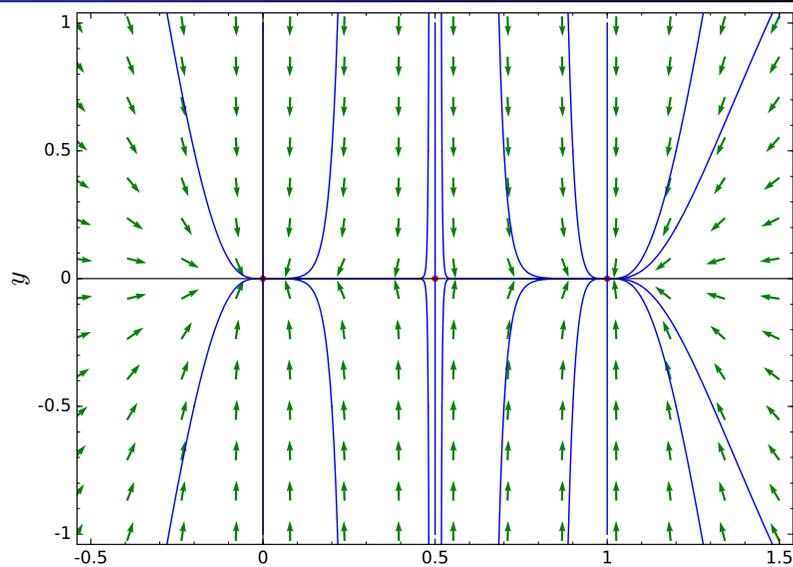


Quelques classes d'ÉD particulières

- 1 Champ de gradients, champ hamiltonien
- 2 Oscillateur harmonique
- 3 Le modèle de Goodwin et dynamique des populations
- 4 Pendule
- 5 La modélisation de la croissance suivant Solow

ÉD le long d'un champ de gradients



$$(x', y') = (-2x(x-1)(2x-1)^x, -2y) = -\nabla(x^2(x-1)^2 + y^2)$$

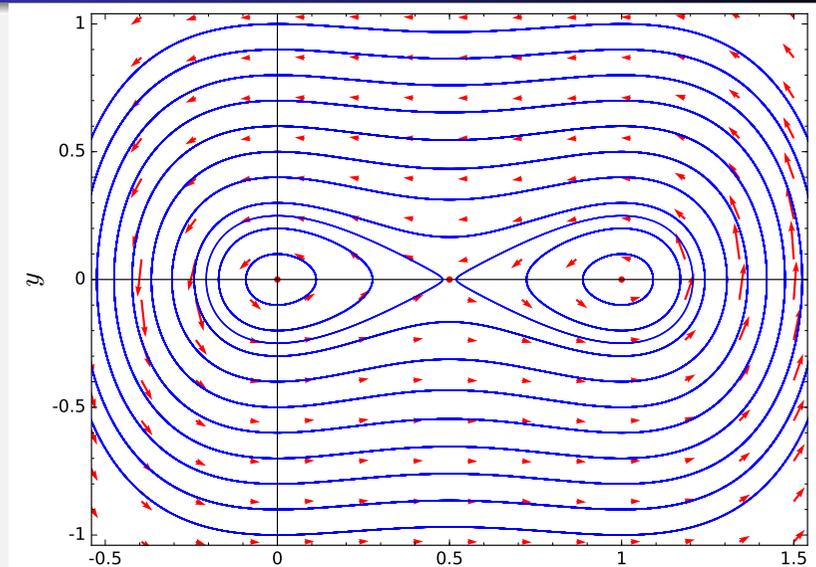
$$\text{PÉ : } (0, 0) : \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, (1/2, 0) : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, (1, 0) : \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gradient : } X' = -\nabla J(X) = (-\partial_x J, -\partial_y J)$$

$$\text{Hamiltonien : } Y' = -X_H(Y) = (\partial_y H, -\partial_x H)$$

-
- 1 Le champ $V = (V_1, V_2)$ sur \mathbb{R}^2 est de gradient si et seulement si $\partial_y V_1 = \partial_x V_2$.
 - 2 Le champ $W = (W_1, W_2)$ sur \mathbb{R}^2 est hamiltonien si et seulement si $\partial_x W_1 = -\partial_y W_2$.
-
- 1 Si J a un point de minimum X_* strict (Hess $J(X_*) = d^2 J(X_*) > 0$ par ex.), X_* est un PÉ asymptotiquement stable pour $-\nabla J$.
 - 2 H est constant sur toute trajectoire de X_H . Si H a un point de minimum Y_* strict, Y_* est un PÉ stable pour X_H .

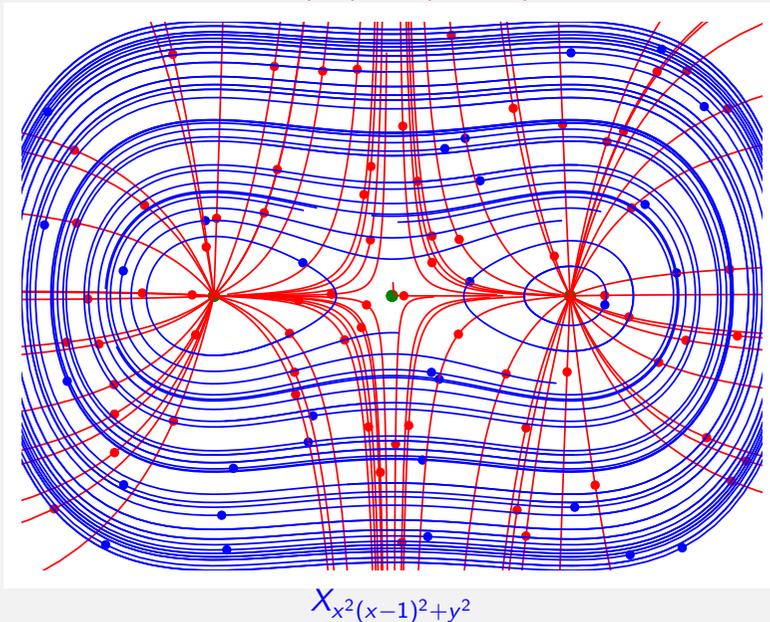
ÉD le long d'un champ hamiltonien



$$(x', y') = (-2y, 2x(x-1)(2x-1)) = X_{x^2(x-1)^2 + y^2}$$

$$\text{PÉ : } (0, 0) : \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, (1/2, 0) : \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, (1, 0) : \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\nabla(x^2(x-1)^2 + y^2)$$



Oscillateur harmonique II

On considère l'énergie

$$E(x, y) = \int_0^x u\kappa(u)du + y^2/2$$

pour le système

$$x' = y, \quad y' = -x\kappa(x) - a(x)y$$

avec comme dérivée trajectorielle

$$\dot{E}(x, y) = (x\kappa(x))(y) + (y)(-x\kappa(x) - a(x)y) = -a(x)y^2.$$

Sans amortissement ($a = 0$), la dérivée trajectorielle de l'énergie est constante le long des trajectoires.

Avec amortissement ($a(x) > 0$), le linéarisé du PÉ $(0, 0)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\kappa(0) & -a(0) \end{pmatrix}, \quad \det A = \kappa(0) > 0, \quad \text{tr } A < 0.$$

Ainsi les valeurs propres du linéarisé au PÉ $(0, 0)$ sont à partie réelle strictement négative, ce qui est confirmé par le calcul

explicite de ces valeurs propres : $(-a(0) \pm \sqrt{a(0)^2 - 4\kappa(0)})/2$.

L'origine est un PÉ hyperbolique, asymptotiquement stable!

La dynamique d'un ressort de masse m (normalisée à $m = 1$) et de tension $\kappa(x)$ est modélisée par l'équation de Newton

$$mh''(t) + \kappa(h(t))h(t) = 0 \quad (1)$$

équivalent, via le changement de fonctions $x = h, y = h'$, au système

$$x' = y, \quad y' = -\kappa(x)x.$$

La stabilité découle du caractère hamiltonien du système, avec hamiltonien

$$H(x, y) = \int_0^x u\kappa(u)du + y^2/2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

L'ajout de l'amortissement (frottement) $-a(x)x' = -a(x)y$ avec $a(x) > 0$ donne le système

$$x' = y, \quad y' = -\kappa(x)x - a(x)y.$$

Oscillateur harmonique III

La fonction énergie E n'est pas Liapounov stricte. Cependant, la fonction $L_{\alpha,\beta,\gamma}(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ vérifie

$$\begin{aligned} \dot{L}_{\alpha,\beta,\gamma}(x, y) &= (2\alpha x + \beta y)(y) + (\beta x + 2\gamma y)(-kx - ay) \\ &= (2\alpha - \beta a - 2\gamma ak)xy - k\beta x^2 + (\beta - 2\gamma a)y^2 \end{aligned}$$

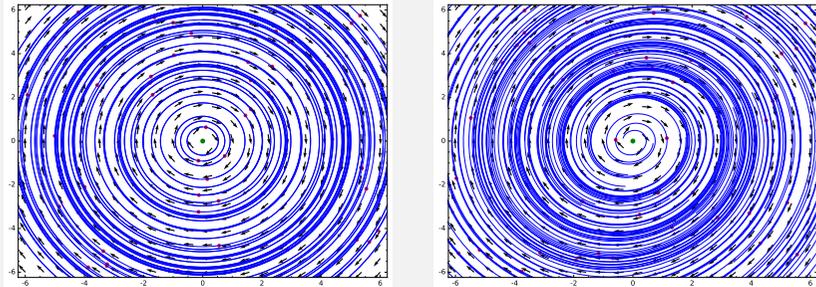
Fixons $k = 2$ et $a = 1$. Alors pour $\alpha = 7, \beta = 2$ et $\gamma = 3$,

$$\dot{L}_{7,2,3}(x, y) = -4(x^2 + y^2)$$

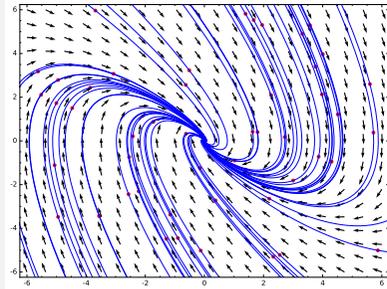
avec la forme quadratique $L_{7,2,3}(x, y) = 7x^2 + 2xy + 3y^2$ définie positive.

Ainsi, la fonction $L_{7,2,3}$ est fortement Liapounov pour le PÉ $(0, 0)$ de l'ÉD $h'' + ah' + kh = 0$: le PÉ $(0, 0)$ est asymptotiquement stable.

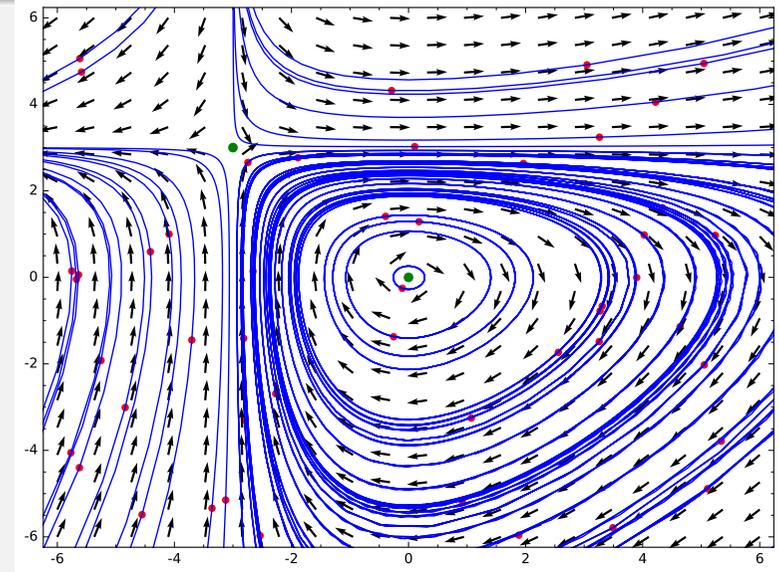
Cet exemple illustre le fait que la fonction énergie n'est pas toujours la plus apte à détecter une stabilité asymptotique.



$$h'' + 1.5h = 0, \quad h'' + 0.2h' + 1.5h = 0$$



$$h'' + 2h' + 1.5h = 0$$



$$(x', y') = (xy + 3y, xy - 3x)$$

$$\text{PÉ} : (0, 0) : \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, (-3, 3) : \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Théorie de la croissance : quelques développements récents

2. Le modèle de Goodwin (1967)

On note u et v respectivement la part des salaires dans le revenu et le taux d'emploi.

Hypothèses :

- i) le ratio capital / produit $\sigma = \frac{k}{Q}$ est constant
- ii) la productivité croît à un taux constant α
- iii) la population active est stationnaire
- iv) les profits sont intégralement ré-investis

1°) Evolution du taux d'emploi

$$(1) \dot{v} = \dot{Q} - \alpha = \frac{(1-u)Q}{K} - \alpha = \frac{1-u}{\sigma} - \alpha$$

2°) Evolution de la part des salaires

Les salaires réels, w , croissent linéairement avec le taux d'emploi conformément à une relation du type « courbe de Phillips ».

$$\dot{w} = -\gamma + pv$$

D'où :

$$(2) \dot{u} = \dot{w} - \alpha = -(\gamma + \alpha) + pv$$

La forme réduite du modèle s'écrit comme un système dynamique constitué des équations (1) et (2). Son point stationnaire est un centre et admet pour coordonnées :

$$\begin{cases} u^* = \frac{\gamma + \alpha}{\sigma} \\ v^* = 1 - \sigma \alpha \end{cases}$$

2. Le modèle de Goodwin (1967)

On note u et v respectivement la part des salaires dans le revenu et le taux d'emploi.

Hypothèses :

- i) le ratio capital / produit $\sigma = \frac{k}{Q}$ est constant
- ii) la productivité croît à un taux constant α
- iii) la population active est stationnaire
- iv) les profits sont intégralement ré-investis

1°) Evolution du taux d'emploi

$$(1) \dot{v} = \dot{Q} - \alpha = \frac{(1-u)Q}{K} - \alpha = \frac{1-u}{\sigma} - \alpha$$

2°) Evolution de la part des salaires

Les salaires réels, w , croissent linéairement avec le taux d'emploi conformément à une relation du type « courbe de Phillips ».

$$\dot{w} = -\gamma + pv$$

D'où :

$$(2) \dot{u} = \dot{w} - \alpha = -(\gamma + \alpha) + pv$$

La forme réduite du modèle s'écrit comme un système dynamique constitué des équations (1) et (2). Son point stationnaire est un centre et admet pour coordonnées :

$$\begin{cases} u^* = \frac{\gamma + \alpha}{\sigma} \\ v^* = 1 - \sigma \alpha \end{cases}$$

$$\dot{v} = \frac{1-u}{\sigma} - \alpha, \quad \dot{u} = -(\gamma + \alpha) + \rho v$$

Attention ici, \dot{u} est la dérivée logarithmique de u : $\dot{u} := u'/u$!!!!

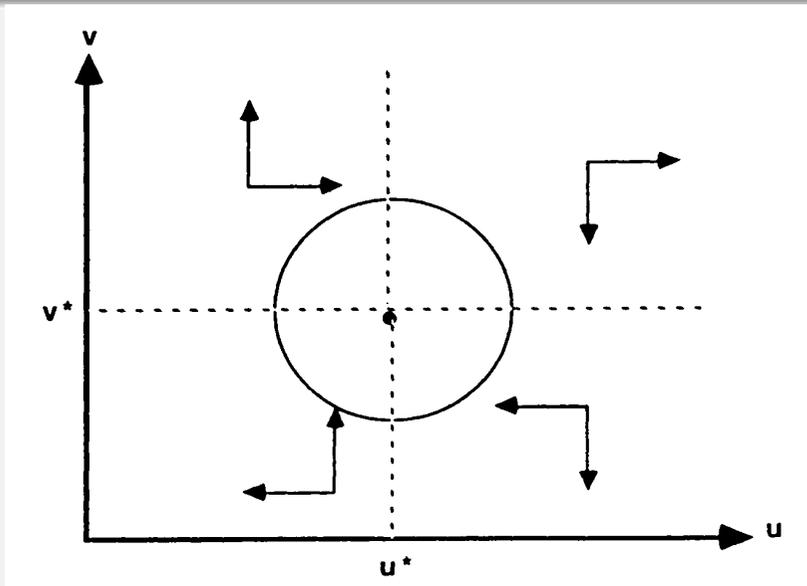
Ainsi, pour des constantes A, B, u^*, v^* convenables,

$$\frac{v'}{v} = B(u^* - u), \quad \frac{u'}{u} = A(v - v^*)$$

avec deux PÉ $(v^*, u^*), (0, 0)$ de matrices linéarisées respectives

$$\begin{pmatrix} 0 & -Bv^* \\ Au^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Bu^* & 0 \\ 0 & -Av^* \end{pmatrix},$$

le premier étant un centre (intérieur au premier quadrant seul domaine d'intérêt), le second un point selle (non stable) : l'extinction simultanée des deux populations n'est guère envisageable)



$$v' = Bv(u^* - u), \quad u' = Au(v - v^*)$$

L'équation différentielle impliquant $v'(u)$

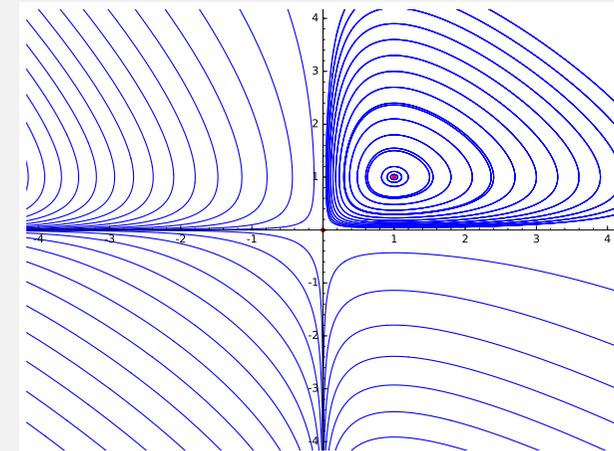
$$\frac{dv}{du} = \frac{v'(t)}{u'(t)} = \frac{B(u^* - u)u}{A(v - v^*)v}$$

est à variables séparables

$$\frac{A(v - v^*)}{v} dv = \frac{B(u^* - u)}{u} du$$

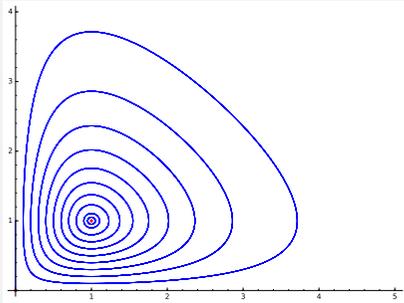
donnant une intégrale première

$$Av - Av^* \log v - Bu^* \log u + Bu$$

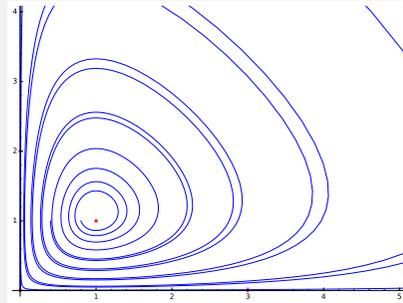


$$v' = Bv(u^* - u), \quad u' = Au(v - v^*)$$

C'est le modèle proie/prédateur de Lotka-Volterra : une population v fleurit si elle n'est pas agressée ; une autre population u décline si elle est isolée, sans proie assurant sa subsistance. Si ces deux populations coexistent, les termes uv décrivent l'interaction entre les deux populations.



$$\begin{aligned} x' &= x(1 - y) \\ y' &= y(x - 1) \\ \text{PÉ} &: (1, 1) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x' &= x(1 - y + \varepsilon x) \\ y' &= y(x - 1) \\ \text{PÉ} &: (1, 1 + \varepsilon) \end{aligned}$$

Une trajectoire issue d'un point dans le quadrant $\mathbb{O}^2 = \{x > 0, y > 0\}$ est toute entière incluse dans ce quadrant. Les demi-axes de coordonnées sont des trajectoires.

L'ÉD de Lotka-Volterra n'est ni de type gradient, ni de type hamiltonien

$$\partial_y[x(1 - y)] \neq \partial_x[y(x - 1)], \quad \partial_x[x(1 - y)] \neq -\partial_y[y(x - 1)]$$

Néanmoins, avec le changement de variable

$$(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x = e^a, y = e^b) \in (\mathbb{R}_{+*})^2,$$

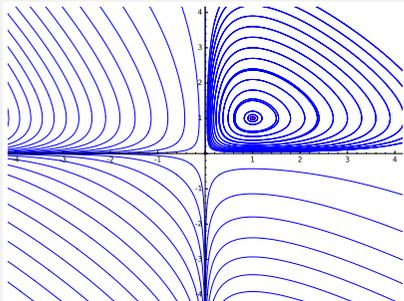
on obtient l'ÉD

$$a' = 1 - e^b, \quad b' = e^a - 1, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

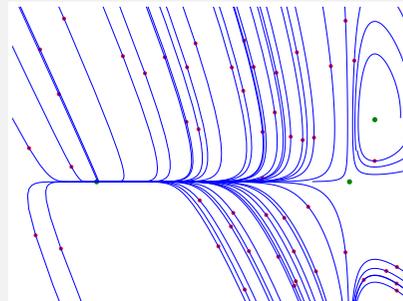
qui est hamiltonienne avec hamiltonien

$$H(a, b) = e^a - a + b - e^b, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Lotka-Volterra dans le plan

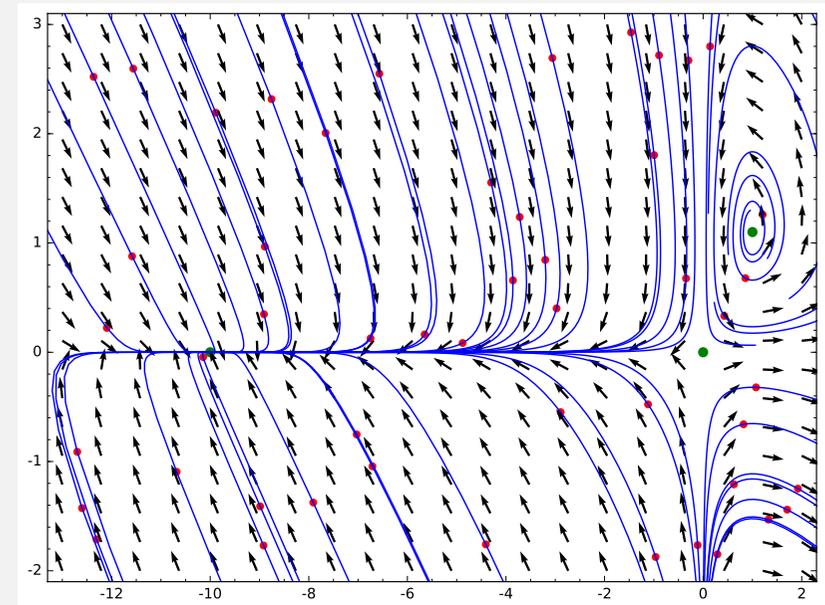


$$\begin{aligned} x' &= x(1 - y) \\ y' &= y(x - 1) \\ \text{PÉ} &: 0_2, (1, 1) \end{aligned}$$

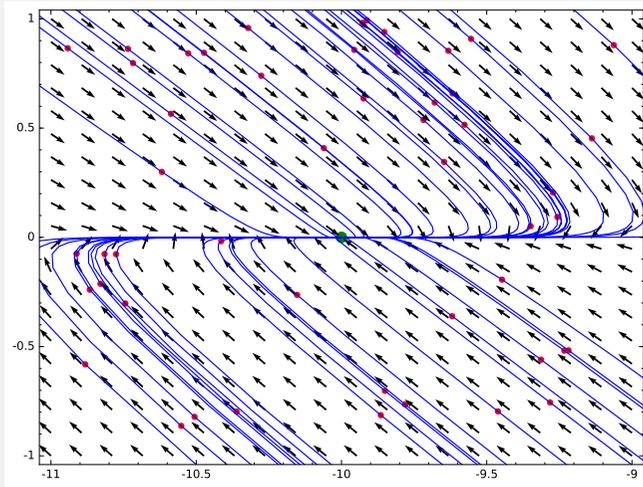


$$\begin{aligned} x' &= x(1 - y + \varepsilon x) \\ y' &= y(x - 1) \\ \text{PÉ} &: 0_2, (1, 1 + \varepsilon), (-\varepsilon^{-1}, 0) \end{aligned}$$

Les trajectoires dans \mathbb{O}^2 sont fermées et périodiques ($m(t + T) = m(t)$) avec T dépendante de la trajectoire.



$$\begin{aligned} x' &= x(1 - y + x/10), y' = y(x - 1) \\ \text{PÉ} &: (0, 0), (1, 1 + \varepsilon), (-\varepsilon^{-1}, 0) \end{aligned}$$



$$x' = x(1 - y + \varepsilon x), \quad y' = y(x - 1)$$

$$(0, 0), \quad ((1, 1 + \varepsilon), \quad (-\varepsilon^{-1}, 0))$$

Cherchons une fonction de Liapounov indiquant la stabilité asymptotique du PÉ $(-\varepsilon^{-1}, 0)$. Après le changement de variable $(x, y) \rightarrow (u = x + \varepsilon^{-1}, y)$, le champ prend la forme

$$V(u, y) = ((u - \varepsilon^{-1})(\varepsilon u - y), y(u - 1 - \varepsilon^{-1}))$$

Pour $L_a(u, y) = (u^2 + ay^2)/2$, on a

$$\begin{aligned} \dot{L}_a(u, y) &= \langle \nabla L_a(u, y), V \rangle(u, y) \\ &= [u](u - \varepsilon^{-1})(\varepsilon u - y) + [ay]y(u - 1 - \varepsilon^{-1}) \\ &= u(\varepsilon^{-1}y - u - uy + \varepsilon u^2) + ay^2(u - 1 - \varepsilon^{-1}) \\ &= -[u^2 - \varepsilon^{-1}yu + (1 + \varepsilon^{-1})ay^2] + r(u, y) \end{aligned}$$

où le reste $r(u, y)$ est un $o(\|(u, y)\|_2^2)$.

$$(E_\varepsilon) \quad x' = x(1 - y + \varepsilon x), \quad y' = y(x - 1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 - y + 2\varepsilon x & -x \\ y & x - 1 \end{pmatrix}$$

$$(0, 0) : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, (1, 1 + \varepsilon) : \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 \\ 1 + \varepsilon & 0 \end{pmatrix}, (-\varepsilon^{-1}, 0) : \begin{pmatrix} -1 & \varepsilon^{-1} \\ 0 & -\varepsilon^{-1} - 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Spectres : } \{\pm 1\}, \quad \{\varepsilon/2 \pm i\sqrt{1 + \varepsilon}\}, \quad \{-1, -\varepsilon^{-1} - 1\}$$

selle, foyer, nœud (AS).

La dérivée trajectorielle \dot{L}_a est la somme d'une forme quadratique $-Q_{\varepsilon a}$ et d'un terme r d'ordre 3 au voisinage de $(0, 0)$. La forme quadratique

$$(u, y) \mapsto Q_{\varepsilon a}(u, y) = u^2 - \varepsilon^{-1}yu + (1 + \varepsilon^{-1})ay^2$$

est définie positive si et seulement si $\varepsilon^{-2} - 4a(1 + \varepsilon^{-1})^{-1} > 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons un $a > 0$ assez grand tel que la forme $Q_{\varepsilon a} > 0$ soit définie positive, avec une minoration

$$Q_{\varepsilon a}(u, y) > C_{\varepsilon a} \|(u, y)\|_2^2, \quad (u, y) \in \mathbb{R}^2.$$

pour une constante $C_{\varepsilon a} > 0$ convenable. Soit $\eta > 0$ avec $\eta < C_{\varepsilon a}/2$ et V_η un voisinage de $(0, 0)$ tel que le reste $r(u, y)$ y vérifie

$$|r(u, y)| < \eta \|(u, y)\|_2^2.$$

Alors sur V_η , on a

$$\dot{L}_a = -Q_a(u, y) + r(u, y) \leq -C_a \|(u, y)\|_2^2 + \eta \|(u, y)\|_2^2 \leq -C_a/2 \|(u, y)\|_2^2$$

ce qui assure que la fonction L_a est de Liapounov stricte sur V_η .

Aussi, le PÉ $(x = -\varepsilon^{-1}, y = 0)$ est asymptotiquement stable.

$$\theta'' + 2\alpha\theta' + \omega^2 \sin \theta = 0,$$

soit en terme de système différentiel d'ordre 1

$$u' = v, \quad v' = -\omega^2 \sin u - 2\alpha v. \quad (2)$$

- $u = \theta$ angle du pendule avec la verticale
- $v = \theta'$ vitesse angulaire
- α amortissement
- $\omega^2 = g/\ell$

Les points d'équilibre : $(k\pi, 0)$ où $k \in \mathbb{Z}$

Le pendule sans amortissement

C'est un système hamiltonien avec hamiltonien

$$H(u, v) = v^2/2 - \omega^2 \cos u, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

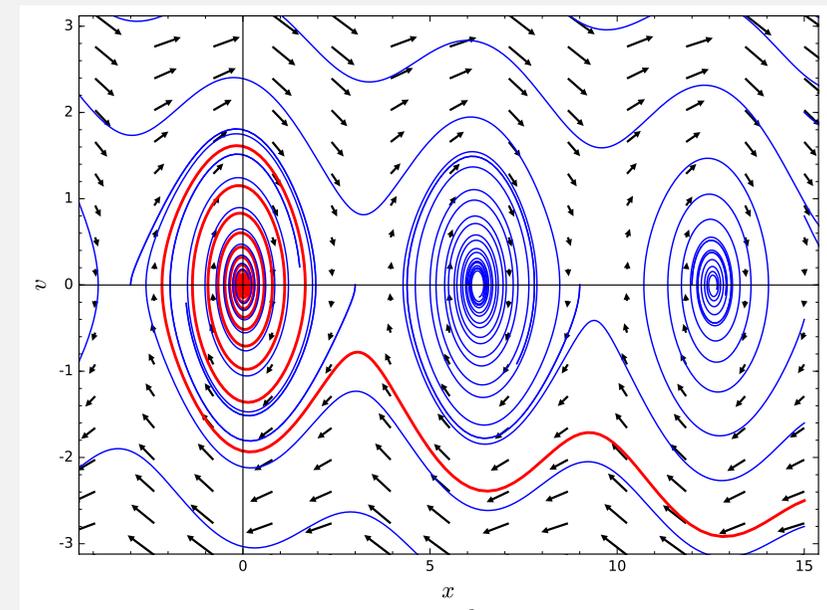
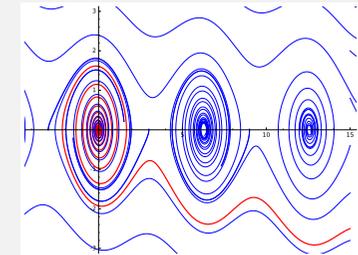
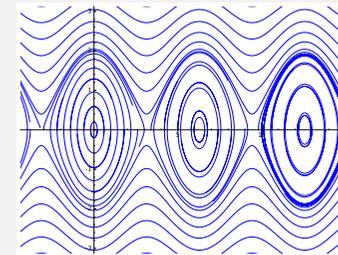
- Le spectre de la jacobienne du PÉ $(0, 0)$ est $\pm i\omega$: les méthodes spectrales précédentes ne permettent pas de répondre à la question de stabilité.
- Vu le caractère hamiltonien du système, le PÉ $(2k\pi, 0)$ ($k \in \mathbb{Z}$) (minimum strict) est stable.

$$u' = v, \quad v' = -\omega^2 \sin u - 2\alpha v. \quad (3)$$

Linéarisé : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos u & -2\alpha \end{pmatrix}$

Spectres :

$(2k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$	$-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$	AS si $\alpha > 0$
$((2k+1)\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$	$-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$	non stable



FIN



Né le 23 août 1924 (Brooklyn, New York)

Solow a défendu l'idée que l'économie ne peut être séparée du social

Anecdotiquement, Solow n'était pas très calé en mathématiques et il était donc obligé de « lire des articles de deuxième ordre parce que je ne pouvais pas lire ceux de premier ordre ». Sa motivation le pousse à s'inscrire aux cours nécessaires de calcul infinitésimal et d'algèbre linéaire.
[extrait de Wikipedia]

R. M. Solow (1956)

Une contribution à la théorie de la croissance économique

I. Introduction

Toute théorie dépend d'hypothèses qui ne sont pas tout à fait validées. C'est cela qui est le fondement d'une théorie. L'art de théoriser à bon escient consiste à faire des hypothèses inévitablement simplificatrices de telle sorte que les résultats finaux ne varient pas trop fortement. Une hypothèse "cruciale" est celle qui laisse stable les conclusions, et il est important que ces hypothèses cruciales soient raisonnablement réalistes. Quand les résultats d'une théorie semblent découler spécifiquement d'une hypothèse cruciale, alors, si l'hypothèse est douteuse, les résultats sont suspects.

A CONTRIBUTION TO THE THEORY OF ECONOMIC GROWTH

By ROBERT M. SOLOW

I. Introduction, 65. — II. A model of long-run growth, 66. — III. Possible growth patterns, 68. — IV. Examples, 73. — V. Behavior of interest and wage rates, 78. — VI. Extensions, 85. — VII. Qualifications, 91.

I. INTRODUCTION

All theory depends on assumptions which are not quite true. That is what makes it theory. The art of successful theorizing is to make the inevitable simplifying assumptions in such a way that the final results are not very sensitive.¹ A "crucial" assumption is one on which the conclusions do depend sensitively, and it is important that crucial assumptions be reasonably realistic. When the results of a theory seem to flow specifically from a special crucial assumption, then if the assumption is dubious, the results are suspect.

Modélisation de la croissance (I)

$$L'(t) = \nu L(t)$$

$$K'(t) = sP(K(t), L(t)) - \mu K(t)$$

- L : force de travail
- K : capital
- $P(K, L)$: fonction de production
- ν : taux de croissance
- μ : taux de dépréciation physique du capital
- s : taux d'épargne
- $k(t) = K(t)/L(t)$: capital par unité de travail
- $a = \mu + \nu$

Modèle rudimentaire : d'autres facteurs (par ex. progrès technique) peuvent être introduits.

Modélisation de la croissance (II)

P est homogène de degré 1 (rendements d'échelle constants) : en posant $p(k) = P(k, 1)$, on a

$$P(K, L) = LP(K/L, 1) = Lp(K/L) = Lp(k)$$

et donc, vu que $L' = \nu L$, $K' = sP(K, L) - \mu K$,

$$\begin{aligned}k'(t) &= (K(t)/L(t))' = K'(t)/L(t) - K(t)L'(t)/L^2(t) \\ &= sp(k(t)) - (\mu + \nu)k(t) = sp(k(t)) - ak(t)\end{aligned}$$

En particulier, une fonction de production P de Cobb-Douglas du type $P(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$ avec $\alpha \in (0, 1)$, vérifie les hypothèses économiques : la fonction $p(k) = k^\alpha$ satisfait à l'ÉD

$$k'(t) = sk^\alpha(t) - ak(t)$$

Stabilité de l'équation différentielle de Solow I

$$k'(t) = sk^\alpha(t) - ak(t), \quad k(t_0) = k_0 \in \mathbb{R}_+^* \quad (4)$$

C'est une équation du premier ordre de type Bernoulli et à variables séparables.

La fonction $k_s = s^{1/(\alpha-1)}k$ vérifie l'ÉD $k'_s = k_s^\alpha - ak_s$: on supposera $s = 1$

Il y a un seul point d'équilibre $k_e = a^{1/(\alpha-1)}$.

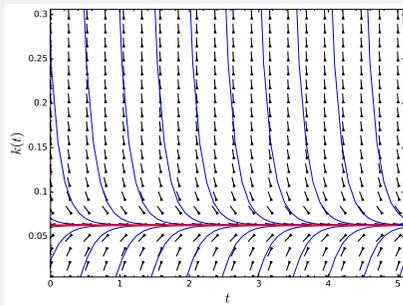
La solution du problème de Cauchy ?? est

$$k(t) = \left[\left(k_0^{1-\alpha} - k_e^{1-\alpha} \right) e^{-(1-\alpha)a(t-t_0)} + k_e^{1-\alpha} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

convergente vers le point d'équilibre k_e lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Suivant le signe de $k_0 - k_e$, la solution est globale, ou pas, lorsque $t \rightarrow -\infty$.

Stabilité de l'équation différentielle de Solow II



ÉD scalaire $k' = k^{1/4} - 8k$: son portrait de phases 1d avec son unique point d'équilibre $k_e = 1/16$ asymptotique stable et le sens de variation des trajectoires, puis le champ des vitesses pour l'ÉD (augmentée), complété par le graphe de quelques solutions.

```
maxima('plotdf([1,k**(1/4)-8*k],[t,k],[t,0,5],[k,0,0.3])')
```