors PÉ asymptotiquement stable.

## Oscillateur harmonique II

Avec amortissement  $d > 0$ , raideur  $k(x) = x\kappa(x)$  et énergie  $E_0(x, y) = \int_0^x a\kappa(a)da + y^2/2$

$$\begin{aligned}\dot{E}_d &= \langle \nabla E_d, (y, -x\kappa(x) - dy) \rangle \\ &= (x\kappa(x))(y) + (y)(-x\kappa(x) - dy) = -dy^2.\end{aligned}$$

Mais le linéarisé au PÉ est

$$A = Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -d \end{pmatrix}, \quad \det A = k > 0, \text{ tr } A < 0$$

Le PÉ a deux valeurs propres à partie réelle strictement négative : c'est un PÉ hyperbolique, et asymptotiquement stable !

On calcule les valeurs propres :  $(-d \pm \sqrt{d^2 - 4k})/2$ .

La fonction  $L_{\alpha,\beta,\gamma}(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$  vérifie

$$\begin{aligned} \dot{L}_{\alpha,\beta,\gamma}(x, y) &= (2\alpha x + \beta y)(y) + (\beta x + 2\gamma y)(-kx - dy) \\ &= (2\alpha - \beta d - 2\gamma dk)xy - k\beta x^2 + (\beta - 2\gamma d)y^2 \end{aligned}$$

Si  $k = 2$ ,  $d = 1$ ,  $\alpha = 7$ ,  $\beta = 2$  et  $\gamma = 3$ , alors

$$\dot{L}_{7,2,3}(x, y) = -4(x^2 + y^2)$$

avec la forme quadratique  $L_{7,2,3}(x, y) = 7x^2 + 2xy + 3y^2$  définie positive.

Ainsi, la fonction  $L_{7,2,3}$  est fortement Liapounov pour le PÉ  $(0, 0)$  de l'ÉD  $h'' + dh' + kh$ , et donc la stabilité asymptotique.

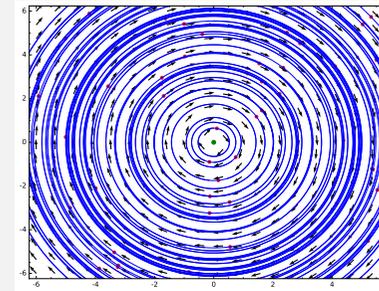
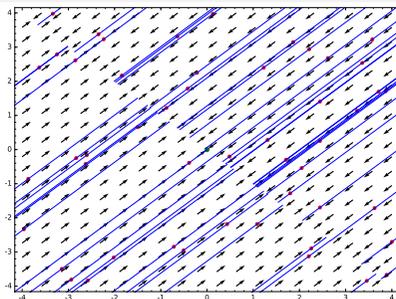
Cet exemple illustre le fait que la fonction énergie n'est pas toujours la plus apte à détecter une stabilité asymptotique.

## Champ de gradients de $-(x + y)^2$ I

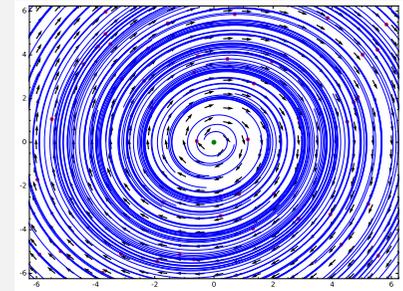
Soit  $J(x, y) = -(x + y)^2$ , avec  $\nabla J(x, y) = -2(x + y, x + y)$   
L'ÉD du champ de gradients est

$$x' = -2(x + y), \quad y' = -2(x + y).$$

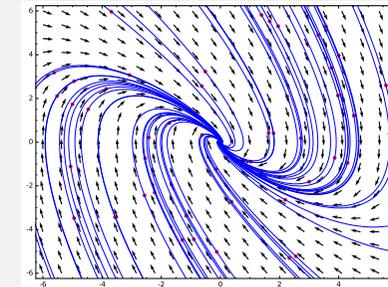
C'est un système dégénéré (linéarisé non inversible), avec la droite  $\{x + y = 0\}$  de PÉ non isolés. Si  $z = x + y$ , alors  $z' = -4z$ , ce qui implique la stabilité asymptotique de l'origine pour la fonction  $z : t \mapsto z_0 e^{-4t}$ .



$$h'' + 1.5h = 0,$$

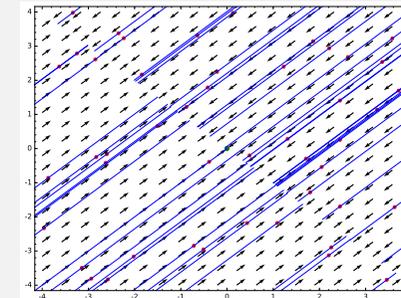


$$h'' + 0.2h' + 1.5h = 0$$



$$h'' + 2h' + 1.5h = 0$$

## Champ de gradients de $-(x + y)^2$ I



Les lignes de niveau de  $J$  sont des droites  $\{x + y = C\}$  (dans la direction de la diagonale non principale), orthogonales au champ  $\nabla J$  (dans la direction de la diagonale principale).

La fonction  $x - y$  est constante le long des trajectoires qui sont donc portées par les droites  $y = x + A$ . Les solutions  $x, y$  sont données par

$$x(t) = x_0 + z_0(e^{-4t} - 1)/2, \quad y(t) = y_0 + z_0(e^{-4t} - 1)/2.$$

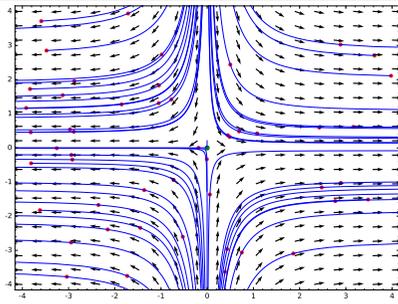
# Champ de gradients de $ax^4/4 - x^2/2 + y^2/2$

$$-\nabla J(x, y) = (x - ax^3, -y)$$

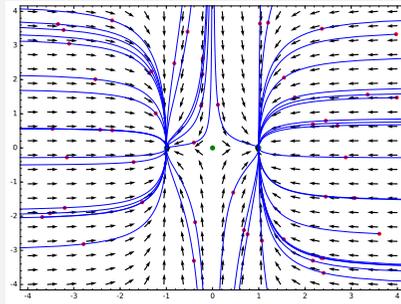
avec dérivée

$$D[-\nabla J](x, y) = -\text{Hess } J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - 3ax^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tous les PÉ sont hyperboliques :  $(0, 0)$  PÉ de type selle. Seulement si  $a > 0$ , deux autres PÉ  $(\pm 1/\sqrt{a}, 0)$  de type nœud.



$a = -1$



$a = 1$

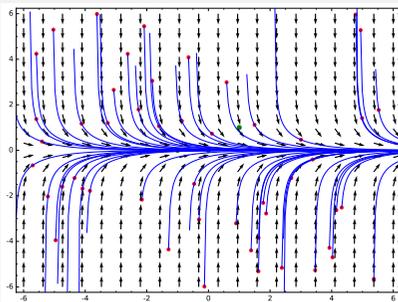
# $f_a(x) = -x(1 + |x|^a), a > 1$

La fonction  $L(x) = x^2$  est de Liapounov stricte

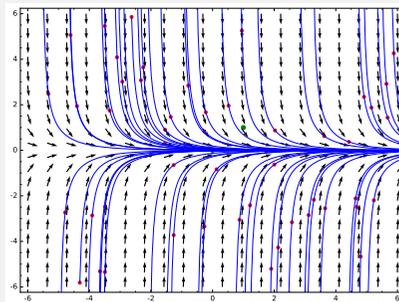
$$\dot{L}(x) = L'(x)f_a(x) = 2x[-x(1 + |x|^a)] = -2x^2(1 + |x|^a).$$

Pour  $a = 2$ , Les solutions (ne s'annulant pas) ont une expression analytique (obtenue en séparant les variables ou via Bernoulli)

$$x(t; x) = \frac{x}{\sqrt{(1 + x^2)e^{2t} - x^2}}, \quad t \in (-\ln(1 + x^{-2})/2, +\infty).$$



$a = 2$



$a = 1.2$

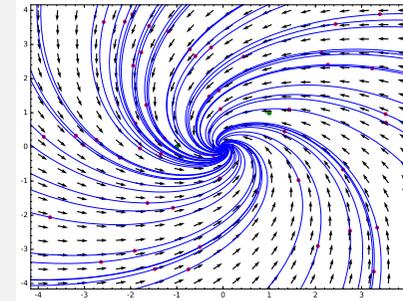
# $f(x, y) = (-x - y, x - y)$

Soit  $L$  définie par  $L(X) = x^2 + y^2$

$$\dot{L}(X) = 2x[-x - y] + 2y[x - y] = -2(x^2 + y^2).$$

La fonction  $L$  est de Liapounov stricte.

Au PÉ  $x_e = (0, 0)$ , la linéarisée  $DF(x_e) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  a  $-1 \pm i$  comme valeurs propres.



# $f(x, y) = (-2x + 2y^4, -y)$

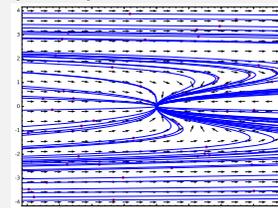
La fonction

$$L(x) = 6x^2 + 12y^2 + 4xy^4 + y^8 = (2x + y^4)^2 + 2x^2 + 12y^2.$$

est Liapounov stricte vu que

$$\begin{aligned} \dot{L}(x, y) &= (12x + 4y^4)[-2x + 2y^4] + (24y + 16xy^3 + 8y^7)[-y] \\ &= -24(x^2 + y^2), \end{aligned}$$

Le PÉ  $x_e = 0$  est asymptotiquement stable.

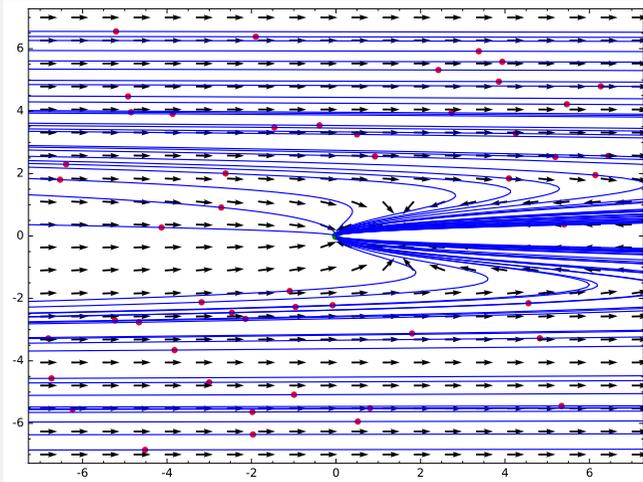


Le bassin d'attraction de l'origine est égal au plan tout entier.

$$f(x, y) = (-2x + 2y^4, -y) \quad ||$$

Cela provient de la résolution explicite de l'ÉD (la composante  $y$ , puis  $x$ ) :

$$x(t) = -y_0^4 e^{-4t} / 2 + (x_0 + y_0^4 / 2) e^{-2t}, \quad y(t) = y_0 e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



13 / 26

Laurent Guillopé

Systèmes dynamiques : 31 novembre

$$F(x, y, z) = (-2y + yz, x - xz, xy) \text{ et}$$

$$F(x, y, z) + (-x^3, -y^3, -z^3)$$

La fonction  $L_{a,b,c}(x, y, z) = (ax^2 + by^2 + cz^2)/2$  a comme dérivée trajectorielle

$$\dot{L}_{a,b,c}(x, y, z) = (a - b + c)xyz + (b - 2a)xy$$

le choix  $a - b + c = 0$  et  $a = c$ , avec  $a, b, c$  strictement positifs, assure que  $L_{a,b,c}$  (par exemple  $L_{1,2,1}$ ) est de Liapounov, et assure la stabilité de l'origine.

Pour le système perturbé

$$\tilde{F}(x, y, z) = (-2y + yz - x^3, x - xz - y^3, xy - z^3),$$

on a  $\dot{L}_{1,2,1}(X) = -(x^4 + 2y^4 + z^4) < 0$  pour  $X \neq 0$ . Il y a stabilité asymptotique.

15 / 26

Laurent Guillopé

Systèmes dynamiques : 31 novembre

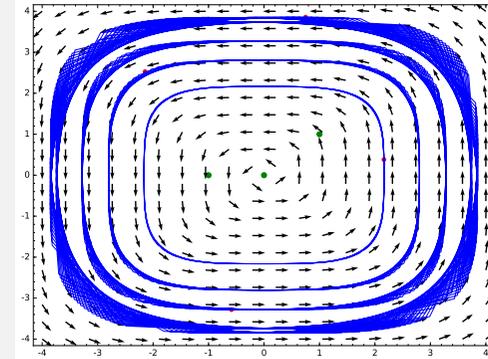
$$x' = -y^3, y' = x^3$$

Ce système avec PÉ  $(0, 0)$  a  $L(x, y) = x^4 + y^4$  comme fonction de Liapounov :

$$\dot{L}(x, y) = 4x^3[-y^3] + 4y^3[x^3] = 0.$$

le PÉ d'équilibre  $x_e$  est stable.

En fait l'ÉD  $dy/dx = -x^3/y^3$  est à variables séparables, ce qui donne comme intégrale première  $x^4 + y^4$  : les trajectoires sont des ovals et il y a stabilité.



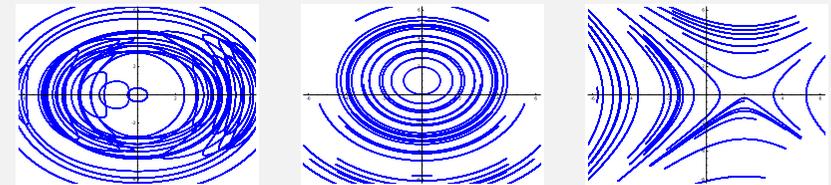
14 / 26

Laurent Guillopé

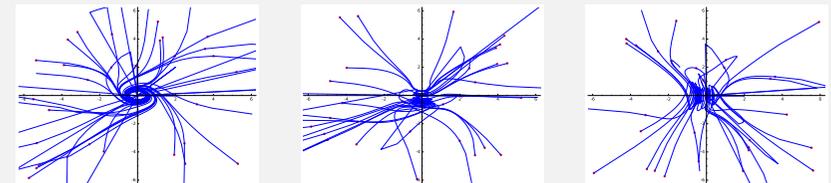
Systèmes dynamiques : 31 novembre

## Projections planes de trajectoires 3d I

Les plans de projection sont  $xy, yz$  et  $zx$ .



$$(-2y + yz, x - xz, xy)$$



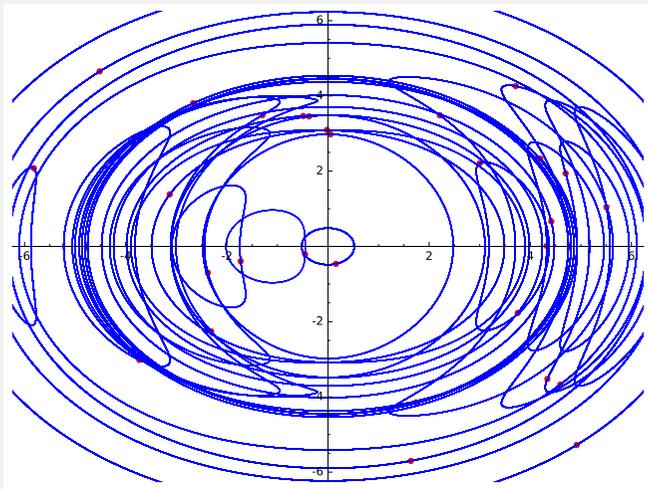
$$(-2y + yz - x^3, x - xz - y^3, xy - z^3)$$

16 / 26

Laurent Guillopé

Systèmes dynamiques : 31 novembre

Plan de projection :  $xy$ .



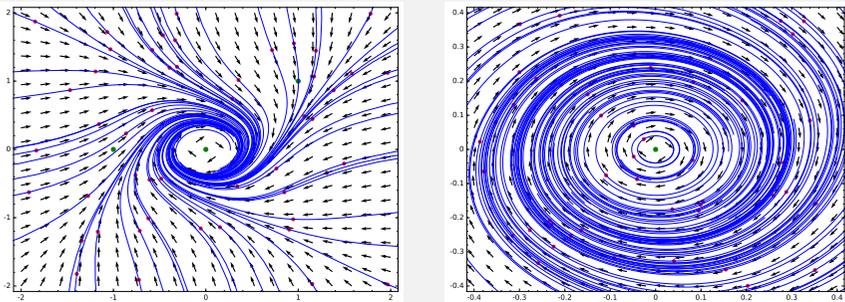
$$(-2y + yz, x - xz, xy)$$

$$f(x, y) = (y - x^3, -x - y^3)$$

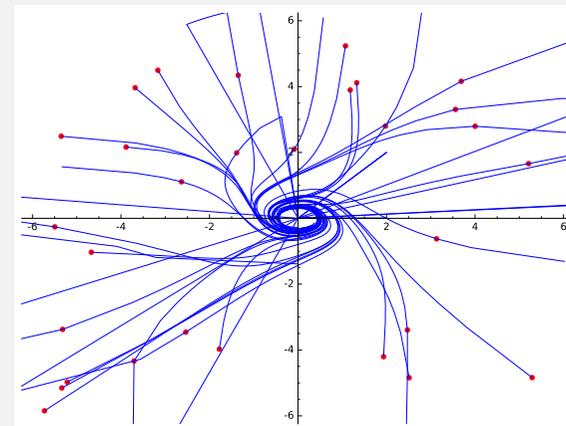
La fonction  $L(x, y) = x^2 + y^2$  est une fonction de Liapounov stricte

$$\dot{L}(x, y) = 2x[y - x^3] + 2y[-x - y^3] = -2(x^4 + y^4).$$

Le PÉ  $(0, 0)$  est asymptotiquement stable.



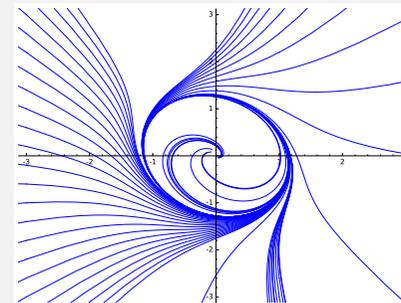
Le linéarisé du système au PÉ  $(0, 0)$  est de type centre.



$$(-2y + yz - x^3, x - xz - y^3, xy - z^3)$$

## Solutions spirantes

$$x' = -\frac{x}{2} + y + \frac{x}{2}(x^2 + y^2), \quad y' = -x - \frac{y}{2} + \frac{y}{2}(y^2 + x^2)$$



L'origine est l'unique PÉ : il est hyperbolique avec linéarisée

$$X' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & +1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} X$$

de valeurs propres  $-\frac{1}{2} \pm i$ .

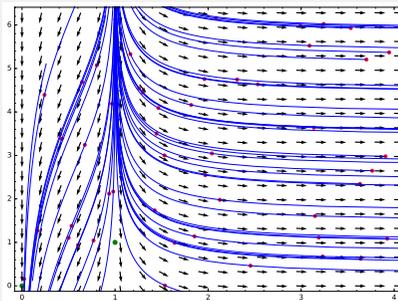
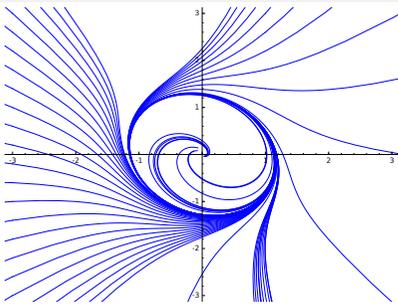
$$(r' = r(1 - r^2), \theta' = 1)$$

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$  avec  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta,$

$$r' \cos \theta - r \sin \theta \theta' = x' = \frac{r}{2}(r^2 - 1) \cos \theta + r \sin \theta,$$

$$r' \sin \theta + r \cos \theta \theta' = y' = \frac{r}{2}(r^2 - 1) \sin \theta - r \cos \theta,$$

Soit, en ajoutant les deux lignes multipliées par  $\cos \theta, \sin \theta$  ou  $-\sin \theta, \cos \theta$  resp.,  $r' = r(r^2 - 1)/2, \theta' = -1.$



## Le modèle de Goodwin I

### 2. Le modèle de Goodwin (1967)

On note  $u$  et  $v$  respectivement la part des salaires dans le revenu et le taux d'emploi.

Hypothèses :

- i) le ratio capital / produit  $\sigma = \frac{k}{Y}$  est constant
- ii) la productivité croît à un taux constant  $\alpha$
- iii) la population active est stationnaire
- iv) les profits sont intégralement ré-investis

1°) Evolution du taux d'emploi

$$(1) \dot{v} = \dot{Q} - \alpha = \frac{(1-u)Q}{K} - \alpha = \frac{1-u}{\sigma} - \alpha$$

2°) Evolution de la part des salaires

Les salaires réels,  $w$ , croissent linéairement avec le taux d'emploi conformément à une relation du type « courbe de Phillips ».

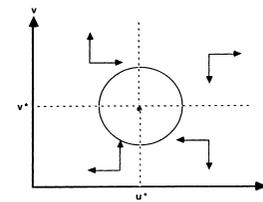
$$\dot{w} = -\gamma + \rho v$$

D'où :

$$(2) \dot{u} = \dot{w} - \alpha = -(\gamma + \alpha) + \rho v$$

La forme réduite du modèle s'écrit comme un système dynamique constitué des équations (1) et (2). Son point stationnaire est un centre et admet pour coordonnées :

$$\begin{cases} u^* = \frac{\gamma + \alpha}{\sigma} \\ v^* = 1 - \sigma \alpha \end{cases}$$



## Le modèle de Goodwin II

### 2. Le modèle de Goodwin (1967)

On note  $u$  et  $v$  respectivement la part des salaires dans le revenu et le taux d'emploi.

Hypothèses :

- i) le ratio capital / produit  $\sigma = \frac{k}{Y}$  est constant
- ii) la productivité croît à un taux constant  $\alpha$
- iii) la population active est stationnaire
- iv) les profits sont intégralement ré-investis

1°) Evolution du taux d'emploi

$$(1) \dot{v} = \dot{Q} - \alpha = \frac{(1-u)Q}{K} - \alpha = \frac{1-u}{\sigma} - \alpha$$

2°) Evolution de la part des salaires

Les salaires réels,  $w$ , croissent linéairement avec le taux d'emploi conformément à une relation du type « courbe de Phillips ».

$$\dot{w} = -\gamma + \rho v$$

D'où :

$$(2) \dot{u} = \dot{w} - \alpha = -(\gamma + \alpha) + \rho v$$

La forme réduite du modèle s'écrit comme un système dynamique constitué des équations (1) et (2). Son point stationnaire est un centre et admet pour coordonnées :

$$\begin{cases} u^* = \frac{\gamma + \alpha}{\sigma} \\ v^* = 1 - \sigma \alpha \end{cases}$$

## Le modèle de Goodwin III

$$\dot{v} = \frac{1-u}{\sigma} - \alpha, \quad \dot{u} = -(\gamma + \alpha) + \rho v$$

Attention ici,  $\dot{u} = u'/u$ !!!!

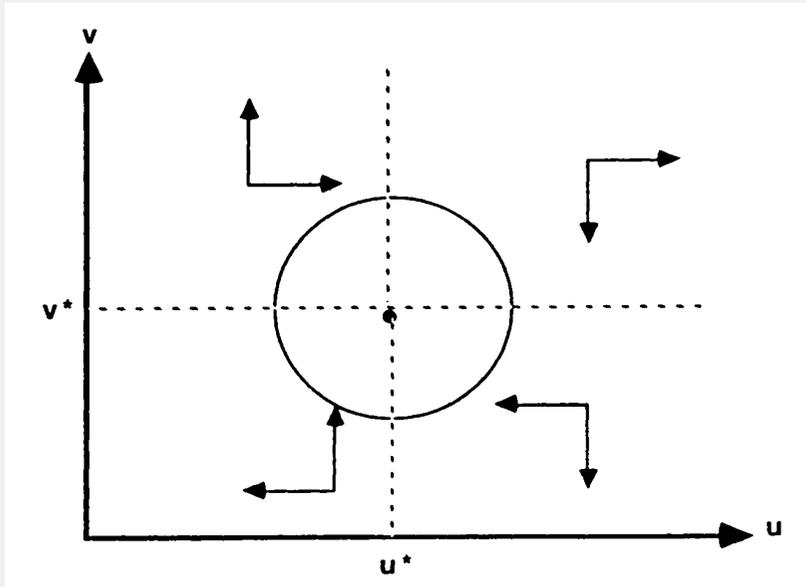
Ainsi, pour des constantes  $A, B, u^*, v^*$  convenables,

$$\frac{v'}{v} = B(v^* - u), \quad \frac{u'}{u} = A(v - u^*)$$

ou encore

$$v' = Bv(v^* - u), \quad u' = Au(v - u^*)$$

C'est le modèle proie/prédateur de Lotka-Volterra.



Soit  $X \rightarrow f(X)$  un champ de vecteurs sur un ouvert du plan. Une *isocline de pente  $\alpha$*  pour le champ  $f$  est une courbe où le champ  $V$  a une pente  $\alpha$ .

Si  $f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ , l'isocline verticale (*resp.* horizontale) a pour équation  $P(x, y) = 0$  (*resp.*  $Q(x, y) = 0$ ).

Si un domaine  $\Omega$  est délimité par des isoclines,  $P$  et  $Q$  sont de signe constant sur  $\Omega$  et la direction du champ de vecteurs peut être esquissée par des flèches ou une combinaison de flèches vers un des points cardinaux suivant le signe de  $P$  et  $Q$ . Complément de l'analyse des points d'équilibre, l'étude des isoclines fait partie de l'analyse qualitative des solutions d'une ÉD.

