

École polytechnique de l'Université de Nantes

Systemes électroniques et informatique industrielle

Troisième année

2007-2008

Analyse fonctionnelle

II. Distributions et transformées

Laurent Guillopé

Laboratoire de mathématiques Jean Leray (UN-CNRS-ÉCN)

Département de mathématiques, UFR Sciences et techniques

TABLE DES MATIÈRES

Liste des figures.....	iii
Prologue.....	1
1. Distributions	4
1.1. L'espace de Schwartz \mathcal{S}	5
1.2. L'espace \mathcal{S}' des distributions tempérées.....	6
1.3. Dérivation et produit.....	9
1.4. Limites et séries de distributions.....	11
1.5. Distributions périodiques et séries de Fourier.....	13
1.6. Exercices.....	15
2. Transformation de Fourier	19
2.1. Analyse et synthèse dans \mathcal{S}	19
2.2. Relation de Plancherel.....	22
2.3. Analyse et synthèse dans \mathcal{S}'	23
2.4. En plusieurs variables.....	26
2.5. Exercices.....	27
3. Convolution	29
3.1. Convolution dans \mathcal{S}	29
3.2. Convolution dans \mathcal{S}'	30
3.3. Convolution et transformation de Fourier.....	31
3.4. Solutions tempérées d'équations différentielles.....	33
3.5. Exercices.....	33
4. Transformation de Laplace	35
4.1. Fonctions lisses à croissance au plus exponentielle.....	35
4.2. Distributions.....	38
4.3. La fonction de Bessel J_0	40
4.4. Solutions causales d'équations différentielles.....	41
4.5. Exercices.....	42
A. Fonctions Gamma (Γ) et de Heaviside (Υ)	45
B. Transformées de Fourier	46
C. Transformées de Laplace	47
Index	48

LISTE DES FIGURES

1	La fonction θ et sa remplaçante lisse ψ	4
2	La gaussienne γ et ses deux premières dérivées.....	5
3	Les fonctions φ_1 , φ_0 et $\psi_{1/2}$	5
4	La fonction <i>en dents de scie</i> f_T	10
5	Les parties réelle et imaginaire de la fonction de Riemann $r(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{in^2 t}/n^2$. En fait le tracé est celui de la somme partielle des $N = 9$ premiers termes de la série définissant r).....	12
6	Une T -partition de l'unité θ et ses translatées $\dots, \tau_{-T}\theta, \tau_T\theta, \dots$	14
7	Le contour rectangulaire pour calculer la transformée de Fourier de $e^{-\pi t^2}$	19
8	Le contour pour calculer la transformée de Fourier $e^{-at}t^{\alpha-1}\Upsilon(t)$	25
9	Le contour rectangulaire pour établir l'indépendance par rapport à h de la définition de la transformée de Laplace inverse \mathcal{L}^{-1}	37

PROLOGUE

Le concept de *fonction* s'est constitué lentement pour acquérir la forme simple, rigoureuse et d'une portée générale que nous lui connaissons aujourd'hui. Une histoire analogue raconte la mise au point des *distributions*, généralisation de la notion de fonction qui, *synthèse et simplification* selon les propres mots de leur inventeur L. Schwartz (19015-2002), s'est révélée d'une grande fécondité dans beaucoup de branches des mathématiques, fondamentales ou appliquées.

Voilà l'objet de ce cours : introduire la notion de distribution et montrer comment ce cadre est le réceptacle idéal des transformations fonctionnelles associées à J. Fourier (1768-1830) et S. Laplace (1749-1827). Il le fait avec à l'esprit, et comme guide, le traitement du signal, du moins la partie qui concerne les signaux à temps continu de l'électronique analogique. En effet, un tel signal est modélisé par une fonction d'une variable réelle $t \in \mathbb{R}$, le *temps*, à valeurs complexes ou réelles : le signal s pur de pulsation ω est donné par l'exponentielle $s(t) = e^{j\omega t}$, dont il est plus aisé de représenter ses parties réelle $\Re(e^{j\omega t}) = \cos(\omega t)$ et imaginaire $\Im(e^{j\omega t}) = \sin(\omega t)$. Ainsi les bases mathématiques de la théorie du signal sont dans l'analyse classique mise en forme au XIXe siècle (étude des fonctions, analyse de Fourier, intégrale de Riemann, . . .), la théorie de l'intégration⁽¹⁾ de H. Lebesgue (1875-1942) accompagnant la théorie de la mesure par Borel (1871-1956) au changement de siècles et l'analyse moderne du XXe siècle (distributions, introduites rigoureusement en 1940).

Le cours commence donc par un chapitre basique sur les *distributions*, la suite illustrera le slogan « *Tout est distribution tempérée* ». La seule difficulté est le saut conceptuel qui fait penser une fonction comme forme linéaire continue sur un espace de fonctions test, l'espace bien nommé désormais comme l'espace \mathcal{S} des fonctions de Schwartz. C'est le grand apport de L. Schwartz, qui permet de bien comprendre le calcul symbolique de l'ingénieur Heaviside (1850-1925) et la fameuse fonction $\delta(x)$, qui n'en est pas une, du physicien Dirac (1902-1984). D'autres mathématiciens du XXe siècle (J. Hadamard (1865-1963), J. Leray (1906-1998), S. Sobolev (1908-1989) notamment) ont introduit implicitement des éléments importants de calcul sur les distributions, calcul qui a été systématisé par L. Schwartz. On y voit comment les opérations de l'analyse classique, comme dérivation, intégration, multiplication par une fonction (lisse tempérée), sont bien définies dans l'espace \mathcal{S}' des distributions tempérées, à manipuler comme des fonctions généralisées.

⁽¹⁾La théorie de Lebesgue, étendant l'habituelle intégration à la Riemann, est inévitable en analyse de Fourier moderne. Quelques définitions et résultats de cette théorie sont indiqués en note : exposer ses grands traits, même dans un appendice, rallongerait inutilement le texte dont l'objectif principal est de présenter les transformées de Fourier et Laplace, tout en affirmant, preuves ou citations à l'appui, qu'elles sont aujourd'hui parfaitement fondées dans ce cadre des distributions.

L'objet des chapitres suivants est de convaincre que c'est aussi le cadre idéal pour le calcul de Fourier et de Laplace, et partant du *produit de convolution*. Fourieriser des fonctions de Schwartz, des polynômes, des fonctions périodiques, des fonctions bornées, des masses de Dirac, ... est *aisé*.

L'équivalence de la vision en temps et en fréquence d'un signal tempéré réalisée par l'inversibilité de la transformation de Fourier est évidemment d'une grande importance dans les applications. La simplicité de l'inversion de Fourier dans l'espace des distributions tempérées est soulignée par le contraste de la situation pour l'espace des fonctions intégrables (celles là même considérées en général pour introduire la transformation de Fourier) : leur transformée de Fourier n'est a priori que bornée, la transformée inverse d'une fonction bornée n'étant simple que si on l'envisage comme distribution tempérée (la recette miracle pour effacer les divergences de l'intégration).

Le *produit de convolution*, défini dans l'espace de Schwartz \mathcal{S} , ne se prolonge pas à l'espace des distributions tempérées \mathcal{S}' tout entier : c'est évidemment lié à l'impossibilité de définir en général le produit de deux distributions, version en fréquence du produit de convolution spatial. Néanmoins, avec des hypothèses restrictives, mais la plupart du temps vérifiées, on peut définir des produits de convolution de distributions. Ce calcul multiplicatif partiel permet de résoudre des équations différentielles à coefficients constants, avec le concept efficace de *solution élémentaire*.

L'introduction de la transformation de Laplace donne pour des distributions non tempérées, mais à croissance sous-exponentielle, un calcul similaire à celui de Fourier, avec en plus l'usage du calcul des fonctions holomorphes. On se limite à des signaux causaux (*i. e.* des distributions à support dans \mathbb{R}^+), où quelques exemples suffisent à introduire le calcul symbolique qu'Heaviside utilisait déjà : d'autres solutions d'équations différentielles à coefficients constants apparaissent ainsi.

Le cours s'est essentiellement limité à des fonctions d'une variable. Par souci de simplification certes, et parce que la considération de plusieurs variables n'ajoute souvent qu'une difficulté de notation. Cependant, l'exemple du calcul de certaines intégrales de fonction d'une variable réelle montre que cette limitation n'est pas tenable. Elle l'est d'autant moins quand on pense aux modélisations de l'image, signal bidimensionnel. Alors, pour satisfaire ce manque, il faut imaginer en fin de chaque chapitre l'exercice n°0 d'énoncé lapidaire et vague (à faire en dernier!) : reprendre chaque énoncé du chapitre en examinant son éventuelle validité en plusieurs variables.

Quelques figures ont été introduites dans le texte. D'autres accompagneront le cours (un dessin vaut parfois bien des arguments), d'autres pourront être tracés sur un écran en faisant appel à divers logiciels (`maple`, `matlab` ou des langages de plus bas niveau) : *voir* par une image une propriété convainc souvent plus aisément que des ε, δ , encore faut-il les interpréter convenablement. La fonction de Riemann de la page 12 pourrait être l'expression visuelle d'une fonction continue, dérivable nulle part : en fait, elle est dérivable aux seuls réels de la forme $\pi(2p+1)/(2q+1)$ avec p, q entiers, ce dont le graphe persuade difficilement !

Divers appendices complètent le corps du cours. Dans le premier, la définition et quelques propriétés basiques de la fonction Γ dite d'Euler sont données sans preuve : la fonction Γ est inévitable dès lors qu'on pénètre la zoologie des fonctions spéciales, même si son étude peut paraître un peu aride. Les deux suivants mettent en parallèle des tables de transformées de Fourier et de Laplace dans \mathcal{S}' : considérer une telle table dans L^1 par exemple la réduirait considérablement ! L'index de la version en ligne dirige par des liens hypertextuels vers la porte d'entrée qu'est le [MacTutor history of mathematics archive](#) (Université de St Andrews, Écosse), embryon encyclopédique si utile pour les éléments biographiques des mathématiciens cités et qui complète les bribes de cette histoire évoquée ci-dessus. Une astérisque indique une proportion ou un théorème non démontré, certains passages sont dans une police réduite :

ils peuvent être négligés sans nuisance pour la bonne compréhension globale des résultats du cours.

Enfin, on a suivi la notation des électriciens (voir l'exemple 4.5) pour la racine complexe de -1 : « j » au lieu du « i » habituel aux mathématiciens. La fonction échelon ou fonction de Heaviside, notée plutôt dans la littérature mathématique H , h , u ou Y , sera noté ici « Υ » suivant la tradition du traitement du signal : il ne faudra pas le confondre avec la fonction eulérienne Γ de l'appendice A. En résumé, là où souvent certains mathématiciens (comme des spécialistes d'analyse harmonique) utilisent comme définition de l'intégrale de Fourier l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} dt$, nous suivrons les conventions de maints spécialistes du signal temps-fréquence

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi t f} \varphi(t) dt.$$

Nantes, le 2 novembre 2007
Laurent Guillopé

CHAPITRE 1

DISTRIBUTIONS

Une quantité physique est en général modélisée par une fonction : par exemple, l'amplitude $s(t)$ d'un signal en fonction du temps $t \in \mathbb{R}$. Ce signal sera connu si ses valeurs $s(t)$ sont spécifiées à tout instant t . Néanmoins, il n'est pas aisé de décrire effectivement la valeur $s(t)$ à chaque instant t , que ce soit pour des raisons pratiques ou des raisons liées à la mécanique quantique qui explique la rétroaction de l'instrument de mesure sur la mesure. Si le signal s est continu, l'échantillonnage (*i. e.* la donnée des valeurs $s(t_i)$ pour une suite de temps discrets $(t_i)_{i \in I}$) permet de calculer approximativement des intégrales de s par des moyennes pondérées des valeurs $s(t_i)_{i \in I}$

$$\int s(t)dt \sim \sum_{i \in I} h_i s(t_i),$$

intégrales permettant à leur tour de retrouver, sous des hypothèses convenables, les valeurs $s(t)$:

$$(1) \quad s(t) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} s(u)du.$$

Soit θ la fonction définie par $\theta(v) = 1/2$ si $|v| \leq 1$, nulle sinon et θ_ε est la fonction définie par $\theta_\varepsilon(v) = \varepsilon^{-1}\theta(\varepsilon^{-1}v)$. La formule précédente se réécrit suivant

$$s(t) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{|u-t| \leq \varepsilon} s(u)du = \int_{\mathbb{R}} \theta_\varepsilon(u-t)s(u)du.$$

Remplaçant θ par une fonction ψ lisse telle que $\int_{\mathbb{R}} \psi(v)dv = 1$ à support borné (cf. Fig. 1)

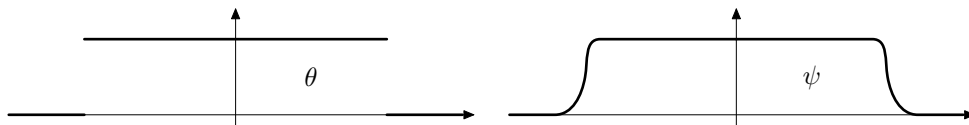


FIGURE 1 . La fonction θ et sa *remplaçante* lisse ψ .

avec ψ_ε défini de manière analogue θ_ε , on montre pareillement que

$$s(t) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(u-t)s(u)du.$$

Ainsi, la connaissance des moyennes

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(v)s(v)dv$$

pour une classe de fonctions φ suffisamment large permet donc de retrouver le signal s : décrire un phénomène physique (ici le signal s) passe par la donnée, pour chaque fonction test φ d'un nombre ($\int s(u)\varphi(u)du$). C'est le point de vue des distributions, qui englobe les fonctions et permet de considérer des fonctionnelles, les *fonctions généralisées*, qui ne

proviennent pas de fonctions comme les masses de Dirac. On ne peut pas en général donner une valeur instantanée à une distribution, le problème d'interpréter physiquement ces valeurs ne survient donc pas!

1.1. L'espace de Schwartz \mathcal{S}

Définition 1.1. Soit φ une fonction d'une variable réelle à valeurs complexes. La fonction φ est dite à *décroissance rapide* si pour tout entier n , il existe une constante C_n telle que

$$|\varphi(t)| \leq \frac{C_n}{(1 + |t|)^n}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La fonction φ est dite *tempérée* ou à croissance au plus polynomiale s'il existe un entier N et une constante C_N tels que

$$|\varphi(t)| \leq C_N(1 + |t|)^N, \quad t \in \mathbb{R}.$$

▷ **Exemple 1.1.** La fonction $e^{-|t|}$ est à décroissance rapide, alors que le sinus cardinal sinc ne l'est pas. Les fonctions $1 + t^2 \cos t, \sin(e^t)$ sont tempérées. ◁

On a alors la définition de l'espace de Schwartz

Définition 1.2. Une fonction φ définie sur \mathbb{R} et à valeurs complexes est dite *de Schwartz* si elle est indéfiniment dérivable et si elle est à décroissance rapide, ainsi que toutes ses dérivées. L'ensemble de telles fonctions constitue l'espace de Schwartz, noté \mathcal{S} (voire $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ pour insister sur le caractère unidimensionnel de l'espace de définition des fonctions).

▷ **Exemples 1.2.**

1. La gaussienne γ définie par $\gamma(t) = e^{-t^2}$ est de Schwartz. En effet, pour m entier,

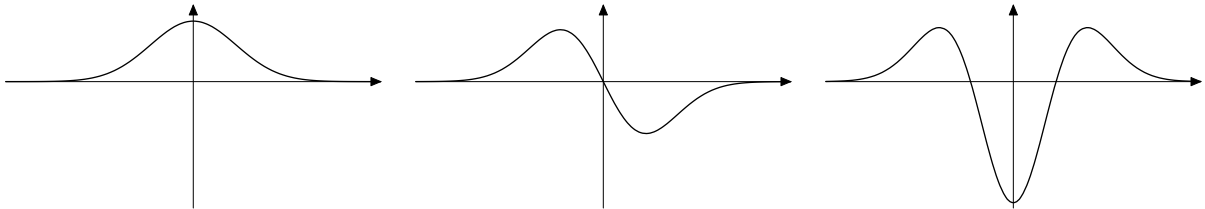


FIGURE 2 . La gaussienne γ et ses deux premières dérivées.

$t^m e^{-t^2} \rightarrow 0$ lorsque $|t| \rightarrow \infty$. On en déduit que $(1 + |t|)^n \gamma(t)$ est bornée sur \mathbb{R} : la fonction γ est à décroissance rapide. La gaussienne γ est indéfiniment dérivable et, pour tout entier k , sa dérivée $\gamma^{(k)}$ d'ordre k est de la forme $P_k \gamma$ pour un certain polynôme P_k : on en déduit que $\gamma^{(k)}$ est à décroissance rapide, et donc que γ est de Schwartz.

2. Toute fonction indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} à support borné (*i. e.* il existe $A > 0$ tel que $\varphi(t) = 0$ si $|t| > A$) est de Schwartz : la fonction φ_1 telle que $\varphi_1(t) = e^{1/(t^2-1)}$ si $|t| < 1$ et nulle sinon, en est une.

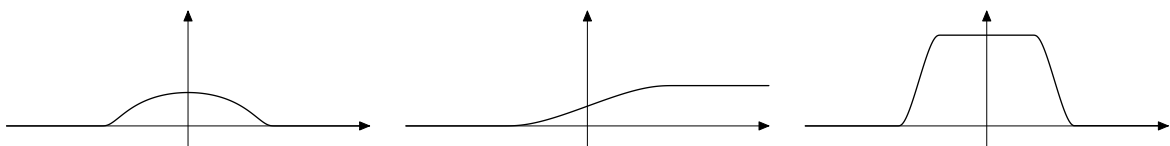


FIGURE 3 . Les fonctions φ_1, φ_0 et $\psi_{1/2}$.

3. Soit $A > 0$ et φ_0 la primitive de la fonction précédente φ_1 , nulle pour $t \leq -1$: $\varphi_0(t) = \int_{-\infty}^t \varphi_1(u) du$. La fonction φ_0 est lisse et constante égale à $\varphi_0(1) > 0$ pour $t \geq 1$. La fonction paire ψ_A telle que $\psi_A(t) = 0$ si $t \leq -A$, $\psi_A(t) = \varphi_0(3+4t/A)/\varphi_0(1)$ si $t \in [-A, -A/2]$ et valant 1 si $t \in [-A/2, 0]$ est une fonction lisse à support dans $[-A, A]$ et valant 1 au voisinage de 0 (une fonction du type de la fonction ψ de la Fig. 1).
4. L'exponentielle $t \rightarrow e^{-|t|}$ n'est pas dérivable en $t = 0$: elle n'est pas de Schwartz, même si elle est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R}^* , avec dérivées à décroissance rapide lorsque $|t| \rightarrow \infty$. \triangleleft

Sur l'espace \mathcal{S} est définie la famille de normes $\|\cdot\|_{m,n}$ indexées par $(n, m) \in \mathbb{N}^2$

$$\|\varphi\|_{m,n} = \sup_{t \in \mathbb{R}, \ell \leq m} |\varphi^{(\ell)}(t)(1+|t|)^n|, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Définition 1.3. La suite $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions de \mathcal{S} converge dans \mathcal{S} vers $\varphi_\infty \in \mathcal{S}$ si pour chaque (m, n) , la suite réelle $(\|\varphi_k - \varphi_\infty\|_{m,n})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 dans \mathbb{R} .

\triangle **Remarque 1.1.** Il n'existe pas de norme N sur \mathcal{S} qui suffise à exprimer cette convergence à elle seule, *i. e.* telle que $\varphi_k \rightarrow \varphi_\infty$ dans \mathcal{S} si et seulement si $N(\varphi_k - \varphi_\infty) \rightarrow 0$. ∇

Géométriquement, la suite $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\varphi_\infty \in \mathcal{S}$ si, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ et $r > 0$, mise à part un nombre fini $K(m, n, r)$ d'indices k , les vecteurs $\varphi_k - \varphi_\infty$ appartiennent à la boule

$$B_{m,n}(r) = \{\varphi \in \mathcal{S}, \|\varphi\|_{m,n} < r\}.$$

L'ensemble des boules $(B_{m,n}(r))_{m,n \in \mathbb{N}, r > 0}$ constitue une base de voisinages du vecteur nul de \mathcal{S} : une partie $V \subset \mathcal{S}$ est un voisinage de $\varphi \in \mathcal{S}$ si V contient la translatée $\varphi + B_{m,n}(r)$ pour des m, n, r convenables.

1.2. L'espace \mathcal{S}' des distributions tempérées

L. Schwartz a introduit les distributions tempérées.

Définition 1.4. Une *distribution tempérée* est une forme linéaire u sur l'espace de Schwartz \mathcal{S} pour laquelle il existe m, n entiers et C réel tels que

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{m,n}, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

où $\langle u, \varphi \rangle$ note l'évaluation de la forme linéaire u sur la fonction test $\varphi \in \mathcal{S}$. L'ensemble des distributions tempérées est noté \mathcal{S}' .

\triangle **Remarque 1.2.** On omettra dans la suite souvent le qualificatif *tempéré* : on ne considère dans les chapitres 1-3 de cette partie que des distributions tempérées, avec dans la dernière partie l'apparition de distributions un peu plus générales, qui, sans que cela soit formalisé, sont des produits d'une distribution tempérée par une fonction exponentielle à phase linéaire.

Soit u une distribution tempérée. La distribution u vérifie la propriété de linéarité

$$\langle u, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \alpha\langle u, \varphi \rangle + \beta\langle u, \psi \rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \varphi, \psi \in \mathcal{S}$$

et de continuité des évaluations de fonctions tests

$$\langle u, \varphi_k \rangle \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0 \text{ si } \varphi_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0 \text{ dans } \mathcal{S}.$$

On montre que cette dernière condition est équivalente à l'existence des m, n, C de la Déf. 1.4.

∇

On a le lemme suivant, dont la démonstration immédiate est laissée au lecteur. Il souligne le caractère linéaire de la théorie des distributions et de leurs premières applications

Lemme 1.1. *L'espace \mathcal{S}' est un espace vectoriel.*

La notion plus générale de distribution sur \mathbb{R} (et aussi tout ouvert de \mathbb{R}) correspond au choix d'un espace de fonctions tests plus petit que \mathcal{S} , celui des fonctions indéfiniment dérivables à support borné. Il est important de localiser la notion de distribution, pour les développements fondamentaux ou plus appliqués (un signal n'a pas d'étendue infinie!). Par ailleurs, si on tronque les valeurs d'un observable en deçà d'un seuil, une fonction de \mathcal{S} sera à support borné; inversement, il est difficile de réaliser une fonction test qui soit exactement nulle en dehors d'un borné! Ces remarques incitent à confondre fonctions test dans \mathcal{S} et fonctions tests à support borné. Pour des raisons mathématiques, cette confusion est évidemment à écarter. Se limiter aux distributions tempérées permet des développements importants (et utiles), ce point de vue n'est finalement pas limitatif dans ce cours.

▷ **Exemples 1.3.**

1. Soit P un polynôme $P(X) = p_d X^d + \dots + p_1 X + p_0$. Alors, pour toute fonction de Schwartz φ , le produit $P\varphi$ en est une aussi et est donc intégrable. La forme linéaire u_P définie par

$$\langle u_P, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} P(t)\varphi(t)dt, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

définit une distribution tempérée.

2. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. La distribution

$$\varphi \in \mathcal{S} \rightarrow \varphi(t_0)$$

est appelée *masse de Dirac en $t = t_0$* , ou simplement *masse de Dirac* si $t_0 = 0$. Elle est notée $\delta(t_0)$, voire $\delta(t - t_0)$ ou simplement δ pour $t_0 = 0$. ◁

Le premier exemple indique comment une fonction polynomiale induit une distribution : il se généralise aux fonctions tempérées

Définition 1.5. Une fonction définie sur \mathbb{R} est dite *tempérée* ou à croissance au plus polynomiale s'il existe N tel que $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|/(1 + |t|)^N < \infty$.

▷ **Exemple 1.4.** Les fonctions $1 + t^2 \cos t, \sin(e^t)$ sont tempérées. ◁

Définition 1.6. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} localement intégrable et tempérée. Alors la forme linéaire

$$\varphi \in \mathcal{S} \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt$$

définit une distribution notée u_f et dite *régulière*.

△ **Remarque 1.3.** La fonction $\exp : t \rightarrow e^t$ n'est pas tempérée : elle n'induit pas de distribution tempérée définissable en terme de distribution régulière. En effet, si φ est une fonction de Schwartz, nulle sur \mathbb{R}^- et égale à $e^{-t^{1/2}}$ pour $t \geq 1$ (il en existe!), la fonction $t \rightarrow e^t \varphi(t)$ n'est pas intégrable.

Soit $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur \mathbb{R} et tempérées. L'application $f \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R}) \rightarrow u_f \in \mathcal{S}'$ est injective : si $u_{f_1} = u_{f_2}$ avec $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, alors $f_1 = f_2$. Ainsi, si $f \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R})$, la distribution u_f détermine l'application f . Sans condition de continuité, on perd cette détermination : par ex., les fonctions S_1 et S_2 coïncidant avec la fonction signe ($\text{sgn}(t) = t/|t|$) sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, avec $S_1(0) = S_2(0) + 1 = 0$ induisent la même distribution $u_{S_1} = u_{S_2}$. Si on identifie les fonctions égales *presque partout*⁽¹⁾, alors on retrouve l'injectivité de l'association $f \rightarrow u_f$.

En particulier, rappelons que l'espace $L^p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions mesurables sur \mathbb{R} telle que $\|f\|_p$ soit finie : on aura défini

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad \text{si } p = 1, 2, \quad \|f\|_{\infty} = \inf_{\text{mes}(A)=0} \sup_{t \in \mathbb{R} \setminus A} |f(t)|$$

⁽¹⁾Une propriété, par exemple une égalité, dépendant de $x \in \mathbb{R}$ est dite *vraie presque partout*, si l'ensemble des x qui ne vérifient pas cette propriété est une partie de mesure nulle : une partie de \mathbb{R} est dite de *mesure nulle* si, pour tout $\varepsilon > 0$, elle peut recouverte par une réunion, éventuellement dénombrable, d'intervalles de longueurs cumulées au plus ε .

et convenu d'identifier deux fonctions égales presque partout. On montre que, pour $p = 1, 2, \infty$, l'application $f \in L^p(\mathbb{R}) \rightarrow u_f \in \mathcal{S}$ est bien définie (bien qu'il existe des fonctions dans $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ qui ne soient pas tempérées) et injective. ∇

Proposition* 1.1. Soit $p = 1, 2$ ou ∞ . L'application qui à $f \in L^p(\mathbb{R})$ associe la distribution u_f définie par

$$\langle u_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt, \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

est bien définie, continue et injective.

\triangle **Remarque 1.4.** On évitera dans un premier temps d'identifier une fonction f et sa distribution régulière u_f associée, afin de bien distinguer les opérations sur f et celles sur la distribution u_f , par exemple l'opération de dérivation qui n'est pas toujours définie pour les fonctions, mais l'est toujours pour les distributions (cf. ci-dessous). Cette identification sera pourtant faite plus tard : une fonction sera considérée comme une distribution (susceptible d'être dérivée), et même une distribution comme une fonction (généralisée), comme le font certains depuis longtemps et sans s'en inquiéter... ∇

\triangleright **Exemples 1.5.**

1. La fonction Υ (notée⁽²⁾ parfois u , voire Γ), nulle pour $t < 0$ et valant 1 sur \mathbb{R}_+^* induit une distribution u_Υ , dite *distribution de Heaviside* ou *échelon*.
2. Pour $a < b$, le signal carré (dit aussi *fonction porte*) $\Pi_{[a,b]}$, défini par $\Pi_{[a,b]}(t) = \Upsilon(t-a) - \Upsilon(t-b)$ (c'est la fonction caractéristique de l'intervalle (a, b) aux valeurs en a et b près) induit aussi une distribution très utilisée en théorie du signal.
3. Soient $h \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$. Pour f une fonction définie sur \mathbb{R} , on définit $\tau_h f, H_a f, f_-$ comme les fonctions vérifiant, pour $t \in \mathbb{R}$

$$\tau_h f(t) = f(t-h), \quad H_a f(t) = f(t/a), \quad f_-(t) = f(-t).$$

On vérifie, pour f tempérée et $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\langle u_{\tau_h f}, \varphi \rangle = \langle u_f, \tau_{-h}\varphi \rangle, \quad \langle u_{H_a f}, \varphi \rangle = \langle u_f, |a|H_{a^{-1}}\varphi \rangle, \quad \langle u_{f_-}, \varphi \rangle = \langle u_f, \varphi_- \rangle,$$

ce qui amène, pour une distribution u la définition des distributions $\tau_h u, H_a u, u_-$ telles que, pour $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\langle \tau_h u, \varphi \rangle = \langle u, \tau_{-h}\varphi \rangle, \quad \langle H_a u, \varphi \rangle = \langle u, |a|H_{a^{-1}}\varphi \rangle, \quad \langle u_-, \varphi \rangle = \langle u, \varphi_- \rangle.$$

On laisse en exercice le soin de vérifier que ce sont bien des distributions. \triangleleft

Une fonction f est à support borné s'il existe A tel que $f(t) = 0$ pour tout $t \notin [-A, A]$. Si f est continue, cela peut s'exprimer en disant que $\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt = 0$ pour toute fonction test φ à support dans borné inclus dans $\mathbb{R} \setminus [-A, A]$. Cette équivalence permet de définir des *distributions à support borné*

Définition 1.7. La distribution u est dite à support borné dans $[-A, A]$ si $\langle u, \varphi \rangle = 0$ pour toute fonction test φ à support dans borné inclus dans $\mathbb{R} \setminus [-A, A]$.

\triangleright **Exemple 1.6.** La masse de Dirac δ est à support borné. La distribution régulière u_f associée à une fonction f à support borné est aussi à support borné. \triangleleft

⁽²⁾La fonction Υ ne sera pas confondue avec la fonction classique Gamma $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^s e^{-t} dt/t = \int_{\mathbb{R}} e^{-e^{-u}} e^{-su} du$, transformée de Laplace de la fonction $e^{-e^{-u}}$, cf. Appendice A.

Si f est une fonction intégrable à support borné, alors $\langle u_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt$ définie pour $\varphi \in \mathcal{S}$ l'est aussi pour tout φ lisse. Si φ_A est une fonction de Schwartz valant 1 sur $[-A-1, A+1]$ et à support borné (il en existe, cf. le troisième exemple de la liste 1.2), on a

$$\langle u_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi_A(t)\varphi(t)dt = \langle u_f, \varphi_A\varphi \rangle.$$

Ces remarques sont à la base de la définition suivante

Définition* 1.1. Soit u une distribution à support borné dans $[-A, A]$. Si φ_A est une fonction de Schwartz, à support borné et valant 1 sur $[-A-1, A+1]$, alors l'égalité

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle u, \varphi_A\varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

permet de définir $\langle u, \varphi \rangle$ pour tout fonction indéfiniment dérivable φ et cette définition ne dépend pas du choix de la fonction φ_A .

1.3. Dérivation et produit

Au contraire des fonctions, une distribution est toujours dérivable. Pour justifier la validité de la définition, on remarquera que φ' est de Schwartz pour $\varphi \in \mathcal{S}$.

Proposition/Définition 1.1. Soit u une distribution tempérée. La fonctionnelle qui à $\varphi \in \mathcal{S}$ associe $\langle u, -\varphi' \rangle \in \mathbb{C}$ est une distribution. Elle est appelée la dérivée de la distribution u et, notée u' ou $\frac{du}{dt}$, elle est caractérisée par

$$\langle u', \varphi \rangle = \langle u, -\varphi' \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

▷ **Exemple 1.7.** La dérivée de la masse de Dirac δ est la distribution δ' définie par

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\varphi'(0), \quad \varphi \in \mathcal{S}. \quad \triangleleft$$

Cette définition est justifiée par la compatibilité avec la dérivée d'une fonction dérivable

Proposition 1.2. Soit f une fonction dérivable à dérivée continue telle que f et f' soient tempérées. Alors la dérivée de la distribution régulière u_f est la distribution régulière $u_{f'}$.

Démonstration. — L'intégration par parties

$$\int_{|t| \leq A} f(t)(-\varphi'(t))dt = [f(t)(-\varphi(t))]_{-A}^A - \int_{|t| \leq A} f'(t)(-\varphi(t))dt, \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

est possible du fait de la régularité de f , d'où par passage à la limite $A \rightarrow +\infty$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)(-\varphi'(t))dt = \int_{\mathbb{R}} f'(t)\varphi(t)dt, \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

soit par définition $(u_f)' = u_{f'}$. □

▷ **Exemple 1.8.** La distribution de Heaviside u_{Υ} a pour dérivée la masse de Dirac à l'origine. En effet

$$\langle u'_{\Upsilon}, \varphi \rangle = -\langle u_{\Upsilon}, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \Upsilon(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^{+\infty} \varphi'(t)dt = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle. \quad \triangleleft$$

Le calcul précédent se généralise

Proposition 1.3. Soit f une fonction tempérée. On suppose qu'il existe une suite $\dots < a_{k-1} < a_k < a_{k+1} < \dots, k \in K$, finie ou infinie, avec $\sum(1 + |a_k|)^{-N} < \infty$ pour un certain N , telle que f soit dérivable sur chaque intervalle (a_k, a_{k+1}) et que les limites $\lim_{t \rightarrow a_k^{\pm}} f(t) = f(a_k^{\pm})$ existent. Alors, si la dérivée f' est tempérée,

$$(u_f)' = u_{f'} + \sum_k (f(a_k^+) - f(a_k^-)) \delta(t - a_k).$$

Démonstration. — En reprenant les définitions, et avec une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \langle (u_f)', \varphi \rangle &= -\langle u_f, \varphi' \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi'(t)dt = \sum_k \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\varphi'(t)dt \\ &= \sum_k \left(f(a_k^+)\varphi(a_k) - f(a_{k+1}^-)\varphi(a_{k+1}) + \int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(t)\varphi(t)dt \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f'(t)\varphi(t)dt + \sum_k (f(a_k^+) - f(a_k^-))\varphi(a_k), \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

▷ **Exemple 1.9.** Soit f_T la fonction définie sur \mathbb{R} telle que, pour $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$,

$$f_T(t) = \begin{cases} t - kT & , \text{ si } t \in (kT - T/2, kT + T/2), \\ 0, & \text{ sinon.} \end{cases}$$

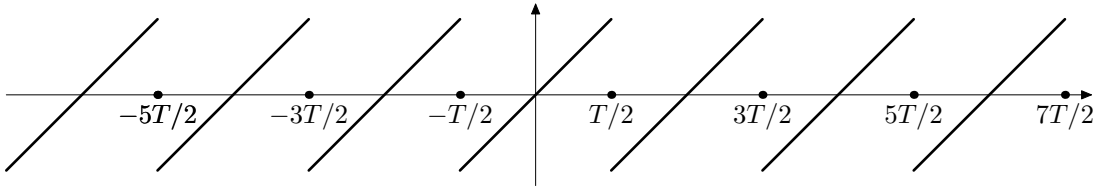


FIGURE 4 . La fonction en dents de scie f_T .

Alors, si u_1 est la distribution associée à la fonction constante égale à 1, on a

$$\frac{du_{f_T}}{dt} = (u_{f_T})' = u_1 - T \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT - T/2). \quad \triangleleft$$

L'autre opération sur \mathcal{S}' est la multiplication par des fonctions lisses tempérées

Proposition/Définition 1.2. Soient F une fonction lisse à croissance au plus polynomiale ainsi que ses dérivées et u une distribution. La fonctionnelle qui à $\varphi \in \mathcal{S}$ associe $\langle u, F\varphi \rangle$ définit une distribution et elle est notée Fu :

$$\langle Fu, \varphi \rangle = \langle u, F\varphi \rangle, \varphi \in \mathcal{S}.$$

Démonstration. — Pour $\varphi \in \mathcal{S}$, le produit $F\varphi$ est de Schwartz et si $\varphi_n \rightarrow 0$ dans \mathcal{S} , il en est de même pour la $(F\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et donc $\langle Fu, \varphi_n \rangle = \langle u, F\varphi_n \rangle \rightarrow 0$. □

▷ **Exemples 1.10.**

1. Avec les notations précédentes, on vérifie la compatibilité avec le produit des fonctions, lorsque celui-ci est possible : $u_{Ff} = Fu_f$.
2. Pour F comme dans la proposition précédente, on a $F\delta = F(0)\delta$. Plus généralement, si $p_T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(kT)$, $Fp_T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} F(kT)\delta(kT)$ donne une représentation du signal F échantillonné à la période T .
3. Pour ce produit de distribution par une fonction à croissance au plus polynomiale, on a la formule de Leibniz sur la dérivation d'un produit

$$(Fu)' = F'u + Fu',$$

vu que

$$\begin{aligned} \langle (Fu)', \varphi \rangle &= \langle Fu, -\varphi' \rangle = \langle u, -F\varphi' \rangle = \langle u, -(F\varphi)' + F'\varphi \rangle = \langle u, -(F\varphi)' \rangle + \langle u, F'\varphi \rangle \\ &= \langle u', F\varphi \rangle + \langle F'u, \varphi \rangle = \langle Fu', \varphi \rangle + \langle F'u, \varphi \rangle = \langle Fu' + F'u, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

pour toute fonction test φ de \mathcal{S} .

4. On a donc

$$u'_{F\Upsilon} = (Fu_{\Upsilon})' = (Fu_{\Upsilon})' = F'u_{\Upsilon} + F(u_{\Upsilon})' = u_{F'\Upsilon} + F\delta = u_{F'\Upsilon} + F(0)\delta,$$

ce qui est un cas particulier de la Prop. 1.3. \triangleleft

\triangle **Remarque 1.5.** Au contraire des fonctions, il n'y a pas possibilité de définir le produit de deux distributions. Pour s'en convaincre, essayons d'appliquer les règles des exemples précédents au produit $\Upsilon = \Upsilon^n$ (supposé un –seul et court– instant exister en tant que produit de distribution) :

$$\Upsilon' = (\Upsilon^n)' = n\Upsilon^{n-1}\Upsilon' = n\Upsilon\Upsilon' = n\Upsilon\delta, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

ce qui donnerait beaucoup de valeurs au produit $\Upsilon\delta$! ∇

1.4. Limites et séries de distributions

La définition de la convergence dans \mathcal{S}' ne met en jeu aucune norme, mais utilise le fait que \mathcal{S}' est un espace de formes linéaires (par souci de simplicité, on s'abstient de définir les voisinages de cette topologie).

Définition 1.8. La suite de distributions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u_{∞} si, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{S}$, la suite réelle $(\langle u_n, \varphi \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\langle u_{\infty}, \varphi \rangle$.

\triangleright **Exemples 1.11.**

1. La masse de Dirac est limite de fonctions. En effet, rappelons l'identité (1), avec $\varepsilon = 1/n$ pour n entier et pour la fonction test $s = \varphi$

$$\varphi(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} \varphi(u) du,$$

qui s'exprime en terme distribution suivant

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \tilde{\theta}_n(u) \varphi(u) du = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_{\tilde{\theta}_n}, \varphi \rangle,$$

avec $\tilde{\theta}_n$ définie par $\tilde{\theta}_n(u) = n/2$ si $|u| < 1/n$, 0 sinon. Ainsi la masse de Dirac δ est limite des distributions $u_{\tilde{\theta}_n}$.

2. Les suites $(\delta(n))_{n \geq 1}$ et $(u_{\sin(nt)})_{n \geq 1}$ convergent vers 0 dans \mathcal{S}' . En effet, pour toute fonction test φ de \mathcal{S} ,

$$\langle \delta(n), \varphi \rangle = \varphi(n),$$

$$|\langle u_{\sin nt}, \varphi \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}} \sin nt \varphi(t) dt \right| = \frac{1}{n} \left| \int_{\mathbb{R}} \cos nt \varphi'(t) dt \right| \leq \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} |\varphi'(t)| dt,$$

ce qui permet de conclure. \triangleleft

Pour montrer la continuité d'un endomorphisme de \mathcal{S}' , il suffit de la montrer à la distribution nulle $u = 0$. On prendra comme expression de la continuité celle en terme de suites :

Définition 1.9. Un endomorphisme L de \mathcal{S}' est continu sur \mathcal{S}' si, pour toute suite (u_n) convergente vers 0, $L(u_n) \rightarrow 0$.

Les opérations introduites ci-dessus sur les distributions sont continues :

Proposition 1.4. La dérivation et la multiplication par une fonction C^{∞} à croissance au plus polynomiale sont des endomorphismes continus de \mathcal{S}' .

Démonstration. — Si $u_n \rightarrow 0$ dans \mathcal{S}' , alors, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{S}$, vu que $F\varphi$ et φ' sont des fonctions test, $\langle u_n, \varphi' \rangle \rightarrow 0$ et $\langle u_n, F\varphi \rangle \rightarrow 0$ soit $\langle u'_n, \varphi \rangle \rightarrow 0$ et $\langle Fu_n, \varphi \rangle \rightarrow 0$: c'est exactement la continuité de la dérivation et de la multiplication. \square

Cette continuité permet de dériver terme à terme toute série de distributions convergentes

Proposition 1.5. *Si la série $u = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est convergente dans \mathcal{S}' , alors on peut dériver terme à terme*

$$u^{(k)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^{(k)}.$$

Démonstration. — La convergence de la série dans \mathcal{S}' signifie la convergence de la suite $(\sum_{n=0}^N u_n)_{N \in \mathbb{N}}$ vers la distribution u . Par continuité de la dérivation, on a convergence de la suite $\sum_{n=0}^N u'_n$ vers u' , ainsi que pour les dérivées d'ordre supérieur. \square

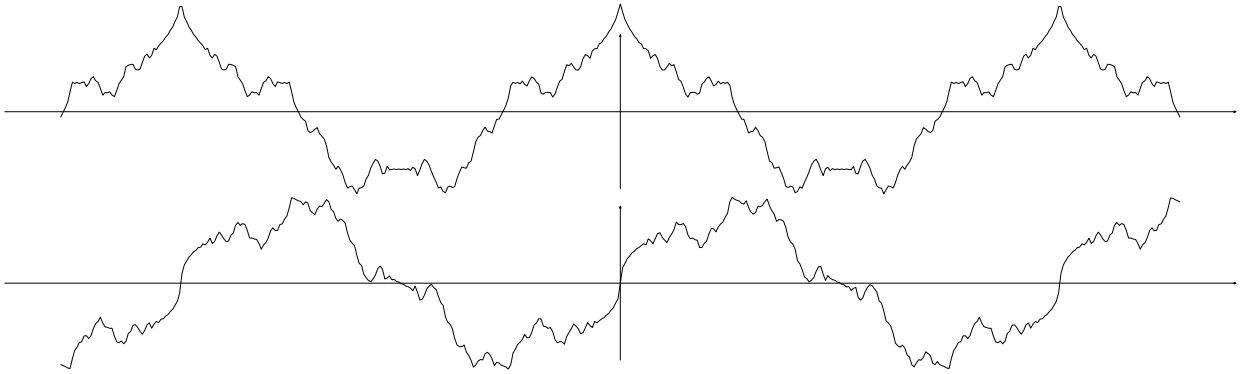


FIGURE 5 . Les parties réelle et imaginaire de la fonction de Riemann $r(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{jn^2 t} / n^2$. En fait le tracé est celui de la somme partielle des $N = 9$ premiers termes de la série définissant r).

▷ **Exemples 1.12.**

1. La série de fonctions $r(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} e^{jn^2 t} / n^2$, introduite par Riemann, est absolument convergente et définit une fonction continue. Elle n'est pas dérivable terme à terme, mais elle l'est en tant que distribution : la distribution régulière u_r est somme de la série de distributions régulières

$$u_r = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_{e^{jn^2 t} / n^2} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_{e^{jn^2 t}} / n^2,$$

où chaque terme est la distribution régulière d'une fonction indéfiniment dérivable

$$\frac{d^k}{dt^k} [e^{jn^2 t}] = (jn^2)^k e^{jn^2 t}, \quad \frac{d^k}{dt^k} [u_{e^{jn^2 t}}] = (jn^2)^k u_{e^{jn^2 t}}.$$

Ainsi, identifiant une fonction continue avec la distribution régulière associée comme le justifie la Rem. 1.3, on a

$$\frac{d^k u_r}{dt^k}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} j(jn^2)^{k-1} e^{jn^2 t},$$

où la série est interprétée dans \mathcal{S}' . On peut faire les mêmes remarques à propos de la fonction w introduite par Weierstrass $w(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \cos(3^n t)$.

2. La fonction 1-périodique paire p telle que $p(t) = t^2$ pour $t \in [0, 1/2]$ a une série de Fourier absolument convergente sur \mathbb{R}

$$p(t) = \frac{1}{12} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n \cos(2\pi n t)}{(\pi n)^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

En dérivant une fois, on obtient au sens distribution

$$(2) \quad f_1(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1} \sin(2\pi nt)}{\pi n}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

où f_1 (cf. Exemple 1.9) est la fonction 1-périodique impaire telle que $f_1(t) = t, t \in [0, 1/2)$ et $f_1(1/2) = 0$. Le théorème de Lejeune-Dirichlet énonce la convergence classique de la série de Fourier (2) vers f_1 sur la partie $\mathbb{R} \setminus (1/2 + \mathbb{Z})$ où f_1 est continue et vers la moyenne $(f_1(1/2-) + f_1(1/2+))/2 = 0$ aux points de discontinuité $1/2 + \mathbb{Z}$. La dérivée seconde donne

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - 1/2 + k) = 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^{n+1} \cos(2\pi nt),$$

soit en posant $s = t + 1/2$, l'égalité de séries dans \mathcal{S}'

$$(3) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(s - k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2j\pi ns}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

qui peut s'interpréter comme décomposition en série de Fourier de la distribution dite *peigne de Dirac* $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(s - k)$. \triangleleft

1.5. Distributions périodiques et séries de Fourier

Soit $T \in \mathbb{R}$. La translatée $\tau_T \varphi$ (ou encore le décalage temporel de durée T) de la fonction φ d'une variable réelle est définie suivant

$$\tau_T \varphi(t) = \varphi(t - T), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Cette définition se généralise simplement aux distributions.

Définition 1.10. Si u est une distribution, sa translatée $\tau_T u$ est définie par

$$\langle \tau_T u, \varphi \rangle = \langle u, \tau_{-T} \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

\triangle **Remarque 1.6.** Pour une distribution régulière u_f , l'égalité $\tau_T u_f = u_{\tau_T f}$ résulte d'un simple changement de variable

$$\begin{aligned} \langle \tau_T u_f, \varphi \rangle &= \langle u_f, \tau_{-T} \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t + T) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t' - T) \varphi(t') dt' \\ &= \int_{\mathbb{R}} \tau_T f(t') \varphi(t') dt' = \langle u_{\tau_T f}, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad \nabla$$

Une fonction f périodique de période T étant simplement un point fixe de l'opérateur *translation de temps* T , la définition de distribution T -périodique s'introduit naturellement.

Définition 1.11. Une distribution u est *périodique de période* T , ou simplement T -périodique, si $\tau_T u = u$.

Pour définir les coefficients de Fourier d'une distribution périodique, on introduit une fonction $\theta \in \mathcal{S}$, dite T -partition de l'unité, telle que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta(t - kT) = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

\triangle **Remarque 1.7.** Le signal carré χ tel que $\chi(t) = 1$ si $t \in [0, 1)$ et $\chi(t)$ nul sinon, vérifie la condition précédente, mais n'est pas dérivable, donc hors de \mathcal{S} . La définition suivante des coefficients de Fourier d'une distribution explique bien pourquoi la condition $\theta \in \mathcal{S}$ est importante. ∇

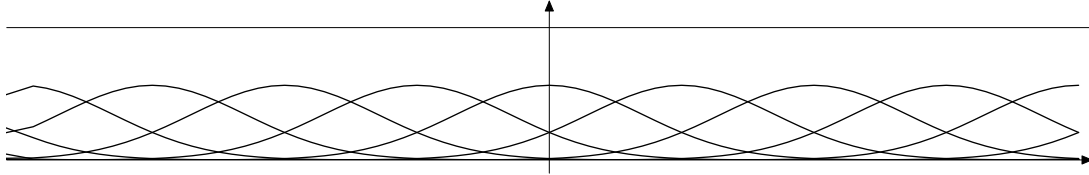


FIGURE 6 . Une T -partition de l'unité θ et ses translatées $\dots, \tau_{-T}\theta, \tau_T\theta, \dots$

On construit facilement une T -partition. Si φ est une fonction de \mathcal{S} positive non identiquement nulle, alors la somme $\Phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(t - kT)$ est convergente pour tout t de somme strictement positive : la fonction $\theta = \varphi/\Phi$ est une T -partition de l'unité. On peut prendre φ à support borné, par exemple φ nulle en dehors de $[-1, 1]$ et valant $\exp(1/(t^2 - 1))$ si $|t| \leq 1$, cf. Fig. 6.

Définition 1.12. Soit u une distribution T -périodique. Soit θ une T -partition de l'unité. Les coefficients de Fourier de u sont définis par

$$c_n(u) = \frac{1}{T} \langle u, e^{-2j\pi nt/T} \theta \rangle, \quad a_n(u) = \frac{2}{T} \langle u, \cos(2\pi nt/T) \theta \rangle, \quad b_n(u) = \frac{2}{T} \langle u, \sin(2\pi nt/T) \theta \rangle.$$

\triangle **Remarque 1.8.** Pour une fonction f T -périodique, les coefficients de Fourier de la distribution u_f sont les coefficients habituels, par ex.

$$\begin{aligned} Tc_n(u_f) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\theta(t)e^{-2j\pi nt/T} dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\theta(t)e^{-2j\pi nt/T} dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^T f(t')\theta(t' + kT)e^{-2j\pi nt'/T} dt' = \int_0^T f(t') \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta(t' + kT) \right) e^{-2j\pi nt'/T} dt' \\ &= \int_0^T f(t')e^{-2j\pi nt'/T} dt'. \end{aligned} \quad \nabla$$

On montre que cette définition ne dépend pas du choix de la T -partition de l'unité θ .

\triangleright **Exemple 1.13.** Si e_n est la distribution régulière donnée par l'exponentielle de fréquence $2\pi n/T$ (i. e. $e_n(t) = e^{2j\pi nt/T}$, $t \in \mathbb{R}$), $c_n(e_n) = 1$ et $c_p(e_n) = 0$ si $p \neq n$. \triangleleft

La décomposition en série de Fourier des distributions T -périodiques s'exprime simplement

Théorème 1.1. Soit u une distribution T -périodique. Les suites $(a_n(u)), (b_n(u)), (c_n(u))$ de ses coefficients de Fourier sont à croissance tempérée, i. e. il existe un entier k et une constante C telle que

$$|a_{|n|}(u)| + |b_{|n|}(u)| + |c_n(u)| \leq C(1 + |n|)^k, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Les séries trigonométriques associées aux suites de coefficients de Fourier de u convergent au sens distribution, avec somme égale à la distribution u :

$$(4) \quad u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u) e^{2j\pi nt/T} = a_0(u) + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n(u) \cos(2j\pi nt/T) + b_n(u) \sin(2j\pi nt/T))$$

Démonstration. — Il existe des entiers m, k et une constante $C_{m,k}$ tels que $|\langle u, \varphi \rangle| \leq C_{m,k} \|\varphi\|_{m,k}$, $\varphi \in \mathcal{S}$. Alors

$$|c_n(u)| = \frac{1}{T} \left| \langle u, e^{-2j\pi nt/T} \theta \rangle \right| \leq \frac{C_{m,k}}{T} \|\theta e^{-2j\pi nt/T}\|_{m,k} \leq C(1 + |n|)^k.$$

La série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{c_n(u)}{|n|^{k+2}} e^{2j\pi nt/T}$ converge normalement, elle converge comme série de distribution. Sa dérivée d'ordre $k+2$, qui est la série (4) privé du terme $n=0$ à un facteur $(2j\pi/T)^{k+2}$ près, converge dans \mathcal{S} , soit \tilde{u} sa somme.

La distribution \tilde{u} a mêmes coefficients de Fourier que la distribution u , puisque

$$\langle \tilde{u}, e^{2j\pi nt/T} \theta \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{c_m(u)}{T} \int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi mt/T} e^{2j\pi nt/T} \theta(t) dt = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{c_m(u)}{T} \int_0^T e^{2j(n-m)t/T} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta(t - kT) \right) dt = c_n(u).$$

Pour conclure, il s'agit de montrer que $\tilde{u} = u$, i. e. que toute distribution v T -périodique à coefficients de Fourier tous nuls est nulle. Soit φ une fonction de \mathcal{S} et $\tilde{\varphi}$ sa T -périodisée : $\tilde{\varphi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_{kT} \varphi$. La fonction $\tilde{\varphi}$ est de classe \mathcal{C}^∞ et si θ est une T -partition de l'unité

$$\begin{aligned} \langle v, \varphi \rangle &= \langle v, \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \tau_{\ell T} \theta \right) \varphi \rangle = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \langle v, \tau_{\ell T} \theta \varphi \rangle = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \langle v, \theta \tau_{-\ell T} \varphi \rangle = \langle v, \theta \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \tau_{-\ell T} \varphi \rangle = \langle v, \theta \tilde{\varphi} \rangle \\ &= \langle v, \theta \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\tilde{\varphi}) e^{2j\pi k \cdot / T} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\tilde{\varphi}) \langle v, \theta e^{2j\pi k \cdot / T} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\tilde{\varphi}) c_{-k}(v) = 0. \end{aligned} \quad \square$$

▷ **Exemple 1.14.** La distribution $\Delta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(kT)$ est T -périodique et a comme coefficients de Fourier $c_n(\Delta) = 1/T$. Ainsi,

$$T \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2j\pi nt/T}$$

identité, appelée identité de Poisson, exprimant la série de Fourier du peigne de Dirac (3). ◁

1.6. Exercices

- Soit γ la gaussienne définie par $\gamma(t) = e^{-t^2}$, $t \in \mathbb{R}$.
 - Montrer que, pour tout entier k , la fonction γ_k avec $\gamma_k(t) = t^k \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$ est à décroissance rapide. En déduire que, si P est un polynôme, la fonction $P\gamma : t \rightarrow P(t)\gamma(t)$ est à décroissance rapide.
 - Déduire de la question précédente que $Q\gamma$ est de Schwartz pour tout polynôme Q .

- Soit $T \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$ et P un polynôme d'une variable. Si φ est une fonction définie sur \mathbb{R} , on définit les fonctions $\tau_T \varphi$, $H_a \varphi$, $\tilde{\varphi}$ et $P\varphi$ par

$$\tau_T \varphi(t) = \varphi(t - T), \quad H_a \varphi(t) = \varphi(at), \quad \tilde{\varphi}(t) = \varphi(-t), \quad P\varphi(t) = P(t)\varphi(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que toutes ces fonctions sont de Schwartz si φ l'est.

- Soit φ une fonction de Schwartz d'intégrale nulle : $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) du = 0$. Montrer que la fonction ψ définie par

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(u) du, \quad t \in \mathbb{R},$$

est bien définie et de Schwartz.

On pourra remarquer $\int_{-\infty}^t \varphi(u) du = - \int_t^{+\infty} \varphi(u) du$, $t \in \mathbb{R}$.

4. Soit, pour m, n entiers l'application $\|\cdot\|_{m,n}$ définie sur l'espace de Schwartz \mathcal{S} par

$$\|\varphi\|_{m,n} = \sup_{t \in \mathbb{R}, \ell \leq m} |\varphi^{(\ell)}(t)(1+|t|)^n|, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

- (a) Montrer que l'application $\|\cdot\|_{m,n}$ est une norme.
 (b) Montrer que, pour f mesurable et φ de Schwartz,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(t)\varphi(t)| dt &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt \|\varphi\|_{0,0}, \\ \int_{\mathbb{R}} |f(t)\varphi(t)| dt &\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(1+|t|)^2}} \|\varphi\|_{0,1}, \\ \int_{\mathbb{R}} |f(t)\varphi(t)| dt &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+t^2} \|\varphi\|_{0,2}. \end{aligned}$$

En déduire, que, pour $f \in L^p(\mathbb{R})$, avec $p = 1, 2$ ou ∞ , l'application

$$\varphi \in \mathcal{S} \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t) dt$$

définit bien une distribution tempérée.

5. Soit $f > 0$. Montrer que la somme $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(kf)$ définit une distribution (dite *peigne de Dirac*).
 6. Pour chacune des fonctions définies sur \mathbb{R} , nulles pour $|t| > 2\pi$ et valant

$$|t| \sin t, \quad t \sin t, \quad |\sin t|, \quad |t \sin t|, \quad |t| \cos(t/2)$$

pour $t \in [-2\pi, 2\pi]$, tracer son graphe et celui de sa première dérivée (aux points où les fonctions sont classiquement dérivables), puis calculer sa dérivée au sens distributions, *i. e.* la dérivée de la distribution régulière associée.

7. Soit F une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Montrer que $F\delta'$ est bien définie comme distribution et est égale à $-F'(0)\delta + F(0)\delta'$.
 8. La fonction de J_0 est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ solution de l'équation différentielle

$$ty'' + y' + ty = 0.$$

Montrer que la distribution régulière associée à la fonction ΥJ_0 , avec Υ la fonction de Heaviside, vérifie aussi cette équation.

9. Calculer une primitive g de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = e^t(\cos(e^t) + \sin(e^t))$, $t \in \mathbb{R}$ et montrer que g est bornée. En déduire une définition de f comme distribution.

10. Soit θ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $\theta(t) = e^{-t^2}/\sqrt{\pi}$, Θ par $\Theta(t) = \int_{-\infty}^t \theta(u)du$. On rappelle que $\Theta(+\infty) = 1$. Pour $\varphi \in \mathcal{S}$, on pose

$$\tilde{\varphi}(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(s)ds - \int_{\mathbb{R}} \varphi(s)ds \Theta(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (a) Montrer que la fonction $\tilde{\varphi}$ est bien définie et est de Schwartz.
 (b) Soit u une distribution de dérivée nulle. En considérant $\langle u', \tilde{\varphi} \rangle$, montrer que u est une distribution régulière associée à une fonction constante.
 (c) Soit v une distribution et w la distribution définie par

$$\langle w, \varphi \rangle = -\langle v, \tilde{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

Montrer que $w' = v$.

11. Soit u_n la distribution régulière associée à la fonction $n\Pi_{[0,1/n]}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \delta$.

12. Montrer que

$$\delta' = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left[\delta \left(-\frac{1}{n} \right) - \delta \left(\frac{1}{n} \right) \right].$$

13. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définie par $f_n(t) = (1 + \text{th}(nt))/2, t \in \mathbb{R}$ converge vers la fonction de Heaviside au sens distribution. Quelle est la limite de la suite $(f'_n)_{n \geq 1}$?

14. Soit u une distribution. On note par $\tau_h u$ la translatée de u définie par

$$\langle \tau_h u, \varphi \rangle = \langle u, \tau_{-h} \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

où $\tau_h \varphi$ est définie par $\tau_h \varphi(t) = \varphi(t - h), t \in \mathbb{R}$. Montrer la *discrétisation de la dérivée*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u - \tau_h u}{h} = u'.$$

15. Soit h_n la fonction définie sur \mathbb{R} par $h_n(t) = nt/(1 + nt^2), t \in \mathbb{R}$. Montrer la convergence au sens des distributions

$$u_{h_n} \rightarrow \text{vp}(t^{-1}), \quad n \rightarrow \infty,$$

où la distribution $\text{vp}(t^{-1})$, dite *valeur principale de Cauchy*, est définie par

$$\langle \text{vp}(t^{-1}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|t| \geq \varepsilon} \varphi(t)dt, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

16. Soit g_n définie sur \mathbb{R} par $g_n(t) = 0$ si $|t| \geq 1/n$ et $g(t) = n^2$ si $|t| < 1/n$. Montrer que $g_n(t) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ pour presque tout t , mais que la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite au sens distribution.

17. Soit $\varepsilon \in (0, 1)$ et u_ε définie par $u_\varepsilon(t) = \varepsilon|t|^{\varepsilon-1}, t \in \mathbb{R}$. Montrer que $u_\varepsilon \rightarrow 2\delta$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

18. Montrer que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions convergeant simplement vers la fonction f_∞ et s'il existe C, p tels que $|f_n(t)| \leq C(1 + |t|)^p$, alors f_n tend vers f_∞ au sens distribution.

19. Soit u la fonction définie comme la somme de la série

$$u(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{2j\pi nt}}{1 + n^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Montrer que u est bien définie et représente une fonction continue, paire et 1-périodique. En déduire que la fonction $t' \in \mathbb{R} \rightarrow u(1/2 + t')$ est paire.

(b) Montrer que la dérivée seconde de u au sens distribution vérifie

$$-u'' + 4\pi^2 u = 4\pi^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2j\pi nt}.$$

(c) Montrer que toute solution paire de l'équation différentielle $-y'' + 4\pi^2 y = 0$ est de la forme $y(x) = C \operatorname{ch}(2\pi x)$, $x \in \mathbb{R}$, pour une constante C convenable.

(d) En utilisant la relation de Poisson

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2j\pi nt} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(k),$$

montrer qu'il existe une constante \tilde{C} telle que $u(1/2 + t) = \tilde{C} \operatorname{ch} 2\pi t$, $|t| \leq 1/2$.

(e) Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} , indéfiniment dérivable en dehors de $t = 0$, à support borné. On suppose que les limites $f'(0^\pm)$, $f''(0^\pm)$ existent. Montrer que la dérivée seconde au sens distribution de f est $f'' + (f'(0^+) - f'(0^-))\delta_0$.

(f) Déduire des question précédentes que

$$\operatorname{ch} \pi(2t - 1) = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{\cos 2\pi nt}{1 + n^2} \right), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

CHAPITRE 2

TRANSFORMATION DE FOURIER

2.1. Analyse et synthèse dans \mathcal{S}

Définition 2.1. Soit $\varphi \in \mathcal{S}$. Sa transformée de Fourier Φ est la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi t f} \varphi(t) dt, \quad f \in \mathbb{R}.$$

Δ **Remarque 2.1.** La transformation de Fourier Φ de φ (F de f, \dots) est notée diversement : $\mathcal{F}(\varphi)$ (la transformée de Laplace sera notée similairement \mathcal{L}) ou de manière plus courte $\widehat{\varphi}$. Certains préfèrent prendre la phase $\omega = 2\pi f$ comme variable de Fourier : $\widehat{\varphi}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{j\omega t} \varphi(t) dt$, avec éventuellement un facteur d'amplitude $\pi^{-1/2}$. Reste aussi le choix entre j et $-j$, *i. e.* le signe $+$ ou $-$ dans la phase. Toutes ces variations importent peu pour la nature des résultats théoriques principaux (formule d'inversion, échange de la dérivation et de la multiplication, ...), ce n'est évidemment pas le cas lorsqu'il s'agit d'effectuer des calculs précis. ∇

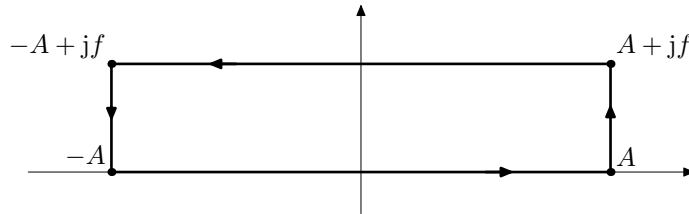


FIGURE 7 . Le contour rectangulaire pour calculer la transformée de Fourier de $e^{-\pi t^2}$.

\triangleright **Exemple 2.1.** La gaussienne γ_0 définie par $\gamma_0(t) = e^{-\pi t^2}$, $t \in \mathbb{R}$ a pour transformée de Fourier elle-même : $\widehat{\gamma}_0(f) = e^{-\pi f^2}$, $f \in \mathbb{R}$.

Remarquant $t^2 + 2jtf = (t + jf)^2 + f^2$, on intègre la fonction holomorphe $e^{-\pi z^2}$ sur le contour rectangulaire $[-A, A, A + jf, -A + jf, -A]$, avec A réel (cf. figure 7),

$$\int_{-A}^A e^{-\pi z^2} dz + \int_A^{A+jf} e^{-\pi z^2} dz + \int_{A+jf}^{-A+jf} e^{-\pi z^2} dz + \int_{-A+jf}^{-A} e^{-\pi z^2} dz = 0,$$

où les deux termes d'intégration sur les segments verticaux, majorés suivant

$$\left| \int_{\pm A}^{\pm A+jf} e^{-\pi z^2} dz \right| = \left| \int_0^1 e^{-\pi(\pm A + jfu)^2} |f| du \right| \leq e^{-\pi A^2} \int_0^1 e^{\pi(fu)^2} |f| du,$$

convergent vers 0 lorsque $A \rightarrow \infty$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi z^2} dz &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^{+A} e^{-\pi z^2} dz = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A+jf}^{+A+jf} e^{-\pi z^2} dz = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^{+A} e^{-\pi(u+jf)^2} du \\ &= e^{\pi f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2 - 2j\pi t f} dt, \end{aligned}$$

et on conclut grâce à l'identité $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi z^2} dz = 1$ (cf. Appendice A). \triangleleft

La transformation de Fourier réagit simplement aux décalage temporel et changement d'échelle, ainsi qu'à la dérivation et la multiplication par des polynômes.

Proposition 2.1. *Soit φ une fonction de Schwartz. Alors, pour $f \in \mathbb{R}$,*

$$(5) \quad \widehat{\tau_{t_0}\varphi}(f) = e^{-2j\pi t_0 f} \widehat{\varphi}(f), \quad t_0 \in \mathbb{R},$$

$$(6) \quad \widehat{\varphi(at)}(f) = \frac{1}{|a|} \widehat{\varphi}\left(\frac{f}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R}^*,$$

$$(7) \quad \frac{d^m \widehat{\varphi}}{df^m}(f) = (-2\pi j)^m t^m \widehat{\varphi}(f), \quad m \in \mathbb{N},$$

$$(8) \quad f^m \widehat{\varphi}(f) = (2\pi j)^{-m} \widehat{\varphi^{(m)}}(f), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_{t_0}\varphi}(f) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi t f} \varphi(t - t_0) dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi(u+t_0)f} \varphi(u) du = e^{-2j\pi t_0 f} \widehat{\varphi}(f), \\ \widehat{\varphi(at)}(f) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi t f} \varphi(at) dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi(u/a)f} \varphi(u) \frac{du}{|a|} = |a|^{-1} \widehat{\varphi}(f/a), \\ \frac{d^m \widehat{\varphi}}{df^m}(f) &= \frac{d^m}{df^m} \int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi t f} \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} (-2\pi j t)^m e^{-2j\pi t f} \varphi(t) dt = (-2\pi j)^m t^m \widehat{\varphi}(f), \\ f^m \widehat{\varphi}(f) &= \int_{\mathbb{R}} f^m e^{-2j\pi t f} \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} (-2\pi j)^{-m} \frac{d^m}{dt^m} [e^{-2j\pi t f}] \varphi(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} (2\pi j)^{-m} e^{-2j\pi t f} \varphi^{(m)}(t) dt = (2\pi j)^{-m} \widehat{\varphi^{(m)}}(f). \quad \square \end{aligned}$$

\triangle **Remarque 2.2.** La définition 2.1 s'étend aux fonctions intégrables $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, alors que les identités (7) et (8) imposent des hypothèses de dérivabilité et de croissance modérée sur la fonction φ , en général non satisfaites pour une fonction intégrable. Mais, si on considère la fonction intégrable comme distribution tempérée, ces conditions disparaissent et on verra que les conclusions de la proposition restent valables dans l'espace des distributions tempérées \mathcal{S}' , cadre naturel et quasi-optimal pour définir la transformation de Fourier et qui contient l'espace $L^1(\mathbb{R})$ des fonctions intégrables. ∇

Proposition 2.2. *La transformée de Fourier d'une fonction de Schwartz est de Schwartz. La transformation de Fourier induit un opérateur linéaire de \mathcal{S} .*

Démonstration. — Vu le théorème de convergence dominée⁽¹⁾ la transformation de Fourier $\widehat{\varphi}$ est continue sur \mathbb{R} . D'après la proposition précédente

$$(2\pi j f)^m \widehat{\varphi}(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi t f} \frac{d^m \varphi}{dt^m}(t) dt,$$

d'où

$$(9) \quad |\widehat{\varphi}(f)| (1 + |2\pi f|^m) \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1 + t^2} \|\varphi\|_{m,2}.$$

⁽¹⁾Ce théorème, l'un des résultats les plus invoqués de la théorie de l'intégration de Lebesgue, énonce que pour une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de fonctions intégrables sur \mathbb{R} , convergente simplement vers f et dominée par une fonction g positive intégrable, i. e. telle que $|f_n(t)| \leq g(t), t \in \mathbb{R}$ avec $\int_{\mathbb{R}} g(t) dt < \infty$, alors la suite des intégrales $\int_{\mathbb{R}} f_n(t) dt$ converge vers l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(t) dt$. Ce théorème a pour corollaire la continuité d'une fonction F définie par une intégrale : $F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, t) dt$, dès que la fonction f est continue et dominée par une fonction intégrable g de la variable t . La dérivabilité, par rapport à la variable réelle ou complexe x , est déduite d'hypothèse analogues. Ces hypothèses de domination sont en général facilement vérifiables.

ainsi $\widehat{\varphi}$ est à décroissance rapide. Sa dérivée d'ordre m

$$\frac{d^m \widehat{\varphi}}{df^m}(f) = (-2\pi j)^m \widehat{t^m \varphi}(f),$$

est la transformation de Fourier de la fonction de Schwartz $(-2\pi j)^m t^m \varphi$ et est donc à décroissance rapide. La linéarité est évidente. \square

\triangle **Remarque 2.3.** La transformée de Fourier d'une fonction φ non nulle à support borné n'est jamais à support borné : $\widehat{\varphi}$ se prolonge à \mathbb{C} comme fonction holomorphe non nulle, qui ne peut être à support borné. ∇

Théorème 2.1. Pour φ de Schwartz, on a la formule d'inversion

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2j\pi ft} \widehat{\varphi}(f) df, \quad t \in \mathbb{R}.$$

\triangle **Remarque 2.4.** On notera parfois $\check{\varphi}$ la transformation de Fourier inverse de φ : $\check{\varphi}(f) = \widehat{\varphi}(-f)$. Avec la notation de l'exemple 1.5, on a $\check{\varphi} = \widehat{\varphi}_- = (\widehat{\varphi})_-$. Par ailleurs, la formule d'inversion est aisément vérifiée pour la gaussienne γ_0 de l'exemple 2.1 ∇

Démonstration. — Rappelons que l'intégrale du sinus cardinal $\int_{\mathbb{R}} \text{sinc } t dt$ est semi-convergente de valeur π , i. e.

$$(10) \quad \lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-X}^X \frac{\sin t}{t} dt = \pi.$$

Soit $\widehat{\varphi}_X$ définie par

$$\varphi_X(t) = \int_{-X}^X e^{2j\pi ft} \widehat{\varphi}(f) df.$$

On a, en utilisant Fubini⁽²⁾

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \int_{-X}^X e^{2j\pi ft} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi t' f} \varphi(t') dt' \right) df = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-X}^X e^{2j\pi f(t-t')} df \right) \varphi(t') dt' \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin 2\pi X(t-t')}{t-t'} \varphi(t') dt' = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin 2\pi X u}{u} \varphi(t-u) du \end{aligned}$$

Par suite, vu (10)

$$(11) \quad \varphi_X(t) - \varphi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} (\varphi(t-u) - \varphi(t)) \frac{\sin 2\pi X u}{u} du = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \Phi_t(u) \sin(2\pi X u) du$$

avec la fonction Φ_t dérivable

$$\Phi_t(u) = \frac{\varphi(t-u) - \varphi(t)}{u} = \int_0^1 \varphi'(t-uv) dv, \quad \frac{d\Phi_t}{du}(u) = - \int_0^1 v \varphi''(t-uv) dv$$

En décomposant l'intégrale (11) sur $|u| \leq 1$ et $|u| \geq 1$

$$\pi |\varphi_X(t) - \varphi(t)| \leq \left| \int_{|u| \leq 1} \Phi_t(u) \sin(2\pi X u) du \right| + \left| \int_{|u| \geq 1} \frac{\varphi(t-u) - \varphi(t)}{u} \sin(2\pi X u) du \right| + |\varphi(t)| \left| \int_{|v| \geq X} \frac{\sin 2\pi v}{v} dv \right|$$

Lorsque $X \rightarrow \infty$, le dernier terme tend vers 0 puisque le sinus cardinal est semi-intégrable, alors que les deux premiers termes tendent vers 0 d'après le lemme suivant (dont la forme générale est dit de Lebesgue). \square

Lemme 2.1. Soit f dérivable sur (a, b) (a, b finis ou non) avec f et f' intégrables sur l'intervalle (a, b) et existence des limites $f(a^+), f(b^-)$. Alors

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \int_a^b f(u) \sin(2\pi X u) du = 0.$$

⁽²⁾Le théorème de Fubini est un des théorèmes clé de l'intégration lebesgienne. Il ramène l'intégrale d'une fonction de plusieurs variables à une succession d'intégrales de fonctions d'une variable, cette succession d'intégrations étant faite dans un ordre quelconque. Sous des conditions non détaillées ici mais qui sont en général vérifiées aisément, on a, par exemple, pour une fonction de deux variables

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} F(x, y) dx \right] dy = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} F(x, y) dy \right] dx.$$

Démonstration. — En intégrant par parties, on a

$$\int_a^b f(u) \sin(2\pi Xu) du = \frac{f(b^-) \cos Xb - f(a^+) \cos Xa}{X} + \frac{1}{X} \int_a^b f'(u) \cos(2\pi Xu) du,$$

soit

$$\left| \int_a^b f(u) \sin(2\pi Xu) du \right| = \frac{|f(a^+)| + |f(b^-)|}{X} + \frac{\int_a^b |f'(u)| du}{X},$$

qui permet de conclure. \square

Théorème 2.2. *La transformée de Fourier est une application linéaire bijective de \mathcal{S} dans \mathcal{S} . La transformée de Fourier $\varphi \in \mathcal{S} \rightarrow \widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$, ainsi que son inverse, est continue.*

Démonstration. — La transformée de Fourier applique \mathcal{S} dans lui-même d'après la proposition 2.2. Le théorème 2.1 donne une formule pour l'application inverse, comme la composée de la transformée de Fourier et de l'application qui à $\varphi \in \mathcal{S}$ associe la fonction $t \rightarrow \varphi(-t)$.

Les formules, comme la majoration (9), de la preuve de la proposition 2.2 permettent d'estimer les normes $\|\widehat{\varphi}\|_{m,n}$ en fonction de celles de φ . La continuité de la transformée de Fourier en résulte, ainsi que celle de sa réciproque. \square

2.2. Relation de Plancherel

Proposition 2.3. *Soit φ, ψ des fonctions de Schwartz. Alors*

$$(12) \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \widehat{\psi}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(f) \psi(f) df.$$

Démonstration. — En utilisant le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \widehat{\psi}(t) dt &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi ft} \psi(f) df \right) dt = \int_{\mathbb{R}} \psi(f) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi ft} \varphi(t) dt \right) df \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(f) \widehat{\varphi}(f) df. \end{aligned} \quad \square$$

La relation de Plancherel implique le caractère isométrique de la transformation de Fourier sur \mathcal{S} muni de la norme de la convergence en moyenne quadratique.

Proposition 2.4. *Soit φ_1, φ_2 des fonctions de Schwartz. Alors, la relation de Plancherel*

$$(13) \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(t) \overline{\varphi_2(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}_1(f) \overline{\widehat{\varphi}_2(f)} df,$$

est vérifiée.

Démonstration. — On reprend (12) avec $\varphi_2 = \overline{\widehat{\psi}}$. D'après la formule d'inversion de Fourier, on a

$$\psi(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{2j\pi ft} \widehat{\psi}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} e^{2j\pi ft} \overline{\varphi_2(t)} dt = \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi ft} \varphi_2(t) dt} = \overline{\widehat{\varphi}_2(f)},$$

d'où résulte la formule. \square

L'espace \mathcal{S} est dense dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$: la transformation de Fourier se prolonge donc continûment à tout $L^2(\mathbb{R})$.

Corollaire 2.1. *La transformation de Fourier, définie sur \mathcal{S} , admet un prolongement continu sur $L^2(\mathbb{R})$, qui est une isométrie. Pour φ dans $L^2(\mathbb{R})$, la fonction Φ_X définie par l'intégrale convergente*

$$(14) \quad \Phi_X(f) = \int_{-X}^X e^{-2j\pi ft} \varphi(t) dt, \quad f \in \mathbb{R},$$

converge en moyenne quadratique vers la transformation de Fourier $\Phi = \widehat{\varphi}$ de φ et

$$\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\Phi(f)|^2 df = \|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|\mathcal{F}(\varphi)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Démonstration. — L'espace \mathcal{S} est dense dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$: si la fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ est approchée par la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la transformée de Fourier \widehat{f} est définie comme la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\varphi}_n$ dans $L^2(\mathbb{R})$, limite qui existe vu la complétude de $L^2(\mathbb{R})$ et qui est indépendante du choix de la suite (φ_n) convergeant vers f . La transformation de Fourier isométrique sur \mathcal{S} vis à vis de la norme $\|\cdot\|$ se prolonge en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$.

Vu que $\Pi_{[-X, X]} f$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$ lorsque $X \rightarrow +\infty$, il en est de même des transformées de Fourier $\Phi_X = \mathcal{F}(\Pi_{[-X, X]} f)$ vers \widehat{f} . Que Φ_X soit donné par la formule (14) résulte de l'approximation d'une fonction L^2 à support borné par une suite de fonctions de Schwartz. \square

La section suivante prolonge la transformée de Fourier à l'espace \mathcal{S}' , ces prolongements étant compatibles avec les inclusions

$$\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'$$

où la dernière inclusion s'obtient en identifiant $f \in L^2(\mathbb{R})$ à la distribution régulière u_f associée (cf. Définition 1.6)

2.3. Analyse et synthèse dans \mathcal{S}'

L'identité (12) peut se récrire en terme des distributions régulières u_ψ , $u_{\widehat{\psi}}$ associées resp. à ψ et $\widehat{\psi}$

$$\langle u_{\widehat{\psi}}, \varphi \rangle = \langle u_\psi, \widehat{\varphi} \rangle,$$

où $\widehat{\varphi}$ est de Schwartz d'après la proposition 2.2. Cela amène la définition de la transformée de Fourier d'une distribution tempérée

Proposition/Définition 2.1. *Soit u une distribution tempérée. La fonctionnelle qui à une fonction de Schwartz φ associe $\langle u, \widehat{\varphi} \rangle$ est continue sur \mathcal{S} . Notée \widehat{u} et appelée transformée de Fourier de u , elle est caractérisée par*

$$\langle \widehat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

▷ Exemples 2.2.

1. Introduisons $e(f)$ l'exponentielle pure de fréquence f définie par $e(f)(t) = e^{-2j\pi ft}$, $t \in \mathbb{R}$. Alors $\widehat{\delta(a)} = u_{e(a)}$. En effet, pour $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\langle \widehat{\delta(a)}, \varphi \rangle = \langle \delta(a), \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(a) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi af} \varphi(f) df.$$

Identifiant fonction et distribution régulière associée, on écrira $\widehat{\delta(a)} = u_{e(a)}$ ou encore $\widehat{\delta(a)}(f) = e^{-2j\pi af}$, $f \in \mathbb{R}$.

2. Par un calcul analogue, pour $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\langle \widehat{e^{2j\pi f_0 t}}, \varphi \rangle = \langle e^{2j\pi f_0 t}, \widehat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{2j\pi f_0 t} \widehat{\varphi}(t) dt = \varphi(f_0) = \langle \delta(f_0), \varphi \rangle,$$

soit $\widehat{u_{e(-f_0)}} = \delta(f_0)$ ou encore $\widehat{e^{2j\pi f_0 t}}(f) = \delta(f - f_0)$. \triangleleft

Pour étudier les relations entre dérivation et transformation de Fourier comme dans la Proposition 2.1, rappelons que $t^m u$ note la distribution sur l'espace \mathbb{R} décrit par la variable t , définie dans la Proposition 1.2, alors que $f^m \widehat{u}$ est une distribution sur \mathbb{R} décrit par la variable f .

Proposition 2.5. Soit u une distribution de \mathcal{S}' . Alors, pour m entier,

$$\begin{aligned}\frac{d^m \widehat{u}}{df^m} &= (-2\pi j)^m \widehat{t^m u}, \\ f^m \widehat{u} &= (2\pi j)^{-m} \widehat{u^{(m)}}.\end{aligned}$$

Démonstration. — Il suffit de reprendre la proposition 2.1, et de la traduire en termes de distributions. \square

Proposition 2.6. La transformée de Fourier \widehat{u}_g de la distribution régulière u_g associée à la fonction intégrable g sur \mathbb{R} est la distribution régulière associée à la fonction G définie par

$$G(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi t f} g(t) dt, \quad f \in \mathbb{R},$$

qui est continue, bornée sur \mathbb{R} et convergente vers 0 à l'infini. La transformée de Fourier \widehat{u} de la distribution u à support borné est la distribution régulière u_U associée à la fonction indéfiniment dérivable $U(f) = \langle u, e^{-2j\pi t f} \rangle, f \in \mathbb{R}$.

\triangle **Remarque 2.5.** Pour la distribution à support borné u , l'évaluation $\langle u, e^{-2j\pi t f} \rangle$ est définie dans la Définition 1.1 : $e^{-2j\pi t f}$ n'est pas de Schwartz !

On écrira souvent $G = \widehat{g}$ pour la transformée de Fourier $u_G = \widehat{u}_g$, identifiant la fonction continue G et la distribution régulière u_G . On écrira pareillement $U = \widehat{u}$, identifiant fonction continue U et distribution régulière u_U : la confusion entre fonction continue et distribution régulière associée a été évoquée dans la rem. 1.3. ∇

Démonstration. — On a, avec un appel à Fubini pour le changement d'ordre d'intégration dans la troisième égalité,

$$\begin{aligned}\langle \widehat{u}_g, \varphi \rangle &= \langle u_g, \widehat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(t) \widehat{\varphi}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} g(t) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi f t} \varphi(f) df \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi f t} g(t) dt \right) \varphi(f) df = \langle u_G, \varphi \rangle\end{aligned}$$

où G est la fonction $G(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi f t} g(t) dt$, fonction continue bornée vu le théorème de convergence dominée. Ainsi la transformée de Fourier \widehat{u}_g de la distribution régulière u_g est la distribution régulière u_G . Pour la convergence de $G(f)$ vers 0 quand $f \rightarrow \infty$, on approche g par une fonction étagée en norme $\| \cdot \|_1$ ⁽³⁾.

Pour la distribution à support borné u , on a, pour $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$(15) \quad \langle \widehat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle = \langle u, \int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi t f} \varphi(f) df \rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle u, e^{-2j\pi t f} \rangle \varphi(f) df$$

où l'interversion de l'intégrale dans la dernière égalité est justifiée par un théorème de type Fubini dans le cadre des distributions. On a ainsi \widehat{u} comme distribution régulière associée à la fonction $U : f \rightarrow \langle u, e^{-2j\pi t f} \rangle$, qu'on peut dériver indéfiniment. \square

\triangleright **Exemples 2.3.**

1. Le signal carré $\Pi_{[-1,1]}$ a pour transformée de Fourier la fonction sinus cardinal, à changement d'échelle près sur la fréquence et l'amplitude,

$$\widehat{\Pi_{[-1,1]}}(f) = \int_{-1}^1 e^{-2j\pi f t} dt = 2 \frac{\sin 2\pi f}{2\pi f} = 2 \operatorname{sinc}(2\pi f).$$

⁽³⁾La théorie de Lebesgue permet de définir les espaces L^p , espaces vectoriels normés complets avec comme sous-espaces denses des espaces de fonctions classiques, comme celui des fonctions étagées.

2. L'exponentielle $e^{-|t|}$ est intégrable sur \mathbb{R} et sa transformée de Fourier est calculable aisément :

$$\begin{aligned}\widehat{e^{-|t|}}(f) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi ft} e^{-|t|} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-2j\pi ft} e^t dt + \int_0^{\infty} e^{-2j\pi ft} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{1-2j\pi} + \frac{1}{1+2j\pi} = \frac{2}{1+(2\pi f)^2}.\end{aligned}$$

3. Pour $\alpha > 0$ et $a > 0$, la fonction $f_{\alpha}(t) = \Upsilon(t)e^{-at}t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ est intégrable : sa transformée de Fourier est la fonction $(a+2j\pi f)^{-\alpha}$.

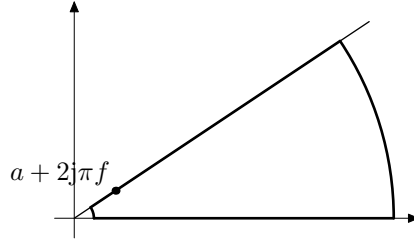


FIGURE 8 . Le contour pour calculer la transformée de Fourier $e^{-at}t^{\alpha-1}\Upsilon(t)$.

En effet, en notant par $D_{a,f}$ la demi-droite $\mathbb{R}^+(a+2j\pi f)$,

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\widehat{f_{\alpha}}(f) &= \int_0^{\infty} e^{-2j\pi ft} e^{-at}t^{\alpha-1} dt \\ &= (a+2j\pi f)^{-\alpha} \int_{D_{a,f}} e^{-z} z^{\alpha-1} dz = (a+2j\pi f)^{-\alpha} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-x} x^{\alpha-1} dx\end{aligned}$$

L'égalité des deux dernières intégrales s'obtient en intégrant la fonction $e^{-z}z^{\alpha-1}$ sur le contour de la figure 8 et en faisant tendre le rayon de l'arc du petit cercle vers 0 et le grand arc vers l'infini. \triangleleft

Théorème 2.3. La transformation \mathcal{F} de Fourier est un automorphisme continu de \mathcal{S}' . La transformée de Fourier inverse associée à $u \in \mathcal{S}$ la distribution \widehat{u}_- .

Démonstration. — Notons \check{u} la distribution \widehat{u}_- , où la notation u_- est comme dans l'exemple 1.5. La formule d'inversion de Fourier pour la fonction test $\varphi \in \mathcal{S}$ est

$$\widehat{\widehat{\varphi}_-} = \widehat{(\widehat{\varphi})_-} = \varphi.$$

Ainsi, pour une distribution tempérée u , on a

$$\langle \widehat{\check{u}}, \varphi \rangle = \langle \check{u}, \widehat{\varphi} \rangle = \langle u, \check{\widehat{\varphi}} \rangle = \langle u, \varphi \rangle,$$

soit la formule d'inversion $\widehat{\check{u}} = u$ pour les distributions tempérées.

Si $u_n \rightarrow 0$, alors, pour $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\langle \widehat{u}_n, \varphi \rangle = \langle u_n, \widehat{\varphi} \rangle \rightarrow 0,$$

et donc $\widehat{u}_n \rightarrow 0$, ce qui signifie la continuité de la transformée de Fourier sur \mathcal{S}' . \square

\triangleright **Exemple 2.4.** On a $\Upsilon(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} e^{-\varepsilon t} \Upsilon(t)$ dans l'espace \mathcal{S}' . Or la transformée de Fourier de $e^{-\varepsilon t} \Upsilon(t)$ est la fonction $(\varepsilon + 2j\pi f)^{-1}$. Ainsi

$$\widehat{\Upsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \widehat{e^{-\varepsilon t} \Upsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2j\pi} \frac{1}{f - j\varepsilon},$$

et on notera simplement $\widehat{\Upsilon} = (2j\pi)^{-1}(f - j0^+)^{-1}$.

Précisons la distribution $1/(t - j0^+)$ par son action sur une fonction test $\varphi \in \mathcal{S}$.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{t - j\varepsilon} dt = \int_{|t| \geq 1} \frac{\varphi(t)}{t - j\varepsilon} dt + \int_{|t| \leq 1} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - j\varepsilon} dt + \varphi(0) \int_{|t| \leq 1} \frac{1}{t - j\varepsilon} dt$$

Or

$$\int_{|t| \leq 1} \frac{dt}{t - j\varepsilon} = \int_0^1 \left(\frac{1}{t - j\varepsilon} + \frac{1}{-t - j\varepsilon} \right) dt = \int_0^1 \frac{2j\varepsilon}{t^2 + \varepsilon^2} dt = \int_0^{1/\varepsilon} \frac{2j}{u^2 + 1} du \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} j\pi$$

On en déduit

$$\left\langle \frac{1}{t - j0^+}, \varphi \right\rangle = \int_{|t| \geq 1} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{|t| \leq 1} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} dt + j\pi\varphi(0).$$

On a pareillement

$$\left\langle \frac{1}{t + j0^+}, \varphi \right\rangle = \int_{|t| \geq 1} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{|t| \leq 1} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} dt - j\pi\varphi(0).$$

et par suite

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{t + j0^+} - \frac{1}{t - j0^+}, \varphi \right\rangle &= -2j\pi\varphi(0), \\ \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{t + j0^+} + \frac{1}{t - j0^+}, \varphi \right\rangle &= \int_{|t| \geq 1} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{|t| \leq 1} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} dt \\ &= \int_{|t| \geq 1} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon \leq |t| \leq 1} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} dt \\ &= \int_{|t| \geq 1} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon \leq |t| \leq 1} \frac{\varphi(t)}{t} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon \leq |t|} \frac{\varphi(t)}{t} dt, \end{aligned}$$

la distribution du dernier membre étant connue sous le nom de *valeur principale de Cauchy*

$$\left\langle \text{vp} \left(\frac{1}{t} \right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|t| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt.$$

Ainsi

$$\text{vp} \left(\frac{1}{t} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t + j0^+} + \frac{1}{t - j0^+} \right), \quad \delta(t) = \frac{1}{2j\pi} \left(\frac{1}{t - j0^+} - \frac{1}{t + j0^+} \right).$$

En utilisant la transformée de Fourier inverse du théorème 2.3, on obtient

$$\widehat{\text{vp}(1/t)} = \frac{1}{2} \left(\widehat{\frac{1}{t + j0^+}} + \widehat{\frac{1}{t - j0^+}} \right) = j\pi \left(\widehat{\Upsilon} - \widehat{\Upsilon_-} \right) = j\pi (\Upsilon(-f) - \Upsilon(f)) = -j\pi \text{sgn } f. \triangleleft$$

2.4. En plusieurs variables

La définition de la transformation de Fourier en plusieurs variables, de fonctions test ou de distributions tempérées, est une généralisation directe de la théorie en une variable. Pour une fonction de Schwartz φ de la variable $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, sa transformée de Fourier est la fonction $\widehat{\varphi}$ de la variable $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^n$ définie par

$$\widehat{\varphi}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2j\pi(t_1 f_1 + \dots + t_n f_n)} \varphi(t) dt_1 \dots dt_n, \quad f \in \mathbb{R}^n.$$

La formule d'inversion est simplement

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2j\pi(t_1 f_1 + \dots + t_n f_n)} \widehat{\varphi}(f) df_1 \dots df_n, \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Si les valeurs $\varphi(t)$ de la fonction φ ne dépendent que de la longueur $\|t\|_2 = \sqrt{t_1^2 + \dots + t_n^2}$ (on dit alors que φ est une fonction *radiale*), on montre qu'il en est de même pour les valeurs $\widehat{\varphi}(f)$, qui ne dépendent que de $\|f\|_2 = \sqrt{f_1^2 + \dots + f_n^2}$. Contentons-nous d'examiner le cas de la dimension 2. Soit J_0 la fonction de Bessel définie sur \mathbb{R} par la représentation intégrale

$$(16) \quad J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \cos \theta) d\theta, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Proposition 2.7. *Soit φ une fonction indéfiniment dérivable, à décroissance rapide et radiale, i. e. $\varphi(t) = \varphi_0(\|t\|_2)$, sur \mathbb{R}^2 . Alors, avec $\|f\|_2 = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$,*

$$\widehat{\varphi}(f) = 2\pi \int_0^\infty r J_0(2\pi\|f\|_2 r) \varphi_0(r) dr, \quad f = (f_1, f_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Démonstration. — Introduisons les coordonnées polaires $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi)$ telles que $(t_1, t_2) = r(\cos \theta, \sin \theta)$ avec $r = \|t\|_2 = (t_1^2 + t_2^2)^{1/2}$ et pour lesquelles $dt_1 dt_2 = r dr d\theta$. Si $f = (f_1, f_2) = \|f\|_2(\cos \alpha, \sin \alpha)$ avec $\|f\|_2 = (f_1^2 + f_2^2)^{1/2}$, alors

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(f) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2j\pi(f_1 t_1 + f_2 t_2)} \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-2j\pi\|f\|_2 r \cos(\theta-\alpha)} \varphi_0(r) r dr d\theta = \int_0^\infty r \varphi_0(r) \left[\int_0^{2\pi} e^{-2j\pi\|f\|_2 r \cos(\theta-\alpha)} d\theta \right] dr \\ &= \int_0^\infty r \varphi_0(r) \left[\int_0^{2\pi} e^{-2j\pi\|f\|_2 r \cos \theta} d\theta \right] dr = \int_0^\infty r \varphi_0(r) \left[\int_{-\pi}^\pi e^{-2j\pi\|f\|_2 r \cos \theta} d\theta \right] dr \\ &= 2 \int_0^\infty r \varphi_0(r) \left[\int_0^\pi \cos(2\pi\|f\|_2 r \cos \theta) d\theta \right] dr = 2\pi \int_0^\infty r \varphi_0(r) J_0(2\pi\|f\|_2 r) dr. \quad \square \end{aligned}$$

2.5. Exercices

1. Soient $a, b > 0$ avec $b > a$. Calculer les transformées de Fourier des fonctions définies pour $t \in \mathbb{R}$ suivant

$$\Upsilon(t-a) - \Upsilon(t-b), \quad e^{-a|t|}, \quad t^k e^{-at} \Upsilon(t), \quad \frac{1}{a^2 + t^2}, \quad e^{-at^2}.$$

2. Soit, pour a réel, la fonction E_a définie par

$$E_a(t) = \begin{cases} e^{2j\pi at} & \text{si } t \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer la transformée de Fourier de E_a .

En utilisant la relation de Plancherel, déduire pour n, m entiers distincts l'identité

$$\int_{-\infty}^\infty \operatorname{sinc}(2\pi(f-n)) \operatorname{sinc}(2\pi(f-m)) df = 0.$$

3. (a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction h_0 définie par

$$h_0(t) = e^{-\pi t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (b) Soit P l'opérateur qui à φ associe la fonction $P[\varphi]$ définie par

$$P[\varphi](t) = \varphi'(t) - 2\pi t\varphi(t).$$

Exprimer la transformée de Fourier de $P[\varphi]$ en fonction de celle de φ

- (c) Soit $(h_n)_{n \geq 0}$ la suite de fonctions vérifiant

$$h_{n+1} = P[h_n], \quad n \geq 0,$$

avec h_0 donnée dans la première question. Montrer qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ telle que

$$\mathcal{F}h_n = \lambda_n h_n, \quad n \geq 0.$$

4. (a) Pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$, les fonctions $\tau_{t_0}\varphi$ et $H_a\varphi$ sont définies par

$$\tau_{t_0}\varphi(t) = \varphi(t - t_0), \quad H_a\varphi(t) = \varphi(t/a), \quad t \in \mathbb{R}.$$

si φ est une fonction alors que les distributions $\tau_{t_0}u$ et $H_a u$ sont définies par

$$\langle \tau_{t_0}u, \varphi \rangle = \langle u, \tau_{-t_0}\varphi \rangle, \quad \langle H_a u, \varphi \rangle = \langle u, |a|H_{a^{-1}}\varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

si u est une distribution.

Montrer que, si u_ψ est la distribution régulière associée à la fonction test ψ ,

$$\tau_{t_0}u_\psi = u_{\tau_{t_0}\psi}, \quad H_a u_\psi = u_{H_a\psi}.$$

Montrer que si u est une distribution,

$$\mathcal{F}(\tau_{t_0}u) = e^{-2j\pi f t_0} \mathcal{F}u, \quad \mathcal{F}(H_a u) = |a|H_{a^{-1}}(\mathcal{F}u).$$

5. Soit $f_0 \in \mathbb{R}$. Calculer les transformées de Fourier des distributions suivantes

$$e^{-2j\pi t f_0}, \quad t^k, \quad t^k e^{-2j\pi t f_0}, \quad \frac{1}{t^2 - 2t + 10}.$$

6. Calculer la transformée de Fourier Φ de la fonction φ définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{si } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Quelle forme prend l'identité de Plancherel pour le couple (φ, Φ) ?

7. Soit a avec $0 < a < \pi$ et φ_a la fonction définie par

$$\varphi_a(t) = \frac{\text{sh } at}{\text{sh } \pi t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

En utilisant le théorème des résidus, montrer que

$$\mathcal{F}\varphi_a(f) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-2n\pi|f|} \sin(na), \quad f \in \mathbb{R}.$$

En utilisant $2j \sin(z) = e^{jz} - e^{-jz}$, montrer que

$$\mathcal{F}\varphi_a(f) = \frac{\sin a}{\text{ch } \pi f + \cos a}, \quad f \in \mathbb{R}$$

et en déduire que

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{2 \text{ch}(\pi t/2)}\right)(f) = \frac{1}{\text{ch } \pi f}, \quad f \in \mathbb{R}.$$

CHAPITRE 3

CONVOLUTION

Le produit de convolution permet d'exprimer algébriquement, puis de résoudre, certaines équations : des équations différentielles, des systèmes de filtrage, ... Par ailleurs, la transformation de Fourier transforme un produit de convolution de deux fonctions en le produit classique de leurs transformées de Fourier, lorsque toutes ces opérations sont légitimes. C'est dire l'intérêt de ce produit entre deux fonctions, produit non local qui tient compte de la définition de chaque fonction globalement sur toute la droite réelle.

Après avoir défini le produit de convolution pour des fonctions dans l'espace de Schwartz \mathcal{S} , on verra que le produit de convolution peut être aussi défini parfois pour des distributions vérifiant des conditions de support convenables : l'impossibilité à définir le produit de convolution de deux distributions quelconques correspond à celle d'étendre le produit habituel des fonctions aux distributions. Un dernier paragraphe contient un exemple de résolution d'équation différentielle.

3.1. Convolution dans \mathcal{S}

Définition 3.1. Soient φ_1, φ_2 deux fonctions de Schwartz. Leur produit de convolution est la fonction, notée $\varphi_1 * \varphi_2$ définie par

$$\varphi_1 * \varphi_2(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(\tau) \varphi_2(t - \tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

L'intégrale précédente est convergente : cela sera prouvé au cours de la démonstration de la proposition suivante.

▷ **Exemple 3.1.** Pour la gaussienne γ_1 telle que $\gamma_1(t) = e^{-t^2}, t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \gamma_1 * \gamma_1(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\tau^2} e^{-(t-\tau)^2} d\tau = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\tau^2 - t^2 + 2t\tau} d\tau = e^{-t^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-2(\tau-t/2)^2 + t^2/2} d\tau \\ &= e^{-t^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-2u^2} du = \sqrt{\pi/2} e^{-t^2/2} \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Proposition 3.1. Soient φ_1, φ_2 deux fonctions de Schwartz. Leur produit de convolution est de Schwartz. Le produit est commutatif et associatif, i. e.

$$\varphi_1 * \varphi_2 = \varphi_2 * \varphi_1, \quad \varphi_1 * (\varphi_2 * \varphi_3) = (\varphi_1 * \varphi_2) * \varphi_3, \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathcal{S}.$$

Démonstration. — En utilisant l'inégalité

$$(1 + |\tau|)(1 + |t - \tau|) \geq 1 + |\tau| + |t - \tau| + |\tau||t - \tau| \geq 1 + |\tau| + |t - \tau| \geq 1 + |t|,$$

on obtient

$$\begin{aligned} |\varphi_1 * \varphi_2(t)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(\tau) \varphi_2(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\|\varphi_1\|_{0,m+2}}{(1 + |\tau|)^{m+2}} \frac{\|\varphi_2\|_{0,m}}{(1 + |t - \tau|)^m} d\tau \\ (17) \quad &\leq \frac{\|\varphi_1\|_{0,m+2} \|\varphi_2\|_{0,m}}{(1 + |t|)^m} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + |\tau|)^2} d\tau. \end{aligned}$$

Ainsi $\varphi_1 * \varphi_2$ est à décroissance rapide, comme ses dérivées qui sont des produits de convolution, obtenus en dérivant sous l'intégrale

$$\frac{d^k(\varphi_1 * \varphi_2)}{dt^k}(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(\tau) \frac{d^k \varphi_2}{dt^k}(t - \tau) d\tau = \varphi_1 * \frac{d^k \varphi_2}{dt^k}(t).$$

La fin de la proposition s'obtient par des changements de variable ($\tau = t - \tau'$, puis $\tau'' = \tau' + \tau$) et Fubini

$$\begin{aligned} \varphi_1 * \varphi_2(t) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(\tau) \varphi_2(t - \tau) d\tau = \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(t - \tau') \varphi_2(\tau') d\tau' = \varphi_2 * \varphi_1(t), \\ \varphi_1 * (\varphi_2 * \varphi_3)(t) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(\tau) \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_2(\tau') \varphi_3(t - \tau - \tau') d\tau' \right) d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_1(\tau) \varphi_2(\tau') \varphi_3(t - \tau - \tau') d\tau' d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_1(\tau) \varphi_2(\tau'' - \tau) \varphi_3(t - \tau'') d\tau' d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_1(\tau) \varphi_2(\tau'' - \tau) d\tau \right) \varphi_3(t - \tau'') d\tau'' = (\varphi_1 * \varphi_2) * \varphi_3(t). \quad \square \end{aligned}$$

3.2. Convolution dans \mathcal{S}'

Reprenons, pour $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}$, la définition du produit $\varphi_1 * \varphi_2$ considéré comme distribution régulière : pour la fonction test $\varphi \in \mathcal{S}$, on a donc

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1 * \varphi_2, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_1(\tau) \varphi_2(t - \tau) d\tau \right) \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_1(\tau) \varphi_2(t - \tau) \varphi(t) d\tau dt \\ (18) \quad &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_1(\tau) \varphi_2(\tau') \varphi(\tau + \tau') d\tau d\tau' = \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(\tau) \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_2(\tau') \varphi(\tau' + \tau) d\tau' \right) d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(t) \langle \varphi_2, \tau_{-t} \varphi \rangle dt \end{aligned}$$

Dans la dernière égalité, la distribution φ_2 est évaluée sur la fonction test $\tau_{-t} \varphi$: La fonction $t \rightarrow \langle \varphi_2, \tau_{-t} \varphi \rangle$ est indéfiniment dérivable, mais n'est pas à décroissance rapide en général.

Proposition/Définition 3.1. Soient u_1 et $u_2 \in \mathcal{S}'$.

Si u_2 est à support borné, la convolée $u_1 * u_2$ est définie par

$$(19) \quad \langle u_1 * u_2, \varphi \rangle = \langle u_1, \langle u_2, \tau_{-t} \varphi \rangle \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

comme distribution de \mathcal{S}' . Si u_1 et u_2 sont à support borné, $u_1 * u_2$ l'est aussi et $u_1 * u_2 = u_2 * u_1$.

Démonstration. — On admet ici que, si u_2 est à support borné, la fonction $U_2(\varphi)$ définie par $U_2(\varphi)(t) = \langle u_2, \tau_{-t} \varphi \rangle, t \in \mathbb{R}$ est de Schwartz, avec l'application $\varphi \in \mathcal{S} \rightarrow U_2(\varphi) \in \mathcal{S}$ continue : la distribution $u_1 * u_2$ est alors bien définie comme $\langle u_1 * u_2, \varphi \rangle = \langle u_1, U_2(\varphi) \rangle$.

Supposons $\text{supp } u_i \subset [-A, A]$ pour $i = 1, 2$. Pour que $\langle u_1 * u_2, \varphi \rangle$ soit non nul, il est nécessaire que $U_2(\varphi)(t) \neq 0$ pour des $t \in [-A, A]$. Or, si $\text{supp } \varphi \subset \mathbb{R} \setminus [-2A - 1, 2A + 1]$ et $|t| \leq A$, $\text{supp } \tau_{-t} \varphi \cap [-A, A] = \emptyset$ et donc $U_2(\varphi)(t) = 0$. Ainsi $u_1 * u_2$ est à support borné dans $[-2A - 1, 2A + 1]$. On admet la commutativité $u_1 * u_2 = u_2 * u_1$ vérifiée dans l'exemple suivant. \square

▷ **Exemple 3.2.** Pour toute $u \in \mathcal{S}'$,

$$\delta * u = u * \delta = u, \quad \delta^{(k)} * u = u * \delta^{(k)} = u^{(k)}.$$

En effet, pour $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} \langle u * \delta^{(k)}, \varphi \rangle &= \langle u, \langle \delta^{(k)}, \tau_{-t}\varphi \rangle \rangle = \langle u, (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \varphi \rangle = \langle \frac{d^k u}{dt^k}, \varphi \rangle, \\ \langle \delta^{(k)} * u, \varphi \rangle &= \langle \delta^{(k)}, \langle u, \tau_{-t}\varphi \rangle \rangle = (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \langle u, \tau_{-t}\varphi \rangle(0) = (-1)^k \langle u, \frac{d^k}{dt^k} (\tau_{-t}\varphi) \rangle(0) \\ &= (-1)^k \langle u, \tau_{-t} \frac{d^k \varphi}{dt^k} \rangle(0) = (-1)^k \langle u, \frac{d^k \varphi}{dt^k} \rangle = \langle u^{(k)}, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad \triangleleft$$

Un autre cas où le produit de convolution est possible est celui où une des deux distributions est dans \mathcal{S} .

Proposition 3.2. Soient u_1 et $u_2 \in \mathcal{S}'$. Si u_2 est dans \mathcal{S} , la convolée $u_1 * u_2$ est définie par

$$\langle u_1 * u_2, \varphi \rangle = \langle u_1, (u_2)_- * \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

comme distribution de \mathcal{S}' .

\triangle **Remarque 3.1.** L'exemple 1.5 a défini la distribution u_- déduite de la distribution u en inversant le temps t en $-t$. ∇

Démonstration. — On reprend la deuxième égalité de (18)

$$\langle \varphi_1 * \varphi_2, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi_1(-\tau) [\varphi_2 * \varphi_-](\tau) d\tau$$

qui justifie la définition de la proposition. La fonctionnelle $u_1 * u_2$ est continue sur \mathcal{S} , vu la majoration de $u_2 * \varphi$ dans (17). \square

On peut définir le produit $u_1 * u_2$

- si les deux distributions sont à support dans \mathbb{R}^+
 - si les deux distributions sont des fonctions intégrables,
- et alors, le produit est à support dans \mathbb{R}^+ (intégrable resp.).

Proposition 3.3. Le sous-espace $L^1(\mathbb{R})$ des fonctions intégrables de \mathcal{S}' est stable pas convolution. Il en est de même pour l'espace \mathcal{S}'_{\pm} des distributions à support dans $\{\pm t \geq 0\}$.

Esquisse de démonstration. — Pour deux fonctions intégrables φ et ψ , la majoration

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\varphi * \psi(t)| dt &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(s)| |\psi(t-s)| ds dt \leq \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |\psi(t-s)| dt \right] |\varphi(s)| ds \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |\psi(u)| du \int_{\mathbb{R}} |\varphi(s)| ds \end{aligned}$$

donne l'intégrabilité de $\varphi * \psi$. Pour des fonctions φ, ψ à support dans \mathbb{R}^+ ,

$$\varphi * \psi(t) = \int_0^t \varphi(s) \psi(t-s) ds$$

est bien défini : la définition pour les distributions en résulte. \square

3.3. Convolution et transformation de Fourier

La transformation de Fourier échange produit de convolution et multiplication usuelle.

Théorème 3.1. Soit φ et ψ de Schwartz. Alors

$$\widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi} \widehat{\psi}, \quad \widehat{\varphi \psi} = \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}.$$

Démonstration. — L'usage de Fubini est justifié aisément : pour $g \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi * \psi}(f) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi t f} \varphi * \psi(t) dt = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2j\pi t f} \varphi(s) \psi(t-s) ds dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi s f} \varphi(s) \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi(t-s)f} \psi(t-s) dt \right] ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi s f} \varphi(s) \widehat{\psi}(f) ds = \widehat{\varphi}(f) \widehat{\psi}(f).\end{aligned}$$

En posant $\Phi = \widehat{\varphi}$, $\Psi = \widehat{\psi}$, on a $\widehat{\Phi\Psi}(-f) = \check{\Phi} * \check{\Psi}(f)$, $f \in \mathbb{R}$ soit

$$\widehat{\Phi\Psi}(-f) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\Phi}(-\eta) \widehat{\Psi}(-(f-\eta)) d\eta = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\Phi}(\eta) \widehat{\Psi}(-f-\eta) d\eta = \widehat{\Phi} * \widehat{\Psi}(-f),$$

et la deuxième formule. □

▷ **Exemple 3.3.** La transformée de Fourier de $e^{-t^2/(2\sigma^2)}/(\sqrt{2\pi}\sigma)$ est $e^{-2\sigma^2\pi^2 f^2}$. Du produit

$$e^{-\sigma^2 f^2} e^{-\tau^2 f^2} = e^{-(\sigma^2 + \tau^2) f^2}$$

résulte le produit de convolution

$$\frac{\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma} * \frac{\exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\tau} = \frac{\exp\left(-\frac{t^2}{2(\tau^2 + \sigma^2)}\right)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad \triangleleft$$

L'échange du produit de convolution en produit classique, et réciproquement, par la transformation de Fourier sur les produits est aussi valable sur les produits de convolution de distributions, à supposer qu'ils soient bien définis. Cette relation, renforcée par la formule d'inversion de Fourier dans \mathcal{S}' ,

$$\widehat{u_1 * u_2}(f) = \widehat{u_1}(f) \widehat{u_2}(f), \quad f \in \mathbb{R},$$

peut être utilisée pour donner la définition du produit de convolution de certaines distributions tempérées dont le produit des transformées de Fourier peut être défini comme distribution dans \mathcal{S}' .

▷ **Exemples 3.4.**

1. Le filtre passe-bas qui consiste à retenir les fréquences f avec $|f| \leq f_0$ dans le signal φ , i. e. à multiplier $\widehat{\varphi}(f)$ par la fonction caractéristique $\Pi_{[-f_0, f_0]}$, revient à convoler φ par la fonction oscillante $2f_0 \operatorname{sinc}(2\pi f_0 t) = \widehat{\Pi_{[-f_0, f_0]}}(t)$.
2. La transformation de Fourier de $u * \delta^{(m)}$ est $\widehat{u}(f) \widehat{\delta^{(m)}}(f) = (2j\pi f)^m \widehat{u}(f) = \widehat{u^{(m)}}(f)$: par unicité de la transformée de Fourier, on a donc $u * \delta^{(m)} = u^{(m)}$.
3. La transformation de Fourier de $a/(a^2 + t^2)$ est $\pi e^{-2a\pi|f|}$. En résulte

$$\frac{a}{a^2 + t^2} * \frac{b}{b^2 + t^2} = \pi \frac{a+b}{(a+b)^2 + t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. La transformation de Fourier de $e^{-at} t^{\alpha-1} / \Gamma(\alpha) \Upsilon(t)$ est $(a + 2j\pi f)^{-\alpha}$. Ainsi

$$\frac{e^{-at} t^{\alpha-1} \Upsilon(t)}{\Gamma(\alpha)} * \frac{e^{-at} t^{\beta-1} \Upsilon(t)}{\Gamma(\beta)} = \frac{e^{-at} t^{\alpha+\beta-1} \Upsilon(t)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad \triangleleft$$

3.4. Solutions tempérées d'équations différentielles

Soit $\omega > 0$ et g distribution à support borné. L'équation différentielle, où on cherche $y \in \mathcal{S}'$,

$$(20) \quad y'' - \omega^2 y = g$$

peut s'écrire d'après l'exemple 3.2 en termes de convolution suivant

$$(21) \quad (\delta'' - \omega^2 \delta) * y = g.$$

Pour la résoudre, il suffit donc d'avoir une distribution E telle que

$$E'' - \omega^2 E = E * (\delta'' - \omega^2 \delta) = \delta.$$

En effet, en convolant les deux membres de (21) par E à gauche, et en supposant que l'associativité soit licite, on obtient

$$E * g = E * ((\delta'' - \omega^2 \delta) * y) = (E * (\delta'' - \omega^2 \delta)) * y = \delta * y = y.$$

On vérifie que $y_g = E * g$ est bien solution de (20)

$$(\delta'' - \omega^2 \delta) * (E * g) = ((\delta'' - \omega^2 \delta) * E) * g = (E'' - \omega^2 E) * g = \delta * g = g.$$

Définition 3.2. La distribution $E \in \mathcal{S}'$ est dite *solution élémentaire* de l'équation différentielle $y'' - \omega^2 y = g$ si $E'' - \omega^2 E = \delta$.

L'équation $E'' - \omega^2 E = \delta$ d'inconnue $E \in \mathcal{S}'$ est équivalente à $-4\pi^2 f^2 \widehat{E} - \omega^2 \widehat{E} = 1$ soit $\widehat{E} = -(\omega^2 + 4\pi^2 f^2)^{-1}$. Ainsi d'après le deuxième exemple de la liste 2.3, on a $E(t) = -e^{-\omega|t|}/2\omega$, et c'est l'unique solution dans \mathcal{S}' de l'équation $E'' - \omega^2 E = \delta$. La solution de (20) est donc, si g est une fonction,

$$y_g(t) = - \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\omega|\tau-t|}}{2\omega} g(\tau) d\tau.$$

L'équation $E'' + \omega^2 E = \delta$ n'est pas résolue aussi facilement dans \mathcal{S}' : elle est équivalente à l'équation $\widehat{E}(f)(-4\pi^2 f^2 + \omega^2) = 1$ qui, si elle a des solutions, n'a pas de solution unique dans \mathcal{S}' . La transformée de Laplace du chapitre suivant permet d'obtenir une solution élémentaire, qui n'est pas une distribution tempérée mais une distribution produit d'une exponentielle et d'une distribution tempérée, de (20) (cf. Section 4.4).

3.5. Exercices

1. Calculer $e^{-t^2} * e^{-2t^2}$.
2. Soit φ définie par $\varphi(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$ et $\psi = \varphi * \varphi$.
 - (a) Montrer que ψ est paire.
 - (b) Montrer que $\psi(t) = (1+t)e^{-t}$ si $t \geq 0$.
 - (c) Calculer la transformée de Fourier inverse de la fonction $(1+f^2)^{-2}$, $f \in \mathbb{R}$. Expliquer le lien avec la question précédente.
3. Soit χ la fonction caractéristique de l'intervalle $[-1/2, 1/2]$.
 - (a) Calculer $\chi * \chi$ et $\mathcal{F}(\chi * \chi * \chi)$.
 - (b) Pour $\varepsilon > 0$, soit χ_ε définie par $\chi_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1} \chi(\varepsilon^{-1}t)$, $t \in \mathbb{R}$ et P par $P(t) = t^3 - t$, $t \in \mathbb{R}$. Calculer $\chi_\varepsilon * P$ et montrer que $\chi_\varepsilon * P \rightarrow P$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$

4. Soit ρ définie par $\rho(t) = \pi^{-1/2}e^{-t^2}$, $t \in \mathbb{R}$ et ρ_ε par $\rho_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\rho(\varepsilon^{-1}t)$, $t \in \mathbb{R}$.
Montrer que, pour $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \rho_\varepsilon * \varphi(x) = \varphi(x)$$

En déduire que, dans \mathcal{S}' ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \rho_\varepsilon = \delta.$$

5. On considère l'équation de la chaleur

$$(22) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R},$$

avec les conditions au bord

$$(23) \quad u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La fonction u définie continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ est supposée différentiable sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ et telle que, à t fixé, la fonction $u_t : x \rightarrow u(t, x)$ est de Schwartz.

Soit U définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ par

$$U(t, X) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi Xx} u(t, x) dx, \quad t \geq 0, X \in \mathbb{R}.$$

- (a) Montrer que si u vérifie (22), alors, en supposant la dérivation par rapport à t sous le signe d'intégration légitime, U vérifie

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t, X) + 4\pi^2 X^2 U(t, X) = 0, \quad t > 0, X \in \mathbb{R}.$$

En déduire $U(t, X) = e^{-4\pi^2 X^2 t} \widehat{u}_0(X)$, puis que

$$(24) \quad u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/(4t)} u_0(y) dy, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que la fonction définie (24) vérifie bien l'équation (22).

- (b) Discuter la résolution de (22) si u_0 est dans \mathcal{S}' . Montrer en particulier que si u_0 est dans $L^2(\mathbb{R})$, alors pour tout $t > 0$, la fonction u_t est de carré intégrable et indéfiniment dérivable.

6. Soit u une distribution tempérée vérifiant

$$tu'' + u' - 2\pi(1 + 2\pi t)u = 0.$$

- (a) Montrer que sa transformée de Fourier $v = \widehat{u}$ vérifie

$$(1 + f^2)v' + (f - j)v = 0.$$

On admet que v est alors de la forme

$$v(f) = C \frac{\exp(j \arctg f)}{\sqrt{1 + f^2}},$$

pour une certaine constante C .

- (b) Montrer que la distribution u est une fonction de carré intégrable, ainsi que la fonction $t \in \mathbb{R} \rightarrow tu(t)$. En déduire que la fonction u est intégrable.

- (c) Montrer que

$$\left[\int_{\mathbb{R}} u(t) dt \right]^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt.$$

CHAPITRE 4

TRANSFORMATION DE LAPLACE

La transformation de Fourier n'a été définie que pour des distributions tempérées : cela écarte la fonction $e^t\Upsilon(t)$ par exemple, à laquelle on ne sait pas associer de distribution tempérée comme on l'a fait pour des fonctions tempérées (cf. Rem. 1.3). La transformée de Laplace permet de prendre en compte des fonctions de ce type.

4.1. Fonctions lisses à croissance au plus exponentielle

On introduit une condition double portant sur des fonctions f définies sur \mathbb{R} : la première est de support, la seconde impose une condition de type *croissance sous-exponentielle*.

Condition (*) La fonction f définie sur \mathbb{R} est dite satisfaire la condition (*) si il existe des constantes T_f, C_f , dépendant de f , telle que

- le support de f est inclus dans une demi-droite $[T_f, \infty)$,
- la fonction $e^{-C_f t} f$ est intégrable.

On peut alors définir la transformée de Laplace, comme cela sera justifié dans la Prop. 4.1.

Définition 4.1. Soit f une fonction vérifiant la condition (*). La transformée de Laplace de f est la fonction $\mathcal{L}f$, notée parfois F , de la variable complexe \mathbf{p} dans le demi-plan $\{\Re \mathbf{p} > C_f\}$ définie par

$$(25) \quad \mathcal{L}f(\mathbf{p}) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-\mathbf{p}t} dt.$$

Δ **Remarque 4.1.** Souvent, et ce qui est fait dans la table de l'appendice C, on ne considère que des fonctions f à support dans $[0, \infty)$. Ces fonctions correspondent aux signaux causaux : la valeur $x * f(t) = \int_0^\infty f(u)x(t-u)du$ en un temps t de la convolée de x par un signal causal f ne dépend que des valeurs de x antérieures au temps t . L'espace des signaux causaux intégrables est stable par convolution. ∇

La transformée de Laplace est linéaire⁽¹⁾ : $\mathcal{L}(f_1 + f_2) = \mathcal{L}f_1 + \mathcal{L}f_2$ est définie holomorphe sur le demi-plan $\{\Re \mathbf{p} \geq \sup(C_{f_1}, C_{f_2})\}$.

\triangleright **Exemples 4.1.**

1. Soit $c \in \mathbb{C}$. Alors $\mathcal{L}(e^{ct}\Upsilon(t))(\mathbf{p}) = (\mathbf{p} - c)^{-1}$, avec intégrale convergente pour $\Re \mathbf{p} > \Re c$.
2. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Alors $\mathcal{L}(\cos \omega t \Upsilon(t))(\mathbf{p}) = \mathbf{p}(\mathbf{p}^2 + \omega^2)^{-1}$ et $\mathcal{L}(\sin \omega t \Upsilon(t))(\mathbf{p}) = \omega(\mathbf{p}^2 + \omega^2)^{-1}$ pour $\Re \mathbf{p} > 0$.
3. $\mathcal{L}(e^{-t^2}\Upsilon(t))(\mathbf{p})$ est convergente pour tout complexe \mathbf{p} .
4. $\mathcal{L}((1+t^2)^{-1}\Upsilon(t))(\mathbf{p})$ est convergente sur $\{\Re \mathbf{p} \geq 0\}$. \triangleleft

⁽¹⁾On vérifie que l'espace des fonctions vérifiant la condition (*) est un espace vectoriel.

△ **Remarque 4.2.** Si f est intégrable, la transformée de Laplace $\mathcal{L}f$ peut s'exprimer en terme de transformée de Fourier suivant

$$(26) \quad \mathcal{L}f(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}(e^{-\sigma t}f)(\omega/(2\pi)).$$

La transformée de Laplace a l'avantage sur la transformée de Fourier de permettre l'utilisation des outils de la variable complexe. D'autre part, si la gaussienne γ_0 a une transformation de Fourier prolongeable à tout le plan des fréquences complexes f , ce n'est pas nécessairement le cas pour une fonction de Schwartz : pour la fonction φ définie par $\varphi(t) = e^{-(1+t^2)^{1/4}}$, $t \in \mathbb{R}$, équivalente à $e^{-\sqrt{|t|}}$, $t \rightarrow \infty$, l'intégrant de Fourier $e^{2\pi ft}\varphi(t)$ n'est pas absolument convergent pour $f \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; il est probable que $\widehat{\varphi}(f)$ ne soit pas prolongeable pour des f non réels. ▽

Proposition 4.1. Soit f vérifiant la condition (*).

- La transformée de Laplace $\mathcal{L}f$ est holomorphe sur le demi-plan $\{\Re p > C_f\}$.
- La fonction $t^m f(t)$ vérifie la condition (*) et

$$\mathcal{L}(t^m f)(p) = (-1)^m \frac{d^m \mathcal{L}f}{dp^m}(p).$$

- Si $t_0 \in \mathbb{R}$, la fonction décalée $\tau_{t_0}f$ vérifie encore la condition (*) et

$$\mathcal{L}(\tau_{t_0}f)(p) = e^{-t_0 p} \mathcal{L}f(p).$$

Démonstration. — La dérivation dans l'intégrale est justifiée, car, pour $\Re p > C_f + \varepsilon$,

$$|t|^m |e^{-tp} f(t)| \leq |t|^m |e^{-C_f t} f(t)| e^{-(C_f - \Re p)t} \leq |t|^m |e^{-\varepsilon t} e^{-C_f t} f(t)| \leq M_m(\varepsilon, T_f) e^{-C_f t} |f(t)|$$

où $M_m(\varepsilon, T_f) = \sup_{t \geq T_f} (t^m e^{-\varepsilon t})$, ce qui donne la domination de $|t|^m |e^{-tp} f(t)|$ par une fonction intégrable pour $\Re p$ suffisamment grand : il suffit de la domination avec $m = 1$ pour justifier la dérivation en tant que fonction holomorphe sous le signe d'intégration de $\mathcal{L}(f)$. La dernière propriété résulte du changement de variable $\tilde{t} = t - t_0$

$$(27) \quad \mathcal{L}(\tau_{t_0}f)(p) = \int_{\mathbb{R}} f(t - t_0) e^{-pt} dt = e^{-pt_0} \int_{\mathbb{R}} f(t - t_0) e^{-p(t-t_0)} dt = e^{-pt_0} \mathcal{L}f(p). \quad \square$$

▷ **Exemple 4.2.** On a donc, pour n entier,

$$\mathcal{L}\left(e^{ct} \frac{t^n}{n!} \Gamma(t)\right)(p) = \frac{1}{(p - c)^{n+1}}, \quad \Re s > \Re c. \quad \triangleleft$$

La transformée de Laplace se comporte bien relativement à la convolution

Proposition 4.2. Soient f et g vérifiant la condition (*). Alors $f * g$ vérifie la condition (*) et

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$$

Démonstration. — Pour $t < T_f + T_g$ le produit de convolution $f * g(t)$ est nul, alors que pour $t \geq T_f + T_g$,

$$f * g(t) = \int_{T_f}^{T_g} f(u)g(t - u)du.$$

En outre

$$e^{-Ct}(f * g)(t) = \int_{T_f}^{T_g} e^{-Cu} f(u) e^{-C(t-u)} g(t - u) du = [e^{-C \cdot} f * e^{-C \cdot} g](t)$$

est intégrable pour C suffisamment grand vu la stabilité de l'espace des fonctions intégrables L^1 (cf. Proposition 3.3) et alors

$$\mathcal{L}(f * g)(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-pt}(f * g)(t) dt = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-pu} f(u) e^{-p(t-u)} g(t - u) dudt = \mathcal{L}f(p)\mathcal{L}g(p),$$

les intégrabilités étant vérifiées en examinant la convergence des intégrales pour les modules des fonctions à intégrer. \square

Vu la relation (26) avec la transformée de Fourier, il est naturel d'introduire la transformée de Laplace inverse $\mathcal{L}^{-1}F$ d'une fonction F définie sur un demi-plan $\{\Re p > C\}$ par l'intégrale, à supposer qu'elle existe

$$\mathcal{L}^{-1}F(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_{V_h} e^{pt} F(p) dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(h+ju)t} F(h+ju) du,$$

où l'intégration dans la deuxième intégrale a lieu sur la droite verticale $V_h = h + j\mathbb{R}$. La convergence de l'intégrale est assurée en général par le contrôle de F à l'infini, une décroissance suffisamment forte pour assurer l'indépendance de $\mathcal{L}^{-1}F(t)$ en regard du choix de l'abscisse h de la droite V_h par ex. : on utilisera un contour rectangulaire inclus dans le domaine de définition de F dont les grands côtés sont sur les droites verticales V_{h_1}, V_{h_2} et les ordonnées $\pm A$ des petits côtés tendent vers l'infini (cf. Fig. 9). On verra dans le paragraphe suivant un énoncé précis pour cette formule d'inversion de la transformée de Laplace sur les distributions.

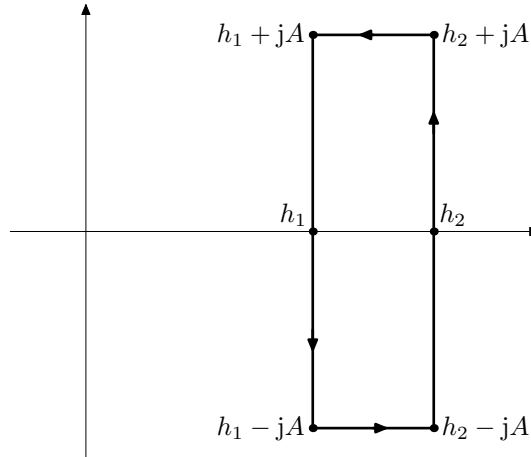


FIGURE 9 . Le contour rectangulaire pour établir l'indépendance par rapport à h de la définition de la transformée de Laplace inverse \mathcal{L}^{-1}

Le caractère injectif de la transformée de Laplace découle de celui de la transformation de Fourier

Théorème* 4.1. *Une fonction continue vérifiant la condition (*) est uniquement déterminée par sa transformée de Laplace.*

Ce théorème, complété par sa version distribution (cf. Théorème 4.2) justifie l'usage de tables (imprimées ou logicielles, voir Appendice C) pour l'inversion de transformées de Laplace.

▷ **Exemple 4.3.** La fonction $1/(p^2 + 3p + 2)$ admet la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{p^2 + 3p + 2} = \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

d'où, avec le premier des exemples 4.1

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{p^2 + 3p + 2} \right) (t) = (e^{-t} - e^{-2t}) \Upsilon(t).$$

◁

4.2. Distributions

La définition (25) peut se récrire

$$\mathcal{L}f(\mathbf{p}) = \langle u_f, e^{-\mathbf{p}t} \rangle,$$

ce qui justifie la définition suivante, pour des distributions à support borné ou des distributions régulières associées à des fonctions à support borné.

Définition 4.2. La transformée de Laplace $\mathcal{L}(u)$ de la distribution u est définie, sous condition de justification adéquate, comme la fonction de la variable complexe

$$\mathcal{L}(u)(\mathbf{p}) = \langle u, e^{-\mathbf{p}t} \rangle.$$

En particulier, la définition précédente est justifiée pour la distribution (non tempérée !) u de la forme $e^{Ct}v$ avec v distribution tempérée : on désigne par $\mathcal{S}'_{\text{exp}}$ l'espace de ces distributions u (sans condition de tempérance).

△ **Remarque 4.3.** Si u est à support borné, $\mathcal{L}u$ est définie suivant la définition 1.1, avec domaine de convergence \mathbb{C} tout entier. Sans condition de support autre que la condition $\text{supp } u \subset \mathbb{R}^+$, l'étude de la bonne définition de la transformée de Laplace se développe un peu comme ce qui a été fait pour les distributions tempérées. Dans les exemples rencontrés, on obtient facilement pour les transformées de Laplace de distribution la série de propriétés obtenues dans la proposition 4.1. ▽

▷ **Exemples 4.4.**

1. $\mathcal{L}(\delta(a))(\mathbf{p}) = e^{-\mathbf{p}a}$ pour $a \in \mathbb{R}$,

2. $\mathcal{L}(\delta(a)^{(m)}) (\mathbf{p}) = \mathbf{p}^m e^{-\mathbf{p}a}$ pour m entier, ▽

Proposition 4.3. Soit u distribution dont la transformée de Laplace est bien définie. Alors, la dérivée (au sens des distributions) $u^{(m)}$ a une transformée de Laplace et

$$(28) \quad \mathcal{L}(u^{(m)}) (\mathbf{p}) = \mathbf{p}^m \mathcal{L}(u)(\mathbf{p}).$$

Démonstration. — Sous réserve de bonne définition,

$$\mathcal{L}(u^{(m)}) (\mathbf{p}) = \langle u^{(m)}, e^{-\mathbf{p}t} \rangle = (-1)^m \langle u, \frac{d^m}{dt^m} e^{-\mathbf{p}t} \rangle = \langle u, \mathbf{p}^m e^{-\mathbf{p}t} \rangle = \mathbf{p}^m \mathcal{L}(u)(\mathbf{p}). \quad \square$$

△ **Remarque 4.4.** Pour la distribution $f\Upsilon$ avec f indéfiniment dérivable, on a la formule au sens distribution, obtenue aisément par une récurrence sur l'entier m ,

$$(f\Upsilon)^{(m)} = f^{(m)}\Upsilon + f^{(m-1)}(0)\delta + \dots + f'(0)\delta^{(m-2)} + f(0)\delta^{(m-1)}$$

et donc

$$\mathcal{L}(f^{(m)}\Upsilon) = \mathbf{p}^m \mathcal{L}(f\Upsilon) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(m-1-k)}(0)\mathbf{p}^k.$$

C'est la ligne 6 du premier tableau de l'annexe C. ▽

Comme pour les fonctions (cf. Théorème 4.1), La transformée de Laplace est injective sur l'espace des distributions laplacisables.

Théorème* 4.2. Soient u_1 et u_2 deux distributions admettant une transformée de Laplace. Si les transformées de Laplace $\mathcal{L}(u_1)$ et $\mathcal{L}(u_2)$ coïncident sur un ouvert du plan complexe, alors les distributions u_1 et u_2 sont égales.

Ainsi, avec les formules des exemples 4.1 et 4.4, la transformée inverse de toute fraction rationnelle R décomposée en éléments simples

$$R(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{p}^i + \sum_{j=1}^n \sum_{\ell_j=1}^{L_j} \frac{\beta_j \ell_j}{(\mathbf{p} - \rho_j)^{\ell_j}}$$

est aisément calculable, ainsi que des fractions rationnelles exponentielles/polynômes

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i e^{-\tau_i p} p^i + \sum_{j=1}^n \sum_{\ell_j=1}^{L_j} \frac{\beta_j \ell_j e^{-t_j \ell_j p}}{(p - \rho_j)^{\ell_j}}$$

en tenant compte de l'action d'un décalage temporel sur la transformée de Laplace (27) et de la linéarité de la transformée \mathcal{L}^{-1} :

$$\mathcal{L}^{-1} [e^{-\tau p} p^i] = \delta^{(i)}(t - \tau), \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-\tau p}}{(p - \rho)^\ell} \right] = \left(\frac{\Upsilon(s) e^{\rho s} s^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \right)_{|s=t-\tau}.$$

Le théorème suivant établit une condition, nécessaire et suffisante, pour qu'une fonction holomorphe définie sur un demi-plan soit la transformée de Laplace d'une distribution.

Théorème 4.3. *Une fonction F de la variable complexe est transformée de Laplace d'une distribution u à support dans $[0, \infty)$ si et seulement si il existe un demi-plan $\{\Re p > C\}$ où elle est majorée en module par une puissance de $|p|$.*

Démonstration. — La transformée de Laplace F de f à support dans $[0, +\infty)$ vérifiant la condition (*) est bornée

$$|F(p)| \leq \int_0^\infty |f(t)| e^{-\Re p t} dt \leq \int_0^\infty |f(t)| e^{-C_f t} dt, \quad \Re p > c_f.$$

La transformée de Laplace de la dérivée $f^{(m)}$ au sens distribution est $p^m F(p)$, à croissance polynomiale. On démontre en général que si la distribution T admet une transformée de Laplace, alors elle est dérivée $f^{(m)}$ d'une fonction f vérifiant la condition (*): c'est par exemple le cas de $\delta^{(m)} = \Upsilon^{(m+1)}$ avec $\mathcal{L}\delta^{(m)}(p) = p^m$.

Réciproquement, commençons par le cas où F est à décroissance quadratique, *i. e.* il existe une constante M telle que $|F(p)| \leq M/(1 + |p|^2)$ sur le demi-plan $\Re p \geq c$. Alors l'intégrale

$$(29) \quad f(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_{V_h} e^{pt} F(p) dp, \quad h > c.$$

est absolument convergente (comme $\int_{\mathbb{R}} (1 + y^2)^{-1} dy$) et indépendante du choix de h . En effet, si $c < h_1 < h_2$, en intégrant sur le bord du rectangle $\{h_2 - jA, h_2 + jA, h_1 + jA, h_1 - jA\}$ où la fonction F est holomorphe, on a

$$\int_{[h_1 - jA, h_1 + jA]} e^{pt} F(p) dp = \int_{[h_2 - jA, h_2 + jA]} e^{pt} F(p) dp + \int_{[h_2 + jA, h_1 + jA]} e^{pt} F(p) dp + \int_{[h_1 - jA, h_2 - jA]} e^{pt} F(p) dp$$

Les deux derniers termes tendent vers 0 lorsque $A \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \left| \int_{[h_1 \pm jA, h_2 \pm jA]} e^{pt} F(p) dp \right| &= \left| \int_{h_1}^{h_2} e^{(h \pm jA)t} F(h \pm jA) dh \right| \\ &\leq M \int_{h_1}^{h_2} \frac{e^{ht} dh}{1 + |h \pm jA|^2} \leq M \frac{e^{h_2 t} - e^{h_1 t}}{t} \frac{1}{1 + A^2}, \end{aligned}$$

ce qui donne l'égalité des termes restants.

L'identité (29), qui peut s'écrire comme une intégrale de Fourier,

$$(30) \quad e^{-ht} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{jut} F(h + ju) du$$

indique que f est continue, comme transformée de Fourier inverse d'une fonction intégrable : $u \rightarrow F(h + iu)$ est donc la transformée de Fourier dans \mathcal{S}' de $e^{-ht} f$. En outre,

$$|f(t)| \leq \frac{e^{ht}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{M}{1 + u^2} du, \quad h \geq c,$$

ainsi, si $t < 0$, en faisant tendre h vers $+\infty$, on obtient $f(t) = 0$ et pour $t \geq 0$, on a la majoration

$$|f(t)| \leq \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{M}{1 + u^2} du,$$

ce qui achève de montrer que f vérifie la propriété (*). On peut inverser la formule (30) pour $\Re p > C$

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) c dt$$

ce qui achève l'étude du cas particulier. En général, pour une fonction holomorphe majorée par $|p|^m$ sur $\Re p \geq C$, la fonction $F(p)/p^{m+2}$ vérifie les hypothèses du cas particulier précédent : il existe une fonction f telle que $\mathcal{L}f(p) = F(p)/p^{m+2}$ et sa dérivée $f^{(m+2)}$ au sens distribution a bien pour transformée de Laplace la fonction F donnée. \square

4.3. La fonction de Bessel J_0

La fonction de Bessel J_0 , introduite dans la section 2.4 suivant la représentation intégrale (16), admet un développement en série entière :

$$J_0(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (t/2)^{2m}}{(m!)^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Son comportement à l'infini est décrit par l'équivalent

$$J_0(t) \sim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{2/(\pi t)} \cos(t - \pi/4).$$

Ainsi la fonction $J_0\Upsilon$ vérifie la condition (*) avec la constante $C_f = 1$ (tout autre nombre positif non nul convient). Pour le calcul de $\mathcal{L}(J_0\Upsilon)$, on fait, dans un premier temps, comme si l'intégration terme à terme était légitime

$$\begin{aligned} (31) \quad \int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m}}{(m!)^2 2^{2m}} e^{-pt} dt &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2 2^{2m}} \int_0^{\infty} t^{2m} e^{-pt} dt \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m)!}{(m!)^2 2^{2m} p^{2m+1}} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \dots (-\frac{2m-1}{2})}{m!} \frac{1}{p^{2m+1}} \\ &= \frac{1}{p} (1 + p^{-2})^{-1/2} = (1 + p^2)^{-1/2} \end{aligned}$$

L'interversion de la limite et de la somme est légitime, et donc l'expression de $\mathcal{L}(J_0\Upsilon)$ et des expressions précédentes si il y a convergence de la série à termes réels positifs

$$\Sigma_+(p) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m!)^2 2^{2m}} \int_0^{\infty} t^{2m} e^{-\Re p t} dt$$

majorant terme à terme la série (31). La série $\Sigma_+(p)$ converge, de somme $((\Re p)^2 - 1)^{-1/2}$ si $\Re p > 1$. Vu que la transformée $\mathcal{L}(J_0\Upsilon)$ est holomorphe sur $\Re p > 0$, on obtient donc par prolongement analytique,

$$\mathcal{L}(J_0\Upsilon)(p) = (1 + p^2)^{-1/2}.$$

Proposition 4.4. Soit J_0 la fonction de Bessel. Alors

$$\mathcal{L}(J_0\Upsilon)(p) = (1 + p^2)^{-1/2}, \quad \Re p > 0.$$

et

$$J_0\Upsilon * J_0\Upsilon(t) = \sin t\Upsilon(t), \quad t > 0.$$

Démonstration. — La première identité vient d'être prouvée. Pour la seconde, il suffit de montrer que les transformées de Laplace sont égales. La transformée de Laplace échangeant produit de convolution et multiplication, on a

$$\mathcal{L}(J_0\Upsilon * J_0\Upsilon)(p) = (\mathcal{L}(J_0\Upsilon)(p))^2 = (1 + p^2)^{-1}$$

qui est la transformée de Laplace de $\sin \Upsilon$. □

△ **Remarque 4.5.** La transformée de Laplace inverse de $(1 + p^2)^{1/2} = (1 + p^2)(1 + p^2)^{-1/2}$ est

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}((1 + p^2)^{1/2}) &= \mathcal{L}^{-1}((1 + p^2)(1 + p^2)^{-1/2}) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + 1 \right) \mathcal{L}^{-1}((1 + p^2)^{-1/2}) \\ &= \left(\frac{d^2}{dt^2} + 1 \right) J_0(t)\Upsilon(t) = J_0(t)\Upsilon(t) + J_0''(t)\Upsilon(t) + \delta'. \end{aligned}$$

où on a utilisé $J_0(0) = 1$ et $J'_0(0) = 0$. ▽

4.4. Solutions causales d'équations différentielles

La transformée de Laplace est utilisée pour résoudre des équations différentielles à coefficients constants. La fonction (ou distribution) g étant donnée, on cherche u sur $[0, \infty)$, fonction n fois dérivable telle que

$$u^{(n)}(t) + a_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \dots + a_1u'(t) + a_0u(t) = g(t)$$

avec conditions initiales

$$u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}, \dots, u'(0) = u_1, u(0) = u_0.$$

La théorie des équations différentielles assure l'existence et l'unicité de la solution u , qui est de plus indéfiniment dérivable : il s'agit de trouver des moyens de la calculer, ce que ne donne pas de manière simple les arguments théoriques. La transformée de Laplace fournit un moyen mécanique de le faire.

La distribution $U = u\Upsilon$ vérifie une équation différentielle

$$(32) \quad U^{(n)}(t) + a_{n-1}U^{(n-1)}(t) + \dots + a_1U'(t) + a_0U(t) = G(t)$$

où le second membre G est somme de g et de dérivées de masses de Dirac dont les amplitudes sont déterminées par les conditions initiales et les coefficients a_{n-1}, \dots, a_0 . En effet, au sens distribution,

$$\begin{aligned} U'(t) &= u'(t)\Upsilon(t) + u_0\delta, \\ U''(t) &= u''(t)\Upsilon(t) + u_1\delta + u_0\delta', \\ &\vdots \\ U^{(n)}(t) &= u^{(n)}(t)\Upsilon(t) + u_{n-1}\delta + \dots + u_0\delta^{(n-1)}. \end{aligned}$$

L'équation (32) peut s'écrire comme une équation de convolution

$$(33) \quad (\delta^{(n)} + a_{n-1}\delta^{(n-1)} + \dots + a_1\delta' + a_0\delta) * U = G$$

avec

$$G = g - \sum_{k=1}^n a_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} u_{k-1-j} \delta^{(j)} \right).$$

dans l'espace des distributions à support dans $[0, +\infty)$. Le passage en Laplace donne

$$(34) \quad (\mathbf{p}^n + a_{n-1}\mathbf{p}^{n-1} + \dots + a_1\mathbf{p} + a_0)\mathcal{L}U(\mathbf{p}) = \mathcal{L}G(\mathbf{p})$$

La solution U , qui détermine u sur $(0, +\infty)$, est obtenue par inversion de Laplace de

$$\frac{\mathcal{L}G(\mathbf{p})}{\mathbf{p}^n + a_{n-1}\mathbf{p}^{n-1} + \dots + a_1\mathbf{p} + a_0}.$$

△ **Remarque 4.6.** Si g est à support dans $(0, +\infty)$, l'équation différentielle (32) a un second membre nul au voisinage de $t = 0$. Ainsi, toute solution définie sur $(0, \varepsilon)$ se prolonge en une solution unique sur $(-\infty, \varepsilon)$: une expression analytique de $(0, \varepsilon)$ convient aussi sur $(-\infty, \varepsilon)$. Même si l'usage de la transformée de Laplace ne donne une expression de la solution u que sur $(0, +\infty)$ à partir de celle de $U = u\Upsilon$, l'expression analytique de U permet d'avoir u sur \mathbb{R} tout entier. Le dernier exemple ci-dessous illustre cette remarque. ▽

▷ **Exemple 4.5.** Soit l'équation

$$(35) \quad 2j'(t) + j(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta(k)$$

avec condition initiale $j(0) = j_0$. La fonction $u = j\Upsilon$ vérifie l'équation différentielle

$$2u' = 2j_0\delta + 2j'\Upsilon = 2j_0\delta + (-j + \sum_{k=1}^{\infty} \delta(k))\Upsilon = -u + 2j_0\delta + \sum_{k=1}^{\infty} \delta(k)$$

dont la transformée de Laplace est

$$2p\mathcal{L}u(p) = -\mathcal{L}u(p) + 2j_0 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kp}.$$

On est donc ramené à calculer la transformée de Laplace inverse de

$$\frac{2j_0 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kp}}{2p + 1}$$

qui est

$$j_0 e^{-t/2} \Upsilon(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k-t)/2} \Upsilon(t-k).$$

Cette formule pour Υj donne, avec les arguments de la remarque 4.6 la solution j de (35) sur \mathbb{R} tout entier

$$j(t) = j_0 e^{-t/2} + \frac{e^{-t/2}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} e^{k/2} \Upsilon(t-k), \quad t \in \mathbb{R}. \quad \triangleleft$$

Si l'équation différentielle

$$(36) \quad y'' + \omega^2 y = g$$

admet une solution élémentaire E_+ à support dans $[0, +\infty)$, *i. e.* une solution de $E'' + \omega^2 E = \delta$ (cf. Définition 3.2), E_+ a une transformée de Laplace vérifiant $(p^2 + \omega^2)\mathcal{L}E_+(p) = 1$. Ainsi $E_+(t) = \sin(\omega t)/\omega \Upsilon(t)$ d'après l'exemple 2 de la liste 4.1. Alors $y_g = E_+ * g$, soit

$$y_g(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega u}{\omega} g(t-u) du$$

est solution de l'équation différentielle (36).

Pour l'équation différentielle $y'' - \omega^2 y = g$, la solution élémentaire E_- a pour transformée de Laplace

$$\frac{1}{p^2 - \omega^2} = \frac{1}{2\omega} \left(\frac{1}{p - \omega} - \frac{1}{p + \omega} \right),$$

soit $E_-(t) = \sin(j\omega t)/(j\omega)\Upsilon(t) = \text{sh}(\omega t)/\omega \Upsilon(t)$. On comparera avec la solution élémentaire de la section 3.4.

4.5. Exercices

1. Soit $a > 0$. Calculer les transformées de Laplace

$$\mathcal{L}(\sinh at \Upsilon(t)), \quad \mathcal{L}(\text{ch } at \Upsilon(t)), \quad \mathcal{L}(\Pi_{[0,a]}/a),$$

en précisant les demi-plans de convergence, les prolongements méromorphes éventuels (avec les pôles).

2. Calculer les transformées de Laplace de

$$\cos(3t)e^{2t}\Upsilon(t), \quad t^3 \operatorname{ch}(2t)\Upsilon(t), \quad \cos(5t) \sin(2t)\Upsilon(t), \quad t^{3/2}\Upsilon(t).$$

3. Montrer

$$\mathcal{L}(\sqrt{t}\Upsilon(t))(\mathfrak{p}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\mathfrak{p}^{3/2}}, \quad \Re \mathfrak{p} > 0.$$

4. Montrer

$$\int_0^\infty e^{-\mathfrak{p}t} \frac{\sin t}{t} dt = \pi/2 - \operatorname{arctg}(\mathfrak{p}), \quad \mathfrak{p} \in \mathbb{R}^+.$$

On pourra calculer la dérivée des deux membres, avant d'évaluer leur limite lorsque $\mathfrak{p} \rightarrow \infty$.

5. Soit $f(t) = \sin \sqrt{t}\Upsilon(t)$.

(a) Montrer que

$$4t f''(t) + 2f(t) + f'(t) = 0, \quad t > 0.$$

(b) Soit $F = \mathcal{L}f$. Montrer que

$$4\mathfrak{p}^2 F'(\mathfrak{p}) + (6\mathfrak{p} - 1)F(\mathfrak{p}) = 0, \quad \Re \mathfrak{p} > 0.$$

En déduire $F(\mathfrak{p}) = C \frac{e^{-1/4\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}^{3/2}}$ pour une constante C (qu'on montre égale à $\sqrt{\pi}/2$).

6. (a) Soit f 2π -périodique vérifiant $f(t) = \sin t$ si $t \in (0, \pi)$ et nulle sur $(\pi, 2\pi)$. Montrer que

$$\mathcal{L}(f\Upsilon)(\mathfrak{p}) = \frac{1}{(1 - e^{-\pi\mathfrak{p}})(1 + \mathfrak{p}^2)}, \quad \Re \mathfrak{p} > 0.$$

(b) Soit f une fonction T -périodique. Montrer que

$$\mathcal{L}(f\Upsilon)(\mathfrak{p}) = \frac{\int_0^T e^{-t\mathfrak{p}} f(t) dt}{1 - e^{-T\mathfrak{p}}}, \quad \Re \mathfrak{p} > 0.$$

7. (a) Montrer

$$\int_0^t \sin u \cos(t - u) du = \frac{t \sin t}{2}, \quad t \geq 0.$$

(b) Retrouver le résultat précédent en calculant les transformées de Laplace des deux membres.

8. (a) Soit f deux fois continûment dérivable sur \mathbb{R} . On suppose les transformées de Laplace $\mathcal{L}(f)$, $\mathcal{L}(f'\Upsilon)$, $\mathcal{L}(f''\Upsilon)$ définies sur $\Re \mathfrak{p} > a_0$.

Montrer que

$$\mathcal{L}(f''\Upsilon)(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^2 \mathcal{L}(f\Upsilon)(\mathfrak{p}) - \mathfrak{p}f(0) - f'(0).$$

(b) Soit f solution de $y'' + y = t$ avec condition initiale $f(0) = 1$, $f'(0) = -2$. Montrer que

$$\mathcal{L}(f\Upsilon)(\mathfrak{p}) = \frac{\mathfrak{p} - 2 + \mathfrak{p}^{-2}}{\mathfrak{p}^2 + 1}.$$

En déduire par transformée de Laplace inverse

$$f(t) = t + \cos t - 3 \sin t, \quad t \geq 0.$$

9. Soit f_A la fonction définie par $f_A(t) = t$ si $t \in (0, A)$, $2A - t$ si $t \in [A, 2A)$ et 0 sinon. Calculer ses dérivées f'_A et f''_A au sens distribution, puis les transformées de Laplace de f_A , f'_A et f''_A .

10. Calculer les transformées de Laplace inverse de

$$\frac{\mathbf{p}^3}{\mathbf{p}(\mathbf{p} - 2)}, \quad \frac{1}{\mathbf{p}^2(\mathbf{p} - 1)}, \quad \frac{3e^{-2\mathbf{p}}}{(\mathbf{p} - 7)^2 + 9}, \quad \frac{\mathbf{p}}{(\mathbf{p}^2 + 1)^2}.$$

11. Soit g définie sur \mathbb{R}^+ et ayant une transformée de Laplace.

Montrer que $\Upsilon * (g\Upsilon)(t) = \int_0^t g(\mathbf{p})d\mathbf{p}$, $t \geq 0$ et que $\mathcal{L}(\Upsilon * (g\Upsilon))(\mathbf{p}) = \mathcal{L}(\mathbf{p})\mathbf{p}^{-1}$.

12. Résoudre l'équation différentielle

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = t^3 e^{-2t}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

13. Soit u une fonction définie sur \mathbb{R} solution de l'équation différentielle $tu''(t) + u'(t) + 4tu(t) = 0$ avec $u(0) = 0$ et $u'(0) = 0$. On suppose que les transformées de Laplace $\mathcal{L}(u\Upsilon)$, $\mathcal{L}(u'\Upsilon)$, $\mathcal{L}(u''\Upsilon)$ sont bien définies sur $\Re \mathbf{p} > 0$.

Montrer que $F = \mathcal{L}(u\Upsilon)$ vérifie l'équation différentielle $(\mathbf{p}^2 + 4)F'(\mathbf{p}) + \mathbf{p}F = 0$, $\mathbf{p} > 0$.

En déduire que $F(\mathbf{p}) = C(\mathbf{p}^2 + 4)^{-1/2}$, $\Re \mathbf{p} > 0$ pour une certaine constante C et que $u(t) = 3J_0(2t)$, $t \geq 0$.

14. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 5y(t), \\ y'(t) = x(t) - 3y(t), \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 2.$$

15. Résoudre l'équation intégrale pour y définie sur \mathbb{R}^+

$$\int_0^t y(s)ds + y(t) = t \sin(t).$$

APPENDICE A

FONCTIONS GAMMA (Γ) ET DE HEAVISIDE (Υ)

La fonction Γ d'Euler est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Re z > 0.$$

Elle vérifie

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Re z > 0, \quad \Gamma(n+1) = n! \quad \text{si } n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi},$$

la formule des compléments

$$(37) \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

la formule de duplication

$$(38) \quad \Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)}{\sqrt{\pi}},$$

et la relation avec la fonction beta

$$(39) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Sa dérivée logarithmique $\psi = \Gamma'/\Gamma$ a comme valeurs aux entiers

$$\psi(1) = \gamma, \quad \psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad n \geq 1,$$

où γ est la constante d'Euler-Mascheroni

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} [1/k - \log(1 + 1/k)] = 0.577215664 \dots$$

L'intégrale gaussienne se ramène à l'évaluation de Γ en $t = 1/2$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} dt = 2 \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

La fonction échelon Υ , dite de Heaviside et souvent notée H, h, u ou Y , est définie sur \mathbb{R} par

$$\Upsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0, \\ 1/2 & \text{si } t = 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

APPENDICE B

TRANSFORMÉES DE FOURIER

La première table porte sur des transformées de Fourier de fonctions φ de classe Schwartz ou intégrables et de distributions $u \in \mathcal{S}'$. La seconde table donne les transformées de Fourier de fonctions et distributions classiques : on y a identifié sans vergogne fonction f et distribution régulière u_f associée.

1	$\varphi(t)$	$\Phi(f) = \widehat{\varphi}(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2j\pi t f} \varphi(t) dt$	u	$\widehat{u} : \langle \widehat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle$
2	$\int_{\mathbb{R}} e^{2j\pi t f} \Psi(f) df$	$\Psi(f)$		
3	$\varphi(t/a)$	$ a \widehat{\varphi}(af)$		
4	$\varphi(t - t_0)$	$e^{-2j\pi t_0 f} \widehat{\varphi}(f)$	$\tau_{t_0} u$	$e^{-2j\pi t_0 f} \widehat{u}$
5	$e^{2j\pi f_0 t} \varphi(t)$	$\widehat{\varphi}(f - f_0)$	$e^{2j\pi f_0 t} u$	$\tau_{f_0} \widehat{u}$
6	$t^m \varphi(t)$	$(-2j\pi)^{-m} \widehat{\varphi}^{(m)}(f)$	$t^m u$	$(-2j\pi)^{-m} \widehat{u}^{(m)}$
7	$\varphi^{(m)}(t)$	$(2j\pi f)^m \widehat{\varphi}(f)$	$u^{(m)}$	$(2j\pi f)^m \widehat{u}$
8	$\varphi_1 * \varphi_2$	$\widehat{\varphi}_1 \widehat{\varphi}_2$	$u_1 * u_2$	$\widehat{u}_1 \widehat{u}_2$
9	$\varphi_1 \varphi_2$	$\widehat{\varphi}_1 * \widehat{\varphi}_2$	$u_1 u_2$	$\widehat{u}_1 * \widehat{u}_2$

	u	$\mathcal{F}(u)$
10	$\Pi_{[-1,1]}(t)$	$2 \operatorname{sinc} 2\pi f$
11	$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$
12	$e^{- t }$	$2(1 + 4\pi^2 f^2)^{-1}$
13	$(1 + t^2)^{-1}$	$\pi e^{-2\pi f }$
14	$\Upsilon(t)$	$(2j\pi)^{-1} \operatorname{vp}(1/f) + \delta(f)/2$
15	$\delta(t)$	1
16	1	$\delta(f)$
17	$\Upsilon(t)e^{-t}$	$(1 + 2j\pi f)^{-1}$
18	$\operatorname{vp}(1/t)$	$-j\pi \operatorname{sgn} f$

$$\text{Plancherel : } \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \overline{\psi(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(f) \overline{\widehat{\psi}(f)} df$$

APPENDICE C

TRANSFORMÉES DE LAPLACE

La table porte sur des transformées de Laplace de fonctions f (resp. distributions u) à support dans $[0, \infty)$ (les signaux causaux) et “à croissance sous-exponentielle”, *i. e.* telles qu’il existe un réel σ_f avec $e^{-\sigma_f t} f \in L^1$ (resp. σ_u avec $e^{-\sigma_u t} u \in \mathcal{S}'$).

1	$f(t)$	$F(\mathbf{p}) = \mathcal{L}f(\mathbf{p}) = \int_0^\infty e^{-t\mathbf{p}} f(t) dt$	u	$\mathcal{L}u(\mathbf{p}) = \langle u, e^{-\mathbf{p}t} \rangle$
2	$\frac{1}{2j\pi} \int_{\Re \mathbf{p}=h} e^{t\mathbf{p}} F(\mathbf{p}) d\mathbf{p}$	$F(\mathbf{p})$		
3	$f(t + t_0)$	$e^{t_0\mathbf{p}} F(\mathbf{p})$	$\tau_{-t_0} u$	$e^{t_0\mathbf{p}} \mathcal{L}(u)(\mathbf{p})$
4	$e^{\mathbf{p}_0 t} f(t)$	$F(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$	$e^{\mathbf{p}_0 t} u$	$\mathcal{L}u(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$
5	$(-t)^m f(t)$	$F^{(m)}(\mathbf{p})$	$(-t)^m u(t)$	$(\mathcal{L}u)^{(m)}(\mathbf{p})$
6	$\Upsilon(t) f^{(m)}(t)$	$\mathbf{p}^m F(\mathbf{p}) - \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{p}^{m-1-k} f^{(k)}(0)$	$u^{(m)}$	$\mathbf{p}^m \mathcal{L}u(\mathbf{p})$
7	$f_1 * f_2$	$\mathcal{L}f_1 \mathcal{L}f_2$	$u_1 * u_2$	$\mathcal{L}u_1 \mathcal{L}u_2$

$F^{(m)}$ dérivée holomorphe, $f^{(m)}$ dérivée classique de fonction, dérivée $u^{(m)}$ de distribution

	u	$\mathcal{L}u$
8	$\Upsilon(t)$	\mathbf{p}^{-1}
9	$\Upsilon(t) t^{\alpha-1}$	$\Gamma(\alpha) \mathbf{p}^{-\alpha}$
10	$\Upsilon(t) e^{ct}$	$(\mathbf{p} - c)^{-1}$
11	$\Upsilon(t) \cos \omega t$	$\mathbf{p}(\mathbf{p}^2 + \omega^2)^{-1}$
12	$\Upsilon(t) \sin \omega t$	$\omega(\mathbf{p}^2 + \omega^2)^{-1}$
13	$\Upsilon(t) J_0(t)$	$(1 + \mathbf{p}^2)^{-1/2}$
14	$\delta(t)$	1

INDEX

- F. BESSEL, 16, 27, 40
- É. BOREL, 1
- A.-L. CAUCHY, 26
- convergence
 - dans \mathcal{S} , 6
 - dans \mathcal{S}' , 11
- P. DIRAC, 1, 2, 5, 7, 13, 41
- distribution
 - périodique, 13
 - régulière, 7
 - tempérée, 6
- L. EULER, 3, 45
- fonction
 - beta, 45
 - à décroissance rapide, 5
 - échelon, 3, 45
 - gamma d'Euler, 45
 - gaussienne, 5, 19, 29, 45
 - de Heaviside, 3, 45
 - porte, 8, 24, 32
 - radiale, 27
 - de Schwartz, 5
 - tempérée, 5, 7
- formule
 - des compléments, 45
 - de duplication, 45
 - d'inversion, 21, 37
- J. FOURIER, 2, 13
- G. FUBINI, 21, 22, 24, 30, 32
- C. F. GAUSS, 5, 19
- J. HADAMARD, 1
- O. HEAVISIDE, 1, 2, 8, 45
- P.-S. LAPLACE, 2, 8, 35
- H. LEBESGUE, 1, 20, 21
- G. LEIBNIZ, 10
- J. LERAY, 1
- L. MASCHERONI, 45
- masse de Dirac, 2, 5, 7, 9, 11, 41
- mesure nulle, 7
- M.-A. PARSEVAL, 22
- peigne de Dirac, 13, 15
- M. PLANCHEREL, 22
- S. POISSON, 15
- presque partout, 7
- produit de convolution, 2, 29
- relation de Plancherel, 22
- B. RIEMANN, 1, 12
- L. SCHWARTZ, 1, 2, 5, 6
- signal carré, 24
- S. SOBOLEV, 1
- solution élémentaire, 2, 33, 42
- transformation
 - de Fourier, 2, 19, 22, 23
 - de Fourier inverse, 21, 25
 - de Laplace, 2, 35, 38
 - de Laplace inverse, 37, 39
- translatée
 - distribution, 13
 - fonction, 13
 - valeur principale, 17, 26

Indications bibliographiques

Le contenu de ces ouvrages dépasse le contenu de ce cours. Néanmoins, une introduction, un chapitre bien choisi le complètent parfois agréablement.

J.-M. BONY, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2001.

C. GASQUET, P. WITOMSKI, *Analyse de Fourier et applications*, Masson, Paris, 1990.

S. MALLAT, *Une exploration des signaux en ondelettes*, Ellipses, Paris, 2000.

L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1973.