Robert Solow

Né le 23 août 1924 (Brooklyn, New York)

Solow a défendu l'idée que l'économie ne peut être séparée du social

Anecdotiquement, Solow n'était pas très calé en mathématiques et il était donc obligé de « lire des articles de deuxième ordre parce que je ne pouvais pas lire ceux de premier ordre ». Sa motivation le pousse à s'inscrire aux cours nécessaires de calcul infinitésimal et d'algèbre linéaire. *[extrait de Wikipedia]*

Modèle de croissance de Solow (1956)

A CONTRIBUTION TO THE THEORY OF ECONOMIC GROWTH

By Robert M. Solow

I. Introduction, 65. — II. A model of long-run growth, 66. — III. Possible growth patterns, 68. — IV. Examples, 73. — V. Behavior of interest and wage rates, 78. — VI. Extensions, 85. — VII. Qualifications, 91.

I. Introduction

All theory depends on assumptions which are not quite true. That is what makes it theory. The art of successful theorizing is to make the inevitable simplifying assumptions in such a way that the final results are not very sensitive.[1] A "crucial" assumption is one on which the conclusions do depend sensitively, and it is important that crucial assumptions be reasonably realistic. When the results of a theory seem to flow specifically from a special crucial assumption, then if the assumption is dubious, the results are suspect.

R. M. Solow (1956)

Une contribution à la théorie de la croissance économique
I. Introduction

Toute théorie dépend d'hypothèses qui ne sont pas tout à fait validées. C'est cela qui est le fondement d'une théorie. L'art de théoriser à bon escient consiste à faire des hypothèses inévitablement simplificatrices de telle sorte que les résultats finaux ne varient pas trop fortement. Une hypothèse "cruciale" est celle qui laisse stable les conclusions, et il est important que ces hypothèses cruciales soient raisonnablement réalistes. Quand les résultats d'une théorie semblent découler spécifiquement d'une hypothèse cruciale, alors, si l'hypothèse est douteuse, les résultats sont suspects.

Modélisation de la croissance (I)

$$L'(t) = \nu L(t)$$
$$K'(t) = sP(K(t), L(t)) - \mu K(t)$$

- L : force de travail
- K : capital
- $P(K, L)$: fonction de production
- ν : taux de croissance
- μ : taux de dépréciation physique du capital
- s : taux d'épargne
- $k(t) = K(t)/L(t)$: capital par unité de travail
- $a = \mu + \nu$

Modèle rudimentaire : d'autres facteurs (par ex. progrès technique) peuvent être introduits.

Modélisation de la croissante (II)

P est homogène de degré 1 (rendements d'échelle constants) : en posant $p(k) = P(k,1)$, on a

$$P(K,L) = LP(K/L,1) = Lp(K/L) = Lp(k)$$

et donc, vu que $L' = \nu L, K' = sP(K,L) - \mu K$,

$$\begin{aligned} k'(t) &= (K(t)/L(t))' = K'(t)/L(t) - K(t)L'(t)/L^2(t) \\ &= sp(k(t)) - (\mu+\nu)k(t) = sp(k(t)) - ak(t) \end{aligned}$$

En particulier, une fonction de production P de Cobb-Douglas du type $P(K,L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$ avec $\alpha \in (0,1)$, vérifie les hypothèses économiques : la fonction $p(k) = k^\alpha$ satisfait à l'ÉD

$$k'(t) = sk^\alpha(t) - ak(t)$$

Stabilité de l'équation différentielle de Solow (I)

$$k'(t) = sk^\alpha(t) - ak(t), \quad k_0 \in \mathbb{R}_+^*$$

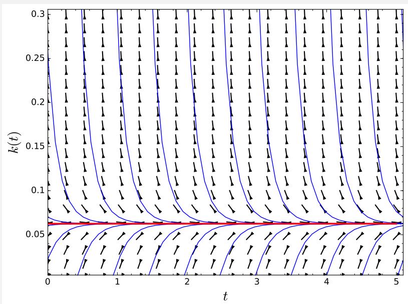
C'est une équation du premier ordre de type Bernoulli et à variables séparables.
La fonction $k_s = s^{1/(\alpha-1)}k$ vérifie l'ÉD $k_s' = k_s^\alpha - ak_s$: on supposera $s = 1$

Il y a un seul point d'équilibre $k_e = a^{1/(\alpha-1)}$.
La solution du problème de Cauchy $k' = k^\alpha - ak, k(t_0) = k_0$ est

$$k(t) = \left[\left(k_0^{1-\alpha} - k_e^{1-\alpha}\right) \mathrm{e}^{-(1-\alpha)a(t-t_0)} + k_e^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

convergente vers le point d'équilibre k_e lorsque $t \to +\infty$.
Suivant le signe de $k_0 - k_e$, la solution est globale, ou pas, lorsque $t \to -\infty$.

Stabilité de l'équation différentielle de Solow (II)



ÉD scalaire $k' = k^{1/4} - 8k$: son portrait de phases 1d avec son unique point d'équilibre $k_e = 1/16$ asymptotique stable et le sens de variation des trajectoires, puis le champ des vitesses pour l'ÉD (augmentée), complété par le graphe de quelques solutions.

```
maxima('plotdf([1,k**(1/4)-8*k],[t,k],[t,0,5],[k,0,0.3])')
```