Points et parties de Fermat-Torricelli-Steiner

Soit une famille $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_m\}$ de m points distincts de $\mathbb{R}^d$, $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$ et $F_{\mathcal{M}}$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^d$ suivant

$$F_{\mathcal{M}}(M) = \sum_{i=1}^{m} \|\overrightarrow{M_iM}\|, \quad M \in \mathbb{R}^d.$$

Ce TP a pour but d'analyser l'ensemble des minima de la fonction $F_{\mathcal{M}}$, dits *points FTS*. P. de Fermat (1601-1665) [1] a soumis ce problème de minimisation dans le plan avec $m = 3$ points à son correspondant E. Torricelli (1608-1647) qui l'a résolu. Le problème a resurgi dans le placement optimal étudié par J. Steiner (1796-1863) et dont les généralisations (somme de distances pondérées, arbres dont les feuilles sont les points donnés) sont d'une grande actualité en recherche opérationnelle.

(1) (a) Montrer que la fonction $F_{\mathcal{M}}$ est convexe, coercive et admet au moins un point de minimum.

(b) Montrer que tout minimum de $F_{\mathcal{M}}$ est dans la boule centrée à l'origine O et de rayon $2\max_i \|\overrightarrow{OM_i}\|$.

(c) Montrer que $F_{\mathcal{M}}$ n'est pas strictement convexe si les points $M_1, \dots, M_m$ sont alignés. Étudier le cas de 3, puis 4 points alignés et faire le lien avec la médiane d'une variable aléatoire sur un espace fini.

(d) Supposons que P, hors de $\mathcal{M}$, est un minimum de la fonction $F_{\mathcal{M}}$. Montrer que P est aussi un minimum de la fonction $F_{\mathcal{M}\cup\{P\}}$.

On suppose désormais que les points $M_i, i = 1, \dots, m$ ne sont pas alignés

(2) Dans cette question, la fonction $F_{\mathcal{M}}$ est définie avec la norme euclidienne standard sur $\mathbb{R}^d$.

(a) Montrer que la fonction $F_{\mathcal{M}}$ est localement strictement convexe et en déduire que le minimum de $F_{\mathcal{L}}$ est unique.
Dans la suite, $P_{\mathcal{M}}$ désignera l'unique point de minimum de $F_{\mathcal{M}}$.

(b) Montrer que $F_{\mathcal{M}}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{M}$ avec gradient

$$\nabla F_{\mathcal{M}}(M) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\overrightarrow{M_iM}}{\|\overrightarrow{M_iM}\|}, \quad M \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{M}$$

et que l'annulation du gradient en $P_{\mathcal{M}} \notin \mathcal{M}$ est équivalente à l'équation au point fixe $P_{\mathcal{M}} = T_{\mathcal{M}}(P_{\mathcal{M}})$ où $T_{\mathcal{M}}$ est définie par

$$T_{\mathcal{M}}(M) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \|\overrightarrow{M_iM}\|^{-1} M_i}{\sum_{j=1}^{m} \|\overrightarrow{M_jM}\|^{-1}}, \quad M \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{M}.$$

Montrer que la transformation $T_{\mathcal{M}}$ est une transformation de descente dans la direction du gradient avec pas variable.

(c) Vérifier par des calculs numériques que $F_{\mathcal{M}}(T_{\mathcal{M}}(M)) < F_{\mathcal{M}}(M)$ pour M quelconque en dehors de $\mathcal{M}$. Étudier la convergence de suites $(P_k)_{k\geq 0}$ vérifiant $P_{k+1} = T_{\mathcal{M}}(P_k)$ pour $k \geq 0$. Tracer en échelle logarithmique la vitesse de convergence de $(\|\overrightarrow{P_\infty P_k}\|)_{k\geq 0}$ où $P_k \to P_\infty$.

1. Le problème est plutôt présenté de manière équivalente comme la minimisation de la fonction $\sum_i MM_i$, somme des distances d'un point à n points : Fermat considérait naturellement la distance euclidienne, on examine en troisième partie le cas de distances induites par des normes non euclidiennes, dites souvent de Minkowski.

(d) Étudier le cas particulier où $\mathcal{M}$ est l'ensemble des sommets d'un triangle avec un angle d'au moins $2\pi/3$.

(e) Tester la méthode de Newton.

(f) Tester une méthode de sous-gradients.

(3) On étudie le cas de la norme infinie $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ si $x = (x_i)$.

(a) La fonction $F_\mathcal{M}$ est-elle strictement convexe ?

(b) Par un mode de recherche aléatoire, déterminer des points de minima approchés de $F_\mathcal{M}$. Illustrer le calcul en dimension 2 en traçant tous les segments PQ où P, Q sont des minima estimés de $F_\mathcal{M}$. On pourra étudier des familles M_i de faible cardinal aléatoirement choisies ou des familles particulières : $\mathcal{M}_1 = \{(1,0),(-1,0)\}$, $\mathcal{M}_2 = \{(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)\}$, $\mathcal{M}_3 = \{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$.

(c) On dit que σ est une symétrie de $F_\mathcal{M}$ si σ est une transformation affine bijective laissant globalement invariante et la famille $\mathcal{M}$ et la norme $\| \quad \|_\infty$. Montrer que si P est un point de minimum pour $F_\mathcal{M}$, il en est de même pour σP si σ est une symétrie de $F_\mathcal{M}$. Reprendre les tracés précédents pour $\mathcal{M}_i, i = 1, 2, 3$ en complétant les points de minima avec l'aide de symétries bien choisies (on considérera des symétries par rapport à une droite ou des rotations qui laissent invariante la norme infinie).

(4) On considère le plan $\mathbb{R}^2$ avec la norme $\| \quad \|_h$ associée à l'hexagone régulier (plein) H centré en $(0,0)$ et avec $(1,0)$ parmi ses sommets :

$$\|v\|_h = \inf_{\substack{\lambda>0 \\ \lambda v \in H}} \lambda^{-1}, \quad v \neq 0.$$

Montrer numériquement que le triangle (plein) de sommets $\mathcal{T} = \{(0,0),(1,0),(1/2,\sqrt{3}/2)\}$ est l'ensemble des minima FTS pour la famille $\mathcal{T}$.

(5) Soit $\alpha > 0$ et la fonction $F_{\mathcal{M},\alpha}$ définie par

$$F_{\mathcal{M},\alpha}(M) = \sum_{i=1}^{m} \|\overrightarrow{M_i M}\|^\alpha, \quad M \in \mathbb{R}^d.$$

On considère à nouveau le cas de la norme euclidienne.

(a) Montrer que $F_{\mathcal{M},\alpha}$ admet un point de minimum.

(b) Montrer qu'un point de minimumm peut être vu comme point fixe d'une transformation $(T^k_{\mathcal{M},\alpha}(x_0))$ analogue à celle introduite dans la fonction 2.b.

(c) Étudier la convergence de l'itération de la suite $T_{\mathcal{M},\alpha}$ dans le cas $m = 2$ et $d = 1$ pour $\alpha = 2, 2.5, 3, 3.5, 4$.

Références bibliographiques :
Zvi Drezner, *On the convergence of the generalized Weiszfeld algorithm*, Ann. Oper. Res. **167** (2009), 327-336.
Harold W. Kuhn, *A note on Fermat's problem*, Math. Programming **4** (1973), 98-107.
Horst Martini, Konrad J. Swanepoel, Gunter Weiß, *The Fermat-Torricelli problem in normed planes and spaces*, J. Optim. Theory Appl. **115**#2 (2002), 283–314.

Annexe

Soit la fonction $u : ((x,y),(\alpha,\beta)) \in \mathbb{R}^2 \times [-1/2,1/2]^2 \mapsto 3y^2 + \beta y + xy + x^2 + \alpha x$ avec loi uniforme sur $[-1/2,1/2]^2$. Étudier le problème $\inf_{(x,y)} \mathbb{E}_{(\alpha,\beta)}[u(x,y,\alpha,\beta)]$ avec le gradient stochastique.