

École polytechnique de l'Université de Nantes

*Systèmes électroniques et informatique industrielle*

*Troisième année*

*2007-2008*

## Analyse fonctionnelle

III. Approximations hilbertiennes

et développements en série

Laurent Guillopé

Laboratoire de mathématiques Jean Leray (UN-CNRS-ÉCN)

Département de mathématiques, UFR Sciences et techniques

# TABLE DES MATIÈRES

Liste des figures.....	iii
Prologue.....	iv
<b>1. Espaces de Hilbert</b> .....	1
1.1. Produit scalaire.....	1
1.2. Orthogonalité.....	3
1.3. Forme linéaire.....	4
1.4. Base hilbertienne.....	5
1.5. Exercices.....	6
<b>2. Systèmes orthogonaux</b> .....	9
2.1. Exponentielles de Fourier.....	9
2.2. Polynômes de Legendre.....	13
2.3. Polynômes de Chebyshev.....	18
2.4. Fonctions d’Hermite.....	20
2.5. Système de Haar.....	22
2.6. Exercices.....	25
<b>3. Fonctions de Bessel</b> .....	28
3.1. Modélisation dans un domaine circulaire.....	28
3.2. Les fonctions de Bessel.....	29
3.3. Développements en série de Fourier-Bessel.....	32
3.4. Exercices.....	34
<b>A. La fonction Gamma d’Euler <math>\Gamma</math></b> .....	37
<b>Index</b> .....	38

## LISTE DES FIGURES

1	Géométrie euclidienne dans un espace de Hilbert : identité du parallélogramme, relation de Pythagore, projection d'un point sur un convexe fermé.....	4
2	Les fonctions cos/sinusoidales $E_n$ sur $[0, 1]$ pour $n = 0, \dots, 20$ .....	10
3	Approximations de la fonction $g_1$ définie sur $[0, 1]$ par $g_1(t) = t$ si $t < 1/2$ et $g_1(t) = t-1$ si $t \geq 1/2$ par les sommes partielles de Fourier $\pi^{-1} \sum_{1 \leq 2k-1 \leq N} (-1)^{k+1} k^{-1} \sin k2\pi t$ pour $N = 2, 6, 10, 14, 18, 22, 50, 100$ .....	11
4	Les polynômes de Legendre $L_n$ sur $[-1, 1]$ pour $n = 0, \dots, 20$ .....	13
5	Approximations de la fonction $f_1$ définie sur $[-1, 1]$ par $f_1(t) = t$ si $ t  < 1/2$ et $f_1(t) = t - \text{sgn}(t)$ si $ t  \geq 1/2$ par la somme de polynômes de Legendre $\sum_{n=0}^N (n + 1/2) \ell_n(f_1) L_n$ pour $N = 2, 6, 10, 14, 18, 22, 50, 100$ .....	16
6	Les polynômes de Chebyshev $T_n$ sur $[-1, 1]$ pour $n = 0, \dots, 20$ .....	18
7	Approximations de la fonction $f_1$ définie sur $[-1, 1]$ par $f_1(t) = t$ si $ t  < 1/2$ et $f_1(t) = t - \text{sgn}(t)$ si $ t  \geq 1/2$ par la somme de polynômes de Chebyshev $\sum_{n=0}^N t_n(f_1) T_n$ pour $N = 2, 6, 10, 14, 18, 22, 50, 100$ .....	20
8	Les fonctions d'Hermite $h_n$ pour $n = 0, \dots, 19$ .....	21
9	Approximations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f_1$ à support $[-1, 1]$ et telle que $f_1(t) = t$ si $ t  < 1/2$ et $f_1(t) = t - \text{sgn}(t)$ si $ t  \geq 1/2$ par la somme de polynômes d'Hermite $\sum_{n=0}^N \ H_n\ ^{-2} \langle f_T, H_n \rangle H_n$ pour $N = 2, 6, 10, 14, 22, 50, 100, 200, 400, 700, 1000$ .....	23
10	Les ondelettes de Haar $\varphi, \psi$ , ainsi que $\varphi_{\ell,m}, \psi_{\ell,m}$ .....	24
11	Les fonctions de Bessel $J_n, n = 0, 1, 2, 3, 4$ sur l'intervalle $(0, 25)$ .....	29
12	Les fonctions de Bessel $Y_n, n = 0, 1, 2, 3, 4$ sur l'intervalle $(0, 25)$ .....	32
13	Les fonctions de Bessel $J_0(x_{0n}t), t \in [0, 1]$ pour $n = 0, \dots, 20$ .....	33
14	Approximations de la fonction $f_1$ définie sur $[0, 1]$ par $f_1(t) = t$ si $t < 1/2$ et $f_1(t) = t - 1$ sinon, par la somme de fonctions de Bessel (46) tronquée à l'ordre $N$ pour $N = 2, 6, 10, 14, 18, 22, 30, 50$ .....	34

# PROLOGUE

Le titre général de ces notes insiste sur le point de vue de l'approximation en moindres carrés d'une fonction, via sa représentation par une série dans un espace de Hilbert

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \langle f, e_n \rangle e_n$$

avec

$$\left\| f - \sum_{n=0}^N \langle f, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2 \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0.$$

La famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , un système de fonctions orthonormées, sera tour à tour celle des exponentielles de Fourier, et leurs compagnons sin et cos, celle de polynômes de divers types (Legendre, Chebyshev, Hermite), puis celle de fonctions de Bessel. Celle des fonctions de Haar est aussi brièvement évoquée, vu l'importance de ses descendantes dans la théorie des ondelettes.

Le cadre géométrique des séries précédentes est celui de la géométrie euclidienne (celle du plan ou de l'espace physique) en dimension infinie (le domaine de l'analyse), qui mêle formules de Pythagore de la géométrie élémentaire et complétude de l'analyse fonctionnelle : c'est la théorie des espaces de Hilbert dont les résultats de base sont exposés dans le premier chapitre.

Les deux chapitres suivants se concentrent sur les familles particulières de fonctions donnant des bases orthonormées. Leur caractère de catalogue aurait pu imposer le titre général de *Fonctions spéciales* au lieu de la référence hilbertienne (qui ne couvre pas les résultats plus subtils de convergence simple) : pourquoi ces choix, et pas d'autres, tant les fonctions spéciales sont nombreuses ? Sans risque d'erreur, on peut dire que ce sont les fonctions qui apparaissent le plus fréquemment dans les sciences de l'ingénieur, après les fonctions exponentielle, logarithme, sinusoïdales : par ex., les fonctions de Bessel apparaissent lors de l'étude des fonctions radiales (pour le calcul de leur transformée de Fourier, pour l'expression du Laplacien en coordonnées polaires et la séparation des variables exposée au début du chapitre 3), les polynômes de Legendre sont aussi intimement liés à l'analyse de fonctions dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  comme par exemple la formule (20) pour le dipôle ou les harmoniques sphériques de la sphère  $S^2$  à l'instar des fonctions sinusoïdales sur le cercle  $S^1$  du plan.

L'étude de, et les résultats sur, ces fonctions spéciales sont emmêlés, comme l'exprime par exemple parfaitement la décomposition (21) attribuée à Rayleigh de l'onde plane  $e^{j\langle \mathbf{k}, \mathbf{r} \rangle}$  de vecteur  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$

$$e^{j\langle \mathbf{k}, \mathbf{r} \rangle} = \sum_{n \geq 0} (2n+1) j^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{n+1/2}(\|\mathbf{k}\| \|\mathbf{r}\|)}{\sqrt{\|\mathbf{k}\| \|\mathbf{r}\|}} L_n \left( \frac{\langle \mathbf{k}, \mathbf{r} \rangle}{\|\mathbf{k}\| \|\mathbf{r}\|} \right), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3.$$

en série de polynômes de Legendre  $L_n$ , avec les amplitudes exprimés en terme de fonctions de Bessel  $J_{n+1/2}$  d'ordre demi-entier.

L'examen des graphes des diverses familles (Fig. 2, 4, 6, 8, 13), et des approximations des fonctions en dent de scie classique (Fig. 3, 5, 7, 9, 14) montre par ailleurs toute la similarité des approximations. Si les démonstrations pour les exponentielles sont classiques (et aisées), les résultats sont repris quasiment mot pour mot pour les familles de polynômes ou de fonctions de Bessel : ces notes auraient pu être intitulées *Développements de Fourier-Legendre-Chebyshev-Hermite-Bessel* ! Aussi simples soient-ils, ces résultats requièrent pour leur preuve des résultats fins de la théorie moderne, *i. e.* lebesgienne, de l'intégration (ne serait-ce que la définition de l'espace  $L^2(I)$  associé à un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ ) : le lecteur intéressé est renvoyé au cours *Approximations fonctionnelles* qui indique au long d'un bref aperçu de cette théorie quelques résultats utilisés sans vergogne ici.

Ces fonctions classiques ont été introduites et étudiées il y a bien longtemps : Bessel, Chebyshev, Hermite, Legendre sont des mathématiciens du XIXe siècle (à l'habitude, l'Index de la version en ligne renvoie pour les mathématiciens cités dans le texte à leurs notices de l'encyclopédie biographique *MacTutor history of mathematics archive* de J. J. O'Connor et E. F. Robertson de l'Université de St Andrews, Écosse). Avec la disponibilité des ordinateurs et de leurs bibliothèques de programmes scientifiques (C, maple, matlab, scilab,...), le scientifique ou l'ingénieur du XXIe siècle ont un accès commun et aisé à ces fonctions classiques.

Nantes, le 3 janvier 2008  
Laurent Guillopé

[www.math.sciences.univ-nantes.fr/~guillope/seii1-af/](http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~guillope/seii1-af/)  
laurent.guillope@math.univ-nantes.fr

# CHAPITRE 1

## ESPACES DE HILBERT

Un espace de Hilbert est un espace normé complet, non nécessairement de dimension finie, dont la norme dérive d'un produit scalaire comme la norme euclidienne  $\| \cdot \|_2$  de  $\mathbb{R}^n$ , ce qui lui confère une géométrie euclidienne qui permet de généraliser simplement certaines propriétés de la dimension finie.

L'archétype des espaces de Hilbert (non de dimension finie) est l'espace des suites dénombrables (*i. e.* indexée par  $\mathbb{N}$  ou, par une bijection convenable, par  $\mathbb{Z}$ )

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^2 < \infty\}$$

avec produit scalaire défini par

$$(1) \quad \langle u, v \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \overline{v_n}, \quad u, v \in \ell^2(\mathbb{N})$$

et norme  $\| \cdot \|_2$  par

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^2}, \quad u \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

Si  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est la famille de suites où  $e_k$  est la suite de  $\ell^2(\mathbb{N})$  dont le seul coefficient non nul est le  $k$ -ème valant 1, on peut écrire tout  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\ell^2(\mathbb{N})$  avec un nombre fini de coordonnées  $u_n$  non nulles comme  $u = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k e_k$ , avec  $\|u\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} |u_k|^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle u, e_k \rangle^2$ . De telles sommes gardent un sens comme série pour des vecteurs quelconques  $u \in \ell^2(\mathbb{N})$ , justifiant le qualificatif de base orthonormée pour la famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . C'est ce que développe ce chapitre.

### 1.1. Produit scalaire

**Définition 1.1.** Un produit scalaire sur l'espace vectoriel  $E$  complexe <sup>(1)</sup> est la donnée d'une application de  $E^2$  dans  $\mathbb{C}$  dont l'image de  $(u, v) \in E^2$  dans  $\mathbb{C}$  est notée  $\langle u, v \rangle$  vérifiant les propriétés

- pour  $v$  fixé, l'application  $u \rightarrow \langle u, v \rangle$  est linéaire,
- $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$  pour tout  $u, v \in E$ ,
- $\langle u, u \rangle > 0$  pour tout vecteur  $u$  non nul.

▷ **Exemple 1.1.** L'espace  $\mathcal{C}([0, T])$  est muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt, \quad f, g \in \mathcal{C}([0, T]). \quad \triangleleft$$

---

1. Si l'espace  $E$  est réel, le produit scalaire est une fonction à valeurs réelles. Pour un espace de Hilbert complexe, on précise souvent *produit scalaire hermitien*.

**Proposition 1.1.** Soit  $E$  espace vectoriel muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . La fonction  $\|\cdot\|_2$  définie par  $\|u\|_2 = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ ,  $u \in E$  est une norme sur  $E$ , la norme dérivant du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

*Démonstration.* — Le polynôme du second degré en  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T_{u,v}(\lambda) &= \|\lambda u + v\|_2^2 = \langle \lambda u + v, \lambda u + v \rangle = \lambda^2 \langle u, u \rangle + \lambda(\langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle) + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|_2^2 \lambda^2 + 2\Re \langle u, v \rangle \lambda + \|v\|_2^2 \end{aligned}$$

est toujours positif, ainsi son discriminant réduit

$$\Delta = (\Re \langle u, v \rangle)^2 - \|u\|_2^2 \|v\|_2^2$$

est négatif, soit

$$(2) \quad |\Re \langle u, v \rangle| \leq \|u\|_2 \|v\|_2,$$

inégalité connue sous le nom de Cauchy-Schwarz(-Bunyakovsky). Par suite

$$\|u + v\|_2^2 = \|u\|_2^2 + 2\Re \langle u, v \rangle + \|v\|_2^2 \leq (\|u\|_2 + \|v\|_2)^2,$$

*i. e.* l'inégalité triangulaire exigée comme une des propriétés de la fonction norme, les autres propriétés (homogénéité, positivité et caractérisation du vecteur nul comme seul vecteur de norme nulle) étant vérifiées aisément.  $\square$

$\triangle$  **Remarque 1.1.** Pour  $x$  et  $y$  vecteurs quelconques de  $E$ , on a l'égalité  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ , dite du parallélogramme.  $\nabla$

**Définition 1.2.** Un *espace de Hilbert* est un espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  dont la norme  $\|\cdot\|$  dérive d'un produit scalaire sur  $E$  et qui est complet relativement à cette norme.

$\triangle$  **Remarque 1.2.** Un espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  est dit complet si toute suite de Cauchy y est convergente. C'est équivalent au fait que toute série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} v_k$  absolument convergente (*i. e.*  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \|v_k\|$ ) est convergente  $\nabla$

$\triangleright$  **Exemples 1.2.**

1. L'espace  $\ell^2(\mathbb{N})$  est un espace de Hilbert.

*Complétude de  $\ell^2(\mathbb{N})$ .* — Soit  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy dans  $\ell^2(\mathbb{N})$ . On a  $u_k = (u_{kn})_{n \geq 0}$  où  $u_{kn}$  est un complexe. Pour tout  $p, q$ , on a  $|u_{pn} - u_{qn}| \leq \|u_p - u_q\|_2$ , ainsi, à  $n$  fixé la suite de complexes  $(u_{kn})_{k \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy : soit  $u_{\infty n}$  sa limite et  $u_{\infty}$  la suite  $u_{\infty} = (u_{\infty k})_{k \in \mathbb{N}}$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et  $K$  tel que si  $k, \ell > K$  on a  $\|u_k - u_\ell\|_2 \leq \varepsilon$ . On a donc pour tout  $N$ ,

$$\sum_{n=0}^N |u_{pn} - u_{qn}|^2 \leq \|u_k - u_\ell\|_2^2 \leq \varepsilon^2.$$

En passant à la limite lorsque  $\ell \rightarrow \infty$ , on obtient  $\sum_{n=0}^N |u_{kn} - u_{\infty n}|^2 \leq \varepsilon^2$ , puis en faisant  $N \rightarrow \infty$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} |u_{kn} - u_{\infty n}|^2 \leq \varepsilon^2$ . On en déduit que la suite  $u_{\infty}$  est dans  $\ell_2(\mathbb{N})$ , puis que  $\|u_k - u_{\infty}\| \leq \varepsilon$ . On vient donc de montrer que  $u_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ , d'où la complétude annoncée.  $\square$

2. L'espace  $\ell_f(\mathbb{N})$ , muni du produit scalaire (1) (où la somme est toujours finie) n'est pas complet : en effet la suite  $(x_k)_{k \geq 1}$  telle que  $x_{kn} = 1/(n+1)$  si  $n \leq k$  et zéro sinon est une suite de Cauchy, qui n'est pas convergente dans  $\ell_f(\mathbb{N})$ .

3. L'espace  $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_2)$  de l'exemple 1.1 n'est pas complet. La suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$g_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ n(t - 1/2), & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1/2 + 1/n, \\ 1, & \text{si } 1/2 + 1/n \leq t < 1, \end{cases}$$

est de Cauchy sans être convergente dans cet espace normé.

4. L'espace  $L^2(0, T)$  des fonctions  $f$  sur  $(0, T)$  de carré intégrable, i. e.  $\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty$ , muni du produit scalaire

$$\langle g_1, g_2 \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T g_1(t) \overline{g_2(t)} dt, \quad g_1, g_2 \in L^2(0, T)$$

est un espace de Hilbert, dont la norme d'un vecteur  $f$ , une *fonction de carré intégrable*, sera notée  $\|f\|_{L^2(0, T)}$  ou simplement  $\|f\|_2$ . Cet Hilbert contient  $\mathcal{C}([0, T])$  comme sous-espace dense. Son sous-espace  $\tilde{\mathcal{C}}([0, T])$  des fonctions telles que  $f(0) = f(T)$  et dont le prolongement  $T$ -périodique à  $\mathbb{R}$  est continu, l'est aussi : il contient le sous-espace des polynômes trigonométriques comme sous-espace dense.  $\triangleleft$

## 1.2. Orthogonalité

**Définition 1.3.** Deux vecteurs  $u$  et  $v$  de l'espace  $E$  sont dits *orthogonaux* si  $\langle u, v \rangle = 0$ . Une famille  $(e_i)_{i \in I}$  de vecteurs de  $E$  est dite *orthogonale* si tous les vecteurs sont deux à deux orthogonaux, elle est dite *orthonormée* si elle est orthogonale, avec tous ses vecteurs unitaires.

Soit  $A$  une partie de  $E$ . Son orthogonal, noté  $A^\perp$ , est la partie définie par

$$A^\perp = \{u \in E, \langle u, a \rangle = 0, a \in A\}.$$

$\triangle$  **Remarque 1.3.** Si  $u$  et  $v$  sont orthogonaux, alors on a la relation de Pythagore

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Cette égalité, ainsi que l'égalité du parallélogramme de la Rem. 1.1, ne sont nullement valables pour une norme en général, comme on le vérifie en particulier pour les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  telles que

$$\|z\|_1 = \sum_{i=1}^n |z_i|, \quad \|z\|_\infty = \sup_{i=1, \dots, n} |z_i|, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

On vérifie simplement que l'orthogonal  $A^\perp$  d'une partie  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .  $\nabla$

Introduisons deux notions nécessaires au théorème de projection illustré dans sa version plane par la Fig. 1

**Définition 1.4.** La partie  $F$  de l'espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  est dite *fermée* si toute suite convergente d'éléments de  $E$  a sa limite dans  $E$ .

$\triangleright$  **Exemples 1.3.**

1. Ni  $\mathbb{Q}$ , ni son complémentaire  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , ne sont fermés dans  $\mathbb{R}$ .
2. En dimension finie, un sous-espace vectoriel de  $E$  est fermé, alors qu'en dimension infinie rien ne peut être dit a priori : le sous-espace  $\ell_f(\mathbb{N})$  de  $\ell^2(\mathbb{N})$  n'est pas fermé, alors que le sous-espace  $\ell_N(\mathbb{N})$  des suites de  $\ell^2(\mathbb{N})$  dont les termes sont tous nuls à partir du rang  $N$  (compris) en est un.
3. La boule (ouverte)  $B_{\|\cdot\|}(v, r) = \{\|x - v\| < r\}$  n'est pas fermée : son complémentaire  $E \setminus B_{\|\cdot\|}(v, r)$  est fermé, de même que la boule (fermée)  $\overline{B}_{\|\cdot\|}(v, r) = \{\|w - v\| \leq r, w \in E\}$ .  $\triangleleft$

**Définition 1.5.** Une partie  $C$  de l'espace vectoriel  $E$  est dite *convexe* si pour tous vecteurs  $u, v$  de  $E$ , le segment  $[u, v] = \{u + \lambda(v - u) : \lambda \in [0, 1]\}$  est contenu dans  $C$ .

$\triangleright$  **Exemple 1.4.** Une boule (ouverte ou fermée) est convexe, de même que tout sous-espace linéaire.  $\triangleleft$



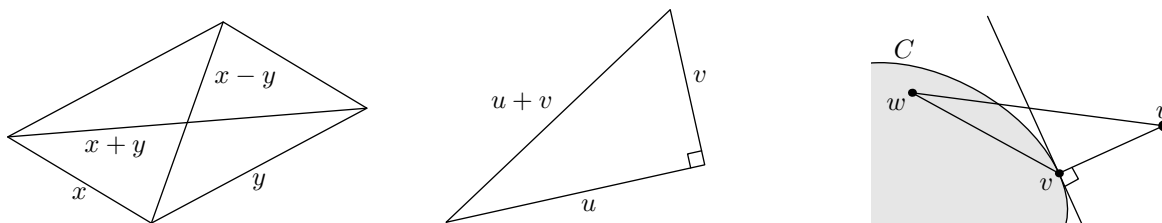


FIGURE 1 . Géométrie euclidienne dans un espace de Hilbert : identité du parallélogramme, relation de Pythagore, projection d'un point sur un convexe fermé.

**Théorème\* 1.1.** Soit  $C$  une partie fermée convexe d'un espace de Hilbert  $E$ . Alors, pour tout  $u \in E$ , il existe un unique vecteur  $v$  de  $C$  tel que  $\|u - v\| = \inf_{w \in C} \|u - w\|$ . Pour un tel  $v$ , on a  $\Re \langle u - v, w - v \rangle \leq 0$  pour tout  $w \in C$ . Le vecteur  $v$  s'appelle la projection de  $u$  sur la partie  $C$ .

C'est le corollaire suivant qui est particulièrement important.

**Corollaire 1.1.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel fermé de  $E$ . Alors, pour tout vecteur  $u \in E$ , il existe un unique vecteur  $v$  dans  $F$ , dit projection orthogonale de  $u$  sur  $F$ , tel que

$$(3) \quad \|u - v\| = \inf_{w \in F} \|u - w\|.$$

Le vecteur  $v^\perp = u - v$  est dans l'orthogonal  $F^\perp$  et on a la décomposition en somme directe  $E = F \oplus F^\perp$ , i. e. tout vecteur  $u$  de  $E$  s'écrit comme somme  $u = v + v^\perp$  avec  $v \in F$  et  $v^\perp \in F^\perp$ , et ceci de manière unique.

*Démonstration.* — Un sous-espace vectoriel étant convexe, il suffit d'appliquer le théorème précédent pour avoir l'existence et unicité de la projection  $v$ . Pour  $w \in F$  et  $\varepsilon$  avec  $\varepsilon^4 = 1$ , le vecteur  $w_\varepsilon = v + \varepsilon w$  est dans  $F$  et les quatre inégalités  $\Re \langle u - v, w_\varepsilon - v \rangle \leq 0$  donnent l'égalité  $\langle u - v, w \rangle = 0$ , ce qui exprime l'orthogonalité de  $u - v$  et  $F$ .  $\square$

$\Delta$  **Remarque 1.4.** Le corollaire précédent donne la solution géométrique de problèmes de minimisation. Par ex., si  $f$  est un élément  $L^2([0, 1])$ , chercher à minimiser le défaut  $\|f - P\|$  de  $f$  à être un polynôme de degré au plus  $n$  revient à prendre la projection orthogonale  $\pi_n(f)$  de  $f$  sur le sous-espace  $P_n$  des polynômes de degré au plus  $n$  :

$$\|f - \pi_n(f)\|_2 = \inf_{P \in P_n} \|f - P\|_2 = \inf_{a_0, \dots, a_n} \|f - a_0 - a_1 t - \dots - a_n t^n\|_2. \quad \nabla$$

### 1.3. Forme linéaire

Si  $v$  est un vecteur d'un espace  $E$  muni d'un produit scalaire, alors l'application  $u \in E \rightarrow \langle u, v \rangle \in \mathbb{C}$  est linéaire continue, vu que  $|\langle u, v \rangle| \leq \|v\| \|u\|$ . La réciproque est vraie dans un espace de Hilbert, au sens où toute forme  $\ell$  (i. e. une application linéaire  $\ell : E \rightarrow \mathbb{C}$ ) est représentée de cette manière.

**Théorème 1.2 (Fischer-Riesz).** Soit  $E$  un espace de Hilbert. Pour toute forme linéaire continue  $\ell$  sur  $E$ , il existe un unique vecteur  $v$  de  $E$  tel que  $\ell(u) = \langle u, v \rangle, u \in E$ .

*Démonstration.* — L'unicité d'un  $v$  résulte du fait que si  $\langle w, u \rangle = 0$  pour tout  $u \in E$ , alors le vecteur  $w$  est nul. Reste donc à prouver l'existence. Si la forme  $\ell$  est nulle, on peut prendre  $v = 0$ . Sinon, le sous-espace  $K = \{v \in E, \ell(v) = 0\}$  n'est pas  $E$  tout entier. Soit  $u_0$  un vecteur hors de  $K$ , qu'on peut supposer être dans  $K^\perp$  quitte à soustraire à  $u_0$  son projeté orthogonal sur  $K$ . Alors, tout vecteur  $u$  s'écrit comme somme

$$u = \left( u - \frac{\langle u, u_0 \rangle}{\langle u_0, u_0 \rangle} u_0 \right) + \frac{\langle u, u_0 \rangle}{\langle u_0, u_0 \rangle} u_0,$$

où le premier terme est dans  $K$ . Ainsi, son évaluation par  $\ell$  est celle du dernier terme, soit

$$\ell(u) = \frac{\langle u, u_0 \rangle}{\langle u_0, u_0 \rangle} \ell(u_0) = \langle u, \frac{\overline{\ell(u_0)}}{\langle u_0, u_0 \rangle} u_0 \rangle. \quad \square$$

## 1.4. Base hilbertienne

La définition suivante généralise les repères orthonormés du plan ou de l'espace

**Définition 1.6.** Soit  $E$  un espace de Hilbert. La famille orthonormée  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une *base orthonormée* de  $E$  si tout vecteur  $v$  est somme d'une série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n$ , i. e.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| v - \sum_{n=0}^N x_n e_n \right\| = 0.$$

Les complexes  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont appelées les coordonnées du vecteur  $v$  dans la base  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et on écrit

$$v = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n \text{ ou } \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n.$$

▷ **Exemple 1.5.** Dans l'espace  $\ell^2(\mathbb{N})$ , la famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $e_n$  est la suite de  $\ell^2(\mathbb{N})$  dont le seul coefficient non nul est le  $n$ -ème valant 1, est une base orthonormée. ◁

On a le théorème d'existence

**Théorème\* 1.3.** Soit  $E$  un espace de Hilbert séparable non de dimension finie. Alors  $E$  admet une base orthonormée.

*Démonstration.* — Le principe de la construction est simple. On définit une suite de vecteurs unitaires par récurrence. On prend tout d'abord un premier vecteur unitaire, soit  $e_1$ . Puis,  $e_1, \dots, e_n$  étant construit, on considère un vecteur  $e_{n+1}$  de l'orthogonal  $V_n^\perp$  du sous-espace  $V_n = \{x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, x_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, n\}$  engendré par les  $e_1, \dots, e_n$ . Si une telle construction ne peut aller au delà du rang  $N$ , c'est que  $V_N = E$  et  $E$  est de dimension finie, ce qui est impossible. Sinon elle se poursuit à l'infini. Un argument convenable permet de conclure (on utilise ici l'hypothèse de séparabilité de l'espace). ◻

▷ **Exemple 1.6.** La famille des exponentielles  $(e^{-2j\pi nt/T})_{n \in \mathbb{Z}}$  est une famille orthonormée de  $L^2([0, T])$ , ainsi que la famille  $(1, (\sqrt{2} \cos(2\pi nt/T), \sqrt{2} \sin(2\pi nt/T)))_{n \in \mathbb{N}^*}$  déduite par combinaisons linéaires finies de la première. On montre que ce sont des bases orthonormées de  $L^2([0, T])$  : le sous-espace qu'elles engendrent  $y$  est dense.

Ainsi, si  $c_n(g), a_n(g), b_n(g)$  sont les coefficients de Fourier de  $g$

$$\begin{aligned} c_n(g) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2j\pi nt/T} dt, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ a_n(g) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sqrt{2} \sin(2\pi nt/T) dt, \quad n \in \mathbb{N}, \\ b_n(g) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sqrt{2} \cos(2\pi nt/T) dt, \quad n \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

on a la décomposition suivant ces bases

$$(4) \quad g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(g) e^{2j\pi nt/T} = c_0(g) + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left[ a_n(g) \sqrt{2} \sin(2\pi nt/T) + b_n(g) \sqrt{2} \cos(2\pi nt/T) \right].$$

et la relation de Parseval (5), dite parfois de Bessel-Parseval

$$\|g\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(g)|^2 = |a_0(g)|^2 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} [|a_n(g)|^2 + |b_n(g)|^2]. \quad \triangleleft$$

**Proposition 1.2.** Soit  $E$  un espace de Hilbert muni d'une base orthonormée  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $v$  un vecteur de  $E$ . Alors, les coordonnées de  $v$  dans la base  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont données par les produits scalaires  $\langle v, e_n \rangle$ , soit

$$v = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle v, e_n \rangle e_n,$$

et on a l'égalité de Parseval

$$(5) \quad \|v\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle v, e_n \rangle|^2.$$

*Démonstration.* — Soit  $v$  un vecteur de  $E$  de coordonnées  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Par continuité de la forme linéaire  $v \rightarrow \langle v, e_m \rangle$ , on a

$$\langle v, e_m \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{n=0}^N x_n e_n, e_m \right\rangle = x_m.$$

L'application de Pythagore donne  $\left\| \sum_{n=0}^N \langle v, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \sum_{n=0}^N |\langle v, e_n \rangle|^2$ . D'après l'inégalité triangulaire  $\left| \|v\| - \left\| \sum_{n=0}^N \langle v, e_n \rangle e_n \right\| \right| \leq \left\| v - \sum_{n=0}^N \langle v, e_n \rangle e_n \right\|$ , on a donc

$$\left| \|v\| - \left\| \sum_{n=0}^N \langle v, e_n \rangle e_n \right\| \right| \rightarrow 0$$

lorsque  $N \rightarrow \infty$ . L'égalité de Parseval s'en déduit.  $\square$

$\triangle$  **Remarque 1.5.** Le Cor. 1.1 prend une forme explicite si  $F$  (resp.  $F^\perp$ ) sont munis d'une base  $\nabla$

## 1.5. Exercices

1. Soit  $E$  un espace de Hilbert.

(a) Démontrer l'identité d'Apollonius :

$$\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2} \|x - y\|^2 + 2 \left\| z - \frac{x + y}{2} \right\|^2, \quad x, y, z \in E.$$

(b) Si le produit scalaire est symétrique, montrer que

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\langle x, y \rangle, \quad x, y \in E,$$

alors que si le produit scalaire est hermitien (i. e.  $\langle x, y \rangle$  est complexe et  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ), alors

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + j\|x + jy\|^2 - j\|x - jy\|^2 = 4\langle x, y \rangle, \quad x, y \in E.$$

2. Soit  $P$  un polynôme  $P(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$  à coefficients réels avec  $a_n^2 + \dots + a_1^2 + a_0^2 = 1$ . Montrer que

$$\int_0^1 |P(t)| dt \leq \pi/2$$

On pourra utiliser que  $1 + t^2 + t^4 + \dots + t^{2n} \leq (1 - t^2)^{-1}$ ,  $t \in (0, 1)$ .

3. Soit  $N$  un entier non nul. Montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos Nt} dt \leq 1,$$

puis, pour deux entiers  $N$  et  $M$  distincts,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |e^{jMt} + e^{jNt}| dt \leq \sqrt{2},$$

et plus généralement, si  $N_1, \dots, N_k$  sont des entiers tous distincts deux à deux,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |e^{jN_1 t} + \dots + e^{jN_k t}| dt \leq \sqrt{k}.$$

4. Soit  $(e_n)_{n=1, \dots, N}$  une famille orthonormée d'un espace de Hilbert  $H$  et  $V_N$  le sous-espace vectoriel engendré par cette famille

$$V_N = \{x_1 e_1 + \dots + x_N e_N, x_n \in \mathbb{C}\}.$$

Montrer que la projection orthogonale de  $u \in H$  sur  $V_N$  est le vecteur  $v = \sum_{n=1}^N \langle u, e_n \rangle e_n$ .

5. Montrer que

$$|\sin t| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2 - 1}, \quad t \in (-\pi, \pi).$$

En déduire une valeur de  $\sum_{n=1}^{\infty} (4n^2 - 1)^{-2}$ .

6. Soit  $a, T$  réels avec  $0 < a < T$ . Calculer dans  $L^2(-T, T)$  les coefficients de Fourier de la fonction porte  $\Pi_{[-a, a]}$ , fonction caractéristique de l'intervalle  $[-a, a]$ . En utilisant l'identité de Parseval, en déduire l'égalité

$$\alpha^{-1} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [\text{sinc}(\pi n \alpha)]^2,$$

où  $\alpha \in (0, 1)$ .

7. Soient les systèmes  $\mathcal{C}_\pi = (\cos nt)_{n \geq 0}$ ,  $\mathcal{S}_\pi = (\sin nt)_{n \geq 1}$  et  $\mathcal{S}_{\pi/2} = (\sin(2n+1)t)_{n \geq 0}$ .

(a) Montrer que les systèmes  $\mathcal{C}_\pi, \mathcal{S}_\pi$  et  $\mathcal{S}_{\pi/2}$  sont orthogonaux dans  $L^2(0, \pi)$ ,  $L^2(0, \pi)$  et  $L^2(0, \pi/2)$  resp. Sont-ils orthonormés ?

(b) Soit  $f$  une fonction de  $L^2(0, \pi)$ . En considérant le prolongement pair  $f_+$  (resp. impair  $f_-$ ) de  $f$  à  $(-\pi, \pi)$ , *i. e.* la fonction  $f_\pm$  telle que

$$f_\pm(t) = \pm f_\pm(-t) = f(t), \quad t \in (0, \pi), \quad f(0) = 0,$$

montrer le développement de  $f$  en cosinus

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\tau) d\tau + \sum_{n>0} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\tau) \cos n\tau d\tau \cos nt,$$

resp. le développement en fonction sinus

$$f(t) = \sum_{n>0} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\tau) \sin n\tau d\tau \sin nt.$$

(c) Soit  $f$  une fonction définie sur  $(0, \pi/2)$  et  $g$  son prolongement pair à  $(0, \pi)$ , *i. e.* la fonction  $g$  telle que

$$g(\pi/2 + t) = g(\pi/2 - t), \quad t \in (0, \pi/2).$$

En utilisant le développement en sinus de  $g$ , montrer que

$$f(t) = \sum_{n>0} \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\tau) \sin(2n+1)\tau \, d\tau \sin(2n+1)t, \quad t \in (0, \pi/2).$$

8. Soit, pour  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $V_n$  le sous-espace de  $L^2(\mathbb{R})$  constitué des fonctions constantes sur chaque intervalle  $(k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ . Soit  $\varphi$  la fonction de  $V_0$  à support dans  $[0, 1]$  et y valant 1.

Pour  $a > 0$  et  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , on note par  $U_a f$  la fonction définie par  $U_a f(t) = \sqrt{a} f(at)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,

(a) Dessiner le graphe de  $\varphi$  et de la fonction  $\chi = U_2 \varphi - \tau_{1/2} U_2 \varphi$ .

(b) Montrer que  $V_i \subset V_{i+1}$  pour tout entier  $i$ . Montrer que  $U_2$  induit un isomorphisme de  $V_i$  sur  $V_{i+1}$ .

(c) Montrer que la famille des translatées  $(\tau_n \varphi)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $V_0$ .

(d) Montrer que  $f \in V_1$  est orthogonal à  $V_0$  si et seulement si  $f$  est une combinaison linéaire (éventuellement infinie) de  $\chi$  et de ses translatées  $(\tau_k \chi)_{k \in \mathbb{Z}}$ .

(e) Soit pour  $t \in \mathbb{R}$  la fonction  $\varphi_t$  définie par  $\varphi_t(u) = \varphi(u - [t])$ ,  $u \in \mathbb{R}$  où  $[t]$  désigne la partie entière de  $t$ . Soit  $f$  dans  $V_0$ . Montrer que, pour  $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$$f(t) = \langle f, \varphi_t \rangle.$$

9. Soit  $\mathcal{H}_2$  l'espace des séries entières  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  telle que  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 / (1+n)$  soit finie. On le munit du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{|z|<1} f(z) \overline{g(z)} \, dx dy.$$

(a) Montrer que  $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille orthogonale de  $\mathcal{H}_2$ . Quelle est la norme de  $z^n$  ?

(b) Soit, pour  $w$  complexe avec  $|w| < 1$ , la fonction  $S_w$  définie sur  $\{|z| < 1\}$  par  $S_w(z) = \frac{1}{\pi} (1 - \bar{w}z)^{-2}$ . Montrer que  $S_w$  appartient à  $\mathcal{H}_2$ , puis que, pour  $w$  avec  $|w| < 1$ ,

$$f(w) = \langle f, S_w \rangle.$$

# CHAPITRE 2

## SYSTÈMES ORTHOGONAUX

Après avoir rappelé comment les exponentielles à fréquences entières constituent un système orthogonal dans  $L^2(0, 1)$  et quelques résultats de convergence pour les séries de Fourier d'une fonction, nous introduisons les polynômes de Legendre, de Chebyshev <sup>(1)</sup> et d'Hermite. Même si la définition de ces familles de polynômes n'est pas familière, les systèmes orthogonaux qu'ils constituent permettent de faire des analyse/synthèse en tout point similaires à celles de Fourier : les tracés, et quelques démonstrations, témoignent de ces similarités profondes. Ce chapitre se termine par la présentation du système de Haar introduit au début du XXe siècle, ancêtre des bases d'ondelettes dont l'efficacité a été plébiscitée dans de nombreux domaines rapidement après leur introduction à la fin du siècle dernier, comme par exemple la norme JPEG2000 pour la compression des images.

### 2.1. Exponentielles de Fourier

La famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  des fonctions exponentielles et la famille  $(E_n)_{n \geq 0}$  construite à partir de leurs parties réelles et imaginaires sont à la base de la théorie de Fourier. Rappelons leur définition et quelques propriétés importantes.

**Théorème/Définition 2.1.** Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , les fonctions  $e_n$  sont définies par

$$e_n(t) = e^{2j\pi nt}, \quad t \in [0, 1],$$

et les fonctions  $E_n$ , pour  $t \in [0, 1]$ , par

$$E_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ \sqrt{2} \cos \pi nt, & \text{si } n \text{ est pair non nul} \\ \sqrt{2} \sin \pi(n+1)t, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

La fonction  $e_n$  (resp.  $E_n$ ) vérifie l'équation différentielle

$$y''(t) + 4\pi^2 \omega(n)^2 y(t) = 0,$$

avec  $\omega(n) = |n|$  ( $[(n+1)/2]$  resp.).

La famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et la famille  $(E_n)_{n \geq 0}$  sont des bases orthonormées de l'espace de Hilbert  $L^2(0, 1)$ .

---

1. La translittération de Чебышёв est variable. Ainsi, dans la base de références bibliographiques Zentralblatt Math, 8 000 recensions contiennent référence à Чебышёв, avec 35 translittérations différentes :

Cebisev	Cebysev	Chebichev	Chebisheff	Chebishev	Chebyshev	Chebyshev
Tchebichef	Tchébichef	Tchebichev	Tchebicheff	Tchébicheff	Tchebischef	Tchébischeff
Tchebycev	Tchebychef	Tchébychef	Tchebycheff	Tchébycheff	Tchebychev	Tchébychev
Tchébychew	Tchebyschef	Tchébyschef	Tchebyscheff	Tchebyshev	Tchebyshef	Tchebysheff
Tchebyshev	Tchebytchev	Tschebicheff	Tschebychev	Tschebyscheff	Tschebyschew	Tschebyshev

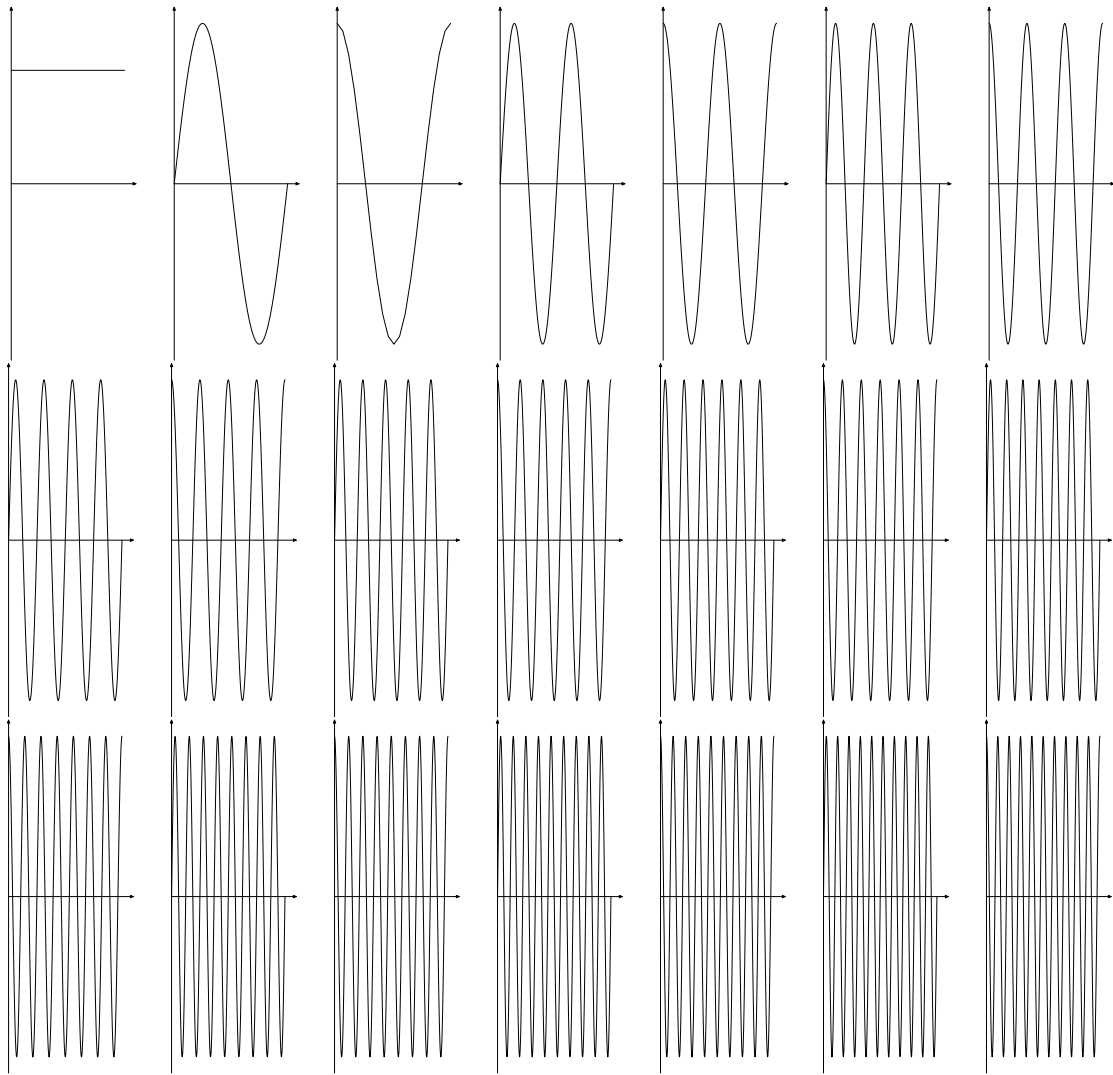


FIGURE 2 . Les fonctions cos/sinusoidales  $E_n$  sur  $[0, 1]$  pour  $n = 0, \dots, 20$ .

Les théorèmes de représentation d'une fonction  $f$  définie sur  $[0, 1]$  comme somme de sa série de Fourier abondent : le type de convergence dépend fortement des propriétés de régularité de la fonction. Les résultats suivants rappellent les énoncés pour des fonctions  $L^2$  (théorie hilbertienne), indéfiniment dérivable, continue (le théorème de Dirichlet) et généralisée (théorie des distributions de Schwartz). Les coefficients de Fourier sont définis pour une fonction  $f$  intégrable

$$c_n(f) = \int_0^1 e^{-2j\pi nt} f(t) dt,$$

$$C_n(f) = \int_0^1 E_n(t) f(t) dt = \int_0^1 \begin{cases} f(t) dt, & \text{si } n = 0 \\ \sqrt{2} \cos(\pi nt) f(t) dt, & \text{si } n \text{ est pair non nul} \\ \sqrt{2} \sin(\pi(n+1)t) f(t) dt, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

**Théorème 2.1.** Soit  $f$  une fonction de carré intégrable sur  $(0, 1)$ . Alors, pour la convergence dans  $L^2(0, 1)$ ,

$$(6) \quad f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(f) E_n.$$

et on a la relation de Bessel-Parseval

$$\int_{-1}^1 |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n(f)|^2.$$

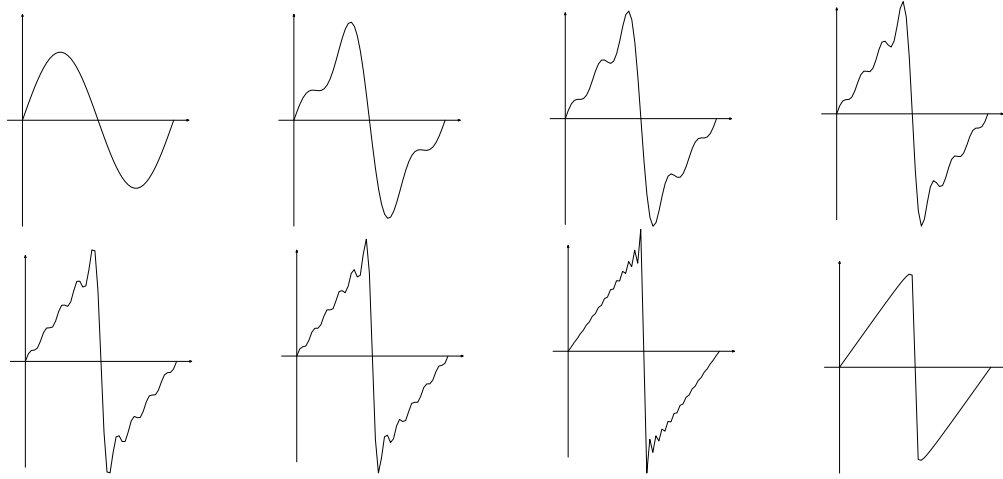


FIGURE 3 . Approximations de la fonction  $g_1$  définie sur  $[0, 1]$  par  $g_1(t) = t$  si  $t < 1/2$  et  $g_1(t) = t - 1$  si  $t \geq 1/2$  par les sommes partielles de Fourier  $\pi^{-1} \sum_{1 \leq 2k-1 \leq N} (-1)^{k+1} k^{-1} \sin k2\pi t$  pour  $N = 2, 6, 10, 14, 18, 22, 50, 100$ .

▷ **Exemple 2.1.** Soit  $g_1$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  telle que  $g_1(t) = t$  si  $t < 1/2$  et  $g_1(t) = t - 1$  si  $t \geq 1/2$ . On a alors, au sens  $L^2$  dans l'espace de Hilbert  $L^2(0, 1)$ ,

$$(7) \quad g_1(t) = \frac{1}{2j\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{2j\pi nt} = \frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(2\pi nt)$$

et la relation de Bessel-Parseval (5) s'écrit

$$\frac{1}{12} = \int_0^1 g_1^2(t) dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{(2\pi n)^2}$$

qui donne la somme des inverses des carrés des entiers (2)

$$(8) \quad \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

La fonction  $P$  définie sur  $[0, 1]$  par  $P(t) = t^2, t \in (0, 1)$ , a comme développement de Fourier

$$t^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nt)}{(\pi n)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nt)}{\pi n}, \quad t \in (0, 1),$$

2. Trouver la valeur  $p$  de cette série a été énoncé comme le *Problème de Bâle*, problème proposé par Pietro Mengoli en 1644 et discuté en vain par l'illustre Bâlois Jacques Bernoulli. L. Euler, dont on a célébré le trois-centième anniversaire de la naissance en 2007, le résolut en 1735 en affirmant, à raison mais sans en voir la justification nécessaire, que le sinus cardinal  $\text{sinc}(x)$  était égal au produit infini  $p_{\infty}(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - (x/(\pi k))^2)$ , d'où la valeur  $p$  de la série en égalant les coefficients du développement de Taylor à l'ordre 2 en  $x = 0$  : restait à démontrer que la fonction  $\text{sinc}/p_{\infty}$  holomorphe sur  $\mathbb{C}$  et sans zéro (donc de la forme  $e^{g(x)}$ ) était la fonction constante égale à 1. Euler donna une autre résolution du *Problème de Bâle* en 1743 basée sur le développement en série de  $\arcsin^2$  (dont la dérivée est  $2(1-x^2)^{-1/2} \arcsin$ ), preuve considérée comme exacte. Si d'autres preuves basées sur le calcul intégral utilisent les mathématiques du XVIIIe siècle, celle dérivée ici des séries de Fourier est résolument *moderne*.



et l'identité de Parseval donne, en tenant compte de la somme (8),

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \quad \triangleleft$$

**Théorème 2.2.** Soit  $h$  fonction  $C^\infty$  sur  $[0, 1]$  avec  $h^{(k)}(0) = h^{(k)}(1)$ ,  $k \geq 0$ . Alors les coefficients de Fourier  $(c_n(h))_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $(C_n(h))_{n \geq 0}$  de  $h$  sont à décroissance rapide et

$$h(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(h) e_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(h) E_n(t), \quad t \in [0, 1]$$

avec convergence absolue des séries, ainsi que pour leurs dérivées terme à terme.

*Démonstration.* — En intégrant par parties, on a, pour tout entier  $k$ ,

$$c_n(h) = (jn)^{-k} c_n(h^{(k)}), \quad n \neq 0,$$

ce qui assure la décroissance rapide des coefficients de Fourier  $c_n(h)$  et des  $C_n(h)$  (obtenus par combinaison linéaire simple des  $c_n(h)$ ).  $\square$

**Théorème\* 2.3 (Dirichlet).** Soit  $f$  continue par morceaux sur  $(0, 1)$ , ayant des limites à droite  $f(t^+)$  et à gauche  $f(t^-)$  en tout point  $t \in (0, 1)$  et de carré intégrable sur  $[0, 1]$ . Alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N C_n(f) E_n(t) = \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2}, \quad t \in (0, 1).$$

▷ **Exemple 2.2.** Le développement (7) pris aux valeurs  $t = 0, 1/2$  et  $1$  donne bien  $(g_1(t^-) + g_1(t^+))/2$ . Pour  $t = 1/4$ , on obtient

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(\pi(2k+1)/2)}{2k+1} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

d'où

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}. \quad \triangleleft$$

△ **Remarque 2.1.** Pour la base des exponentielles  $(e^{2j\pi n \cdot})_{n \in \mathbb{Z}}$ , la première égalité dans (4) signifie la convergence

$$g(t) = \lim_{p, q \rightarrow +\infty} \sum_{n=-p}^q c_n(g) e^{2j\pi n t}$$

dans  $L^2(0, 1)$ , i. e.

$$\lim_{p, q \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{n=-p}^q c_n(g) e^{2j\pi n t} - g(t) \right\|_2 = 0.$$

Les sommes sont asymétriques, au contraire du théorème de Dirichlet (convergence simple vers la demi-somme des limites à droite et à gauche) où il est essentiel d'avoir une sommation entre  $-N$  et  $N$ .  $\nabla$

**Théorème\* 2.4.** Soit  $U$  une distribution tempérée à support dans  $(0, 1)$ . Alors

$$U = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(U) e_n = \sum_{n \geq 0} C_n(U) E_n$$

où la convergence a lieu au sens distribution.

## 2.2. Polynômes de Legendre

Le théorème de Weierstrass<sup>(3)</sup> énonce que l'espace des fonctions polynômes est dense dans l'espace des fonctions continues sur  $[-1, 1]$  pour la convergence uniforme, cet espace étant dense dans l'espace  $L^2(-1, 1)$  pour la convergence en moyenne quadratique. Ainsi, l'espace des fonctions polynômes est dense dans l'espace de Hilbert  $L^2(-1, 1)$  : toute famille ortho-normée de polynômes  $(p_n)_{n \geq 0}$ , avec  $p_n$  de degré  $n$ , est une base hilbertienne de  $L^2(-1, 1)$ . Une telle famille est obtenue simplement, aux signes près, en prenant  $p_0 = 1/\sqrt{2}$ , puis  $p_n$  de degré  $n$ , unitaire et orthogonal au sous-espace des polynômes de degré  $n - 1$ . La famille  $(L_n)_{n \geq 0}$  des polynômes de Legendre est une famille de polynômes orthogonaux :  $L_n, n \geq 0$  n'est pas unitaire dans  $L^2(-1, 1)$ , mais normalisé avec  $L_n(1) = 1$ .

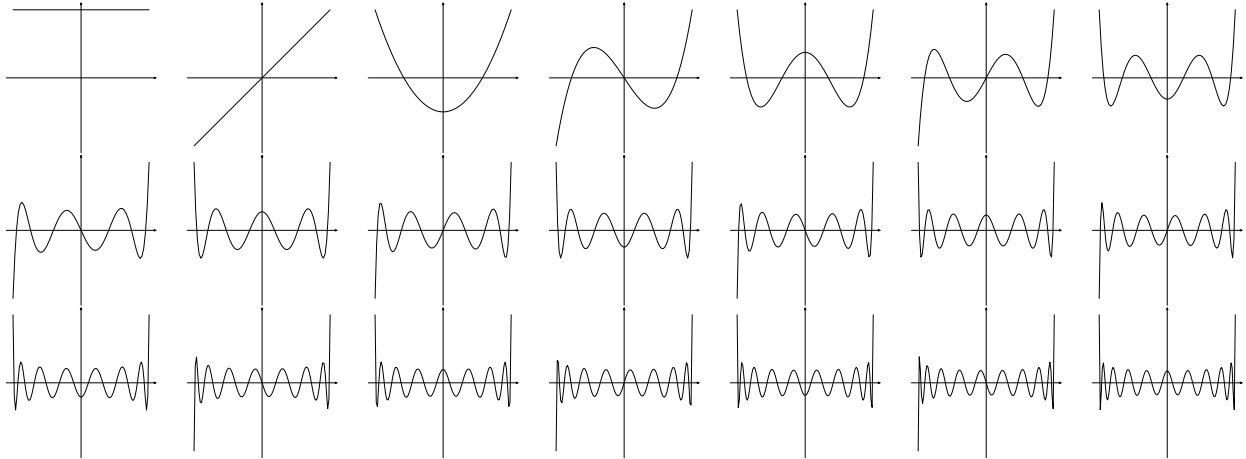


FIGURE 4 . Les polynômes de Legendre  $L_n$  sur  $[-1, 1]$  pour  $n = 0, \dots, 20$ .

**Théorème/Définition 2.2.** La famille des polynômes de Legendre  $(L_n)_{n \geq 0}$  est caractérisée par l'une des trois présentations suivantes

1. Les  $L_n$  sont donnés par la fonction génératrice

$$(9) \quad L(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t)x^n$$

où  $x$  est suffisamment petit.

2. Le polynôme  $L_n, n \geq 0$  est défini par la formule de Rodrigues

$$(10) \quad L_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} ((t^2 - 1)^n)$$

3. La suite  $(L_n)_{n \geq 0}$  vérifie la relation de récurrence

$$(11) \quad (n + 1)L_{n+1}(t) = (2n + 1)tL_n(t) - nL_{n-1}(t), \quad n \geq 1$$

avec  $L_0(t) = 1$  et  $L_1(t) = t$ .

La suite  $(L_n)_{n \geq 0}$  est orthogonale dans  $L^2(-1, 1)$ , avec

$$(12) \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^1 L_n(t)^2 dt = \frac{1}{2n + 1}, \quad n \geq 0.$$

Le polynôme  $L_n$  admet la représentation intégrale

$$(13) \quad L_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[ t + \sqrt{t^2 - 1} \cos \varphi \right]^n d\varphi$$

3. Ce théorème, ainsi que l'assertion suivante, est démontré dans le fascicule *Linéarité et convergences*, disponible sur le oueb aux côtés de celui-ci.

et vérifie l'équation différentielle

$$(14) \quad (1 - t^2)y'' - 2ty' + n(n+1)y = 0.$$

*Démonstration.* — Pour  $t$  fixé, la fonction  $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-2xt+x^2}}$  est holomorphe au voisinage de  $x = 0$ , ainsi, d'après Cauchy,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)x^n$$

avec

$$c_n(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{\sqrt{1-2xt+x^2}} \frac{dx}{x^{n+1}}$$

où  $\gamma$  est un petit cercle de centre  $x = 0$  parcouru dans le sens positif. Introduisons  $u = u(x)$  vérifiant

$$(15) \quad 1 - ux = \sqrt{1-2xt+x^2}.$$

Ainsi

$$u = \frac{1 - \sqrt{1-2xt+x^2}}{x} = \frac{2}{1 + \sqrt{1-2xt+x^2}}(t - x/2)$$

parcourt un contour fermé  $\tilde{\gamma}$  autour de  $u = t$  lorsque  $x$  parcourt  $\gamma$ . Développant au carré de (15), on obtient  $x = (2(u-t))/(u^2-1)$ , et en prenant la différentielle de (15)

$$\frac{dx}{x\sqrt{1-2xt+x^2}} = \frac{du}{u-x}.$$

On en déduit

$$(16) \quad c_n(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{(u^2-1)^n}{2^n(u-t)^{n+1}} du$$

soit, par la formule de Cauchy

$$c_n(t) = \frac{1}{n!2^n} \left[ \frac{d^n(u^2-1)^n}{du^n} \right]_{u=t} = L_n(t).$$

En prenant dans (16) comme contour  $\tilde{\gamma}$  le cercle de centre  $t$  et de rayon  $\sqrt{|t^2-1|}$ , soit  $u(\varphi) = t + \sqrt{t^2-1}e^{j\varphi}$ ,  $\varphi \in [-\pi, \pi]$  on obtient

$$\begin{aligned} L_n(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{t^2 + 2t\sqrt{t^2-1}e^{j\varphi} + (t^2-1)e^{2j\varphi} - 1}{2\sqrt{t^2-1}e^{j\varphi}} \right]^n d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[ t + \sqrt{t^2-1} \cos \varphi \right]^n d\varphi \end{aligned}$$

La dérivée  $\partial_x L$  vérifie

$$(1 - 2tx + x^2)\partial_x L + (x-t)L = 0,$$

d'où en substituant la série et sa dérivée (obtenue par dérivation terme à terme), on a

$$(1 - 2tx + x^2) \sum_{n \geq 0} nL_n(t)x^{n-1} + (x-t) \sum_{n \geq 0} L_n(t)x^n = 0$$

soit en prenant les termes de degré  $n$  en  $x$ ,

$$(n+1)L_{n+1}(t) = (2n+1)tL_n(t) - nL_{n-1}(t), \quad n \geq 1,$$

i. e. la relation de récurrence (11).

En développant la formule de Rodrigues, on obtient

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}$$

ainsi  $L_n(t) \leq L_n(ja)/j^n$  pour  $t$  complexe de module au plus  $a$ . Ainsi,  $x$  étant fixé, il y a convergence uniforme de la série  $L(x, t)$  sur  $\{t \in \mathbb{R}, |t| \leq a\}$  : s'agissant de fonctions holomorphes, on peut dériver terme à terme. On peut dériver par rapport à  $t$  la série donnant la fonction génératrice  $L$ . La relation  $(1 - 2tx + x^2)\partial_t L = xL$  donne en dérivant terme à terme (ce qui est légitime)

$$(17) \quad L'_{n+1} - 2tL'_n + L'_{n-1} - L_n = 0$$

Éliminant entre cette équation et celle obtenue en dérivant (11) le terme  $L'_{n-1}$ , puis  $L'_{n+1}$  on obtient

$$(18) \quad L'_{n+1} - tL'_n = (n+1)L_n,$$

$$(19) \quad tL'_n - tL'_{n-1} = nL_n.$$

En remplaçant  $n$  par  $n-1$  dans (18) et éliminant  $L'_{n-1}$  avec (19), on obtient

$$(1-t^2)L'_n = nL_{n-1} - ntL_n,$$

qui dérivé, et après élimination de  $L'_{n-1}$  en utilisant (19), donne

$$[(1-t^2)L_n]' + n(n+1)L_n = 0.$$

C'est l'équation (14).

L'orthogonalité des polynômes de Legendre en résulte : la différence des équations différentielles (14) pour les indices  $m$  et  $n$  est

$$[(1-x^2)(L'_m L_n - L'_n L_m)]' + (m-n)(m+n+1)L_m L_n = 0$$

qui intégrée donne

$$(m-n) \int_{-1}^1 L_m(t)L_n(t)dt = 0$$

d'où l'orthogonalité de la famille  $(L_n)$ . Pour calculer  $\int_{-1}^1 L_n^2(t)dt$ , on élimine le terme  $xL_n L_{n+1}$  des équations obtenues en multipliant (11) par  $L_{n+1}$  et cette même équation (11) au rang  $n+1$  par  $L_n$  :

$$(n+1)(2n+3)L_{n+1}^2 + n(2n+3)L_{n-1}L_{n+1} - (n+2)(2n+1)L_n L_{n+2} - (n+1)(2n+1)L_n^2 = 0$$

d'où par intégration, et en utilisant l'orthogonalité démontrée précédemment,

$$(n+1)(2n+3) \int_{-1}^1 L_{n+1}^2(t)dt = (n+1)(2n+1) \int_{-1}^1 L_n^2(t)dt$$

soit

$$\int_{-1}^1 L_{n+1}^2(t)dt = \frac{2n+1}{2n+3} \int_{-1}^1 L_n^2(t)dt$$

et la formule (12) □

$\triangle$  **Remarque 2.2.** La fonction génératrice (9) permet l'expression du dipôle de l'électrostatique ou de la gravitation newtonienne en terme de série de polynômes de Legendre. Soit  $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^3$ . En prenant dans la formule (9)  $x = \|\vec{r}_1\|/\|\vec{r}_2\|$  et  $t = \cos(\widehat{\vec{r}_1, \vec{r}_2})$  le cosinus de l'angle  $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  et en ayant supposé  $\|\vec{r}_1\| < \|\vec{r}_2\|$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|} &= \frac{1}{\sqrt{\|\vec{r}_1\|^2 - 2\|\vec{r}_1\|\|\vec{r}_2\|\cos(\widehat{\vec{r}_1, \vec{r}_2}) + \|\vec{r}_2\|^2}} \\ &= \frac{1}{\|\vec{r}_2\|} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\|\vec{r}_1\|\|\vec{r}_2\|^{-1}\cos(\widehat{\vec{r}_1, \vec{r}_2}) + (\|\vec{r}_1\|\|\vec{r}_2\|^{-1})^2}} \end{aligned}$$

soit, grâce à (9) l'expression du dipôle

$$(20) \quad \frac{1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|} = \sum_{n \geq 0} \left( \frac{\|\vec{r}_1\|}{\|\vec{r}_2\|} \right)^n \frac{L_n(\cos(\widehat{\vec{r}_1, \vec{r}_2}))}{\|\vec{r}_2\|}. \quad \nabla$$

L'expression des polynômes de Legendre à partir de la fonction génératrice  $L(x, t)$  donne par ailleurs quelques valeurs particulières

**Corollaire 2.1.** *Le polynôme de Legendre  $L_n$  est (im)pair si  $n$  est (im)pair, et vérifie*

$$L_n(1) = 1, \quad L_n(-1) = (-1)^n, \quad L_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}, \quad L_{2n-1}(0) = 0.$$

**Définition 2.1.** Les coefficients de Legendre<sup>(4)</sup>  $(\ell_n(f))_{n \geq 0}$  d'une fonction  $f$  intégrable sur  $(-1, 1)$  sont définis par

$$\ell_n(f) = \int_{-1}^1 f(t)L_n(t)dt, \quad n \geq 0.$$

4. On prendra garde aux normalisations : dans l'espace de Hilbert  $L^2(-1, 1)$  avec le produit scalaire  $2^{-1} \int_{-1}^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ , les coordonnées de  $f$  dans la base orthonormée  $(\sqrt{2n+1}L_n)_{n \geq 0}$  sont les coefficients  $\sqrt{n+1/2}\ell_n(f)$ .

De manière plus générale, si  $U$  est une distribution à support dans  $(-1, 1)$ , ses coefficients de Legendre sont définis par

$$\ell_n(U) = \langle U, L_n \rangle, \quad n \geq 0.$$

La suite  $(\sqrt{2n+1}L_n)$  étant une base orthonormée de  $L^2(-1, 1)$ , on a le développement en série de polynômes de Legendre suivant la convergence quadratique pour toute fonction de carré intégrable sur  $[-1, 1]$  :

**Théorème 2.5.** Soit  $f$  une fonction de carré intégrable sur  $[-1, 1]$ . Alors, dans  $L^2(-1, 1)$ ,

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2)\ell_n(f)L_n,$$

et on a la relation de Bessel-Parseval

$$\int_{-1}^1 |f(t)|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2)|\ell_n(f)|^2.$$

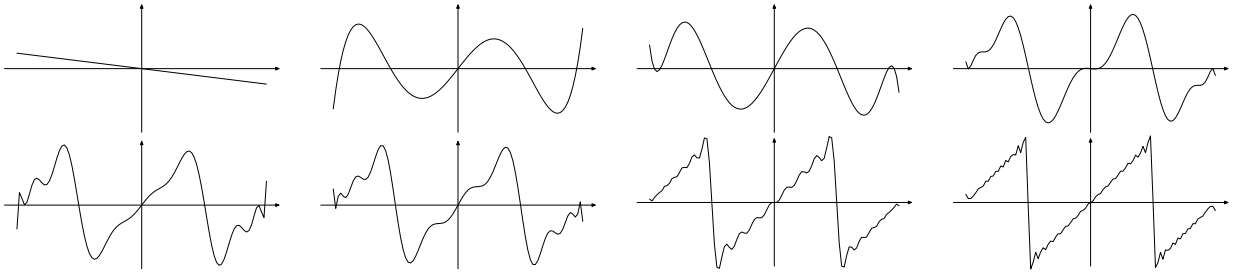


FIGURE 5 . Approximations de la fonction  $f_1$  définie sur  $[-1, 1]$  par  $f_1(t) = t$  si  $|t| < 1/2$  et  $f_1(t) = t - \text{sgn}(t)$  si  $|t| \geq 1/2$  par la somme de polynômes de Legendre  $\sum_{n=0}^N (n+1/2)\ell_n(f_1)L_n$  pour  $N = 2, 6, 10, 14, 18, 22, 50, 100$ .

Comme pour les séries de Fourier, on a des résultats de convergence ponctuelles si la fonction est plus régulière que simplement de carré intégrable.

**Théorème 2.6.** Soit  $h$  fonction  $C^\infty$  sur  $[-1, 1]$ . Alors les coefficients de Legendre  $\ell_n(h) = \int_{-1}^1 h(u)L_n(u)du$  de  $h$  sont à décroissance rapide et

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2)\ell_n(h)L_n(t), \quad t \in [-1, 1]$$

avec convergence absolue de la série, ainsi que pour ses dérivées terme à terme.

*Démonstration.* — L'équation différentielle (14) s'écrit  $((1-t^2)L'_n)' + n(n+1)L_n = 0$ , ainsi en intégrant par partie

$$\ell_n(h) = -\frac{1}{n(n+1)} \int_{-1}^1 L_n(t)[(1-t^2)h'(t)]' dt = \frac{1}{(n(n+1))^k} \int_{-1}^1 L_n(t)\mathcal{D}_L^k(h) dt$$

où on a introduit l'opérateur différentiel  $\mathcal{D}_L$  défini pour une fonction  $f$  deux fois dérivable sur  $[-1, 1]$  par

$$\mathcal{D}_L(f)(t) = -[(1-t^2)f'(t)]', \quad t \in [-1, 1].$$

La convergence de la série en résulte, en observant que  $L_n$  est borné sur  $(-1, 1)$  d'après la formule de représentation intégrale (13) et des majorations analogues pour ses dérivées.  $\square$

Le théorème de Dirichlet (cf. Théorème 2.3) pour les séries de Fourier a son analogue pour les séries de Legendre.

**Théorème\* 2.7.** Soit  $f$  continue par morceaux sur  $(-1, 1)$ , ayant des limites à droite et à gauche en tout point. Alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N (n + 1/2) \ell_n(f) L_n(t) = \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2}, \quad t \in (-1, 1).$$

On a même un théorème de développement de Legendre de distributions.

**Théorème\* 2.8.** Soit  $U$  une distribution tempérée à support dans  $(-1, 1)$ . Alors

$$U = \sum_{n \geq 0} (n + 1/2) \langle U, L_n \rangle L_n,$$

avec convergence au sens distribution.

▷ **Exemples 2.3.**

1. En utilisant la formule de Rodrigues (10) et  $n$  intégrations par parties, on obtient pour  $u \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \langle e^{jtu}, L_n \rangle &= \int_{-1}^1 e^{jtu} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} ((t^2 - 1)^n) dt = \frac{(-ju)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 e^{jtu} (t^2 - 1)^n dt \\ &= \frac{(ju)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 \cos(tu) (1 - t^2)^n dt. \end{aligned}$$

Vu la représentation intégrale (41) ci-après, les coefficients de Legendre de l'exponentielle  $e^{jtu}$  s'expriment en terme de fonction de Bessel

$$(21) \quad \langle e^{jtu}, L_n \rangle = j^n \sqrt{2\pi} \frac{J_{n+1/2}(u)}{\sqrt{u}},$$

soit la décomposition de Rayleigh

$$e^{jut} = \sum_{n \geq 0} (2n + 1) j^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{J_{n+1/2}(u)}{\sqrt{u}} L_n(t), \quad t \in (-1, 1).$$

2. Soit, pour  $\alpha \in (-1, 1)$ , la fonction caractéristique  $f_\alpha$  de l'intervalle  $[\alpha, 1]$ . La somme de (17) et (18) donnent

$$L'_{n+1} - L'_{n-1} = (2n + 1) L_n, \quad n \geq 1,$$

ainsi

$$(2n + 1) \int_{\alpha}^1 L_n(t) dt = \int_{\alpha}^1 [L'_{n+1}(t) - L'_{n-1}(t)] dt = L_{n-1}(\alpha) - L_{n+1}(\alpha), \quad n \geq 1,$$

et

$$f_\alpha = \frac{1}{2}(1 - \alpha) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [L_{n-1}(\alpha) - L_{n+1}(\alpha)] L_n.$$

avec convergences comme décrites dans les théorèmes 2.5 et 2.7.

3. Pour la fonction  $f(t) = \sqrt{(1-t)/2}$ , on multiplie la définition (9) de la fonction génératrice par  $f$ , puis on intègre les deux membres. L'intégration terme à terme du membre de droite est justifiée par la majoration  $|L_n(t)| \leq 1, t \in [-1, 1]$  obtenue à partir de (13) et on utilise le changement de variable  $\sqrt{1-t} = (1-x)(2x)^{-1/2} \operatorname{sh} v$  pour le membre de gauche :

$$\frac{1}{2x} \left[ 1 + x - \frac{(1-x)^2}{2\sqrt{x}} \log \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{2}} L_n(t) dt, \quad |x| < 1.$$

Le membre de gauche admet le développement

$$\frac{4}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(4n^2 - 1)(2n + 3)}$$

On en déduit

$$\sqrt{\frac{1-t}{2}} = \frac{2}{3}L_0(t) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n(t)}{(2n-1)(2n+3)}. \quad \triangleleft$$

Les graphes de la figure 4 ont été tracés en utilisant la relation de récurrence (11) : la commande

```
with(orthopoly); for i to 6 P(i,t) od;
```

adressée à `maple`<sup>TM</sup> donne les expressions des polynômes de Legendre  $L_0, \dots, L_6$ .

$$L_0(t) = 1, L_1(t) = t, L_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), L_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), L_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3), \\ L_5(t) = \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t), L_6(t) = \frac{1}{16}(231t^6 - 315t^4 + 105t^2 - 5).$$

Les polynômes de Legendre sont bien sûr aussi disponibles sur `matlab`<sup>TM</sup>.

### 2.3. Polynômes de Chebyshev

Dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{T}_1$  défini par

$$\mathcal{T}_1 = L^2([-1, 1], (1-t^2)^{-1/2} dt) = \left\{ f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{C}, \int_{-1}^1 |f(t)|^2 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} < +\infty \right\}$$

avec le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) \overline{g(t)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

le sous-espace des fonctions polynomiales est dense. Comme pour  $L^2(-1, 1)$  et les polynômes de Legendre, toute famille orthonormée de polynômes  $(p_n)_{n \geq 0}$ , avec  $p_n$  de degré  $n$ , est une base hilbertienne de l'espace  $\mathcal{T}_1$ . La famille  $(T_n)_{n \geq 0}$  des polynômes de Chebyshev est une famille de polynômes orthogonaux : les polynômes  $T_n$  sont normalisés avec  $T_n(1) = 1, n \geq 0$ .

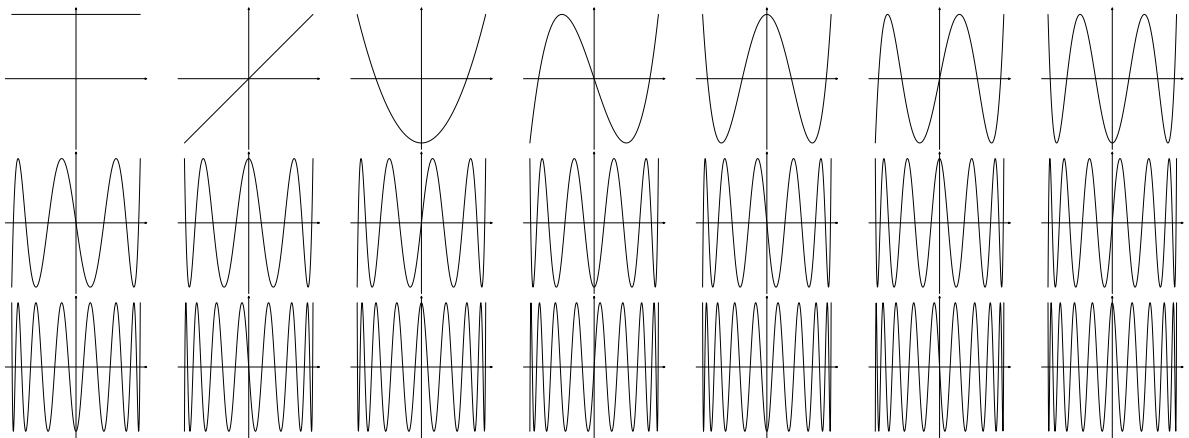


FIGURE 6 . Les polynômes de Chebyshev  $T_n$  sur  $[-1, 1]$  pour  $n = 0, \dots, 20$ .

**Théorème/Définition\* 2.3.** La famille des polynômes de Chebyshev  $(T_n)_{n \geq 0}$  est caractérisée par l'une des trois présentations suivantes

1. Les  $T_n$  sont donnés par la fonction génératrice

$$(22) \quad T(x, t) = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)x^n$$

où  $x$  est suffisamment petit.

2. Le polynôme  $T_n, n \geq 0$  est défini par la formule de Rodrigues

$$T_n(t) = \frac{(-1)^n 2^{2n-1} (n-1)!}{(2n)!} \sqrt{1-t^2} \frac{d^n}{dt^n} ((1-t^2)^{n-1/2})$$

3. La suite  $(T_n)_{n \geq 0}$  vérifie la relation de récurrence

$$(23) \quad T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), \quad n \geq 1$$

avec  $T_0(t) = 1$  et  $T_1(t) = t$ .

La suite  $T_0, (\sqrt{2}T_n)_{n > 0}$  est orthonormée dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{T}_1$ .

Le polynôme  $T_n$  vérifie la relation

$$(24) \quad T_n(t) = \cos(n \arccos(t)) \quad t \in [-1, 1],$$

a comme développement et factorisation

$$T_n(t) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2m} t^{n-2m} (t^2 - 1)^m = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n \left[ t - \cos \left( \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) \right]$$

et satisfait l'équation différentielle

$$(25) \quad (1-t^2)y'' + ty' + n^2y = 0.$$

L'expression des polynômes de Chebyshev à partir de la fonction génératrice donne quelques valeurs particulières

**Corollaire 2.2.** Le polynôme de Chebyshev  $T_n$  est (im)pair si  $n$  est (im)pair, et vérifie

$$T_n(1) = 1, \quad T_n(-1) = (-1)^n, \quad T_{2n}(0) = 1, \quad T_{2n-1}(0) = 0.$$

On définit comme pour les polynômes de Legendre la suite  $(t_n(f))_{n \geq 0}$  des coefficients de Chebyshev d'une fonction  $f$  intégrable sur  $(-1, 1)$  relativement à la mesure  $(1-t^2)^{-1/2}$  ou d'une distribution  $U$  à support dans  $(-1, 1)$

$$t_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) T_n(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad t_n(U) = \langle U, \pi^{-1} T_n(t) (1-t^2)^{-1/2} \rangle.$$

Les théorèmes 2.5, 2.6, 2.7, 2.8 ont leur équivalent pour les coefficients de Chebyshev. Ils concernent la convergence de la série suivant diverses topologies, et son égalité avec la fonction (voire la distribution)  $f$  avec comme suite de coefficients de Chebyshev  $(t_n(f))_{n \geq 0}$

$$f(t) = t_0(f) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} t_n(f) T_n(t), \quad t \in (-1, 1).$$

Il est inutile de les reproduire ici.

△ **Remarque 2.3.** En effectuant le changement de variable  $t = \cos(\pi u), u \in (0, 1)$ , on introduit un isomorphisme isométrique entre l'espace  $\mathcal{T}_1$  et l'espace  $L^2(0, 1)$ , le développement



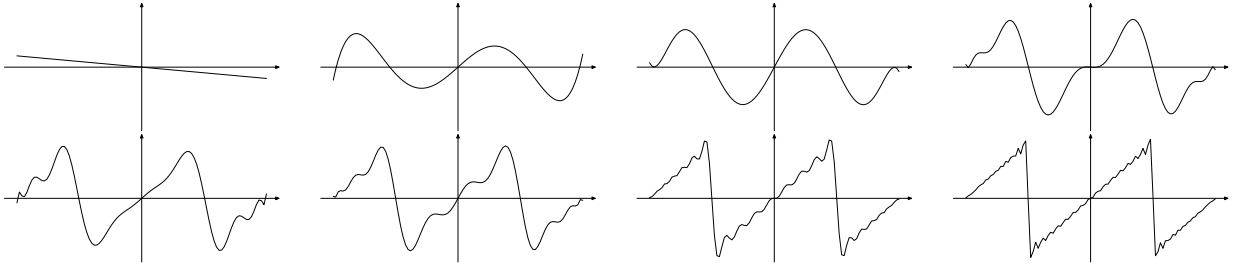


FIGURE 7 . Approximations de la fonction  $f_1$  définie sur  $[-1, 1]$  par  $f_1(t) = t$  si  $|t| < 1/2$  et  $f_1(t) = t - \text{sgn}(t)$  si  $|t| \geq 1/2$  par la somme de polynômes de Chebyshev  $\sum_{n=0}^N t_n(f_1)T_n$  pour  $N = 2, 6, 10, 14, 18, 22, 50, 100$ .

en série de polynômes de Chebyshev se ramenant en un développement en série de cosinus (cf Exo. 1.5.8)

$$\begin{aligned}
 f(t) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} &= 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(\tau) T_n(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} T_n(t) \\
 &= 2 \sum_{n \geq 1} \int_0^1 f(\cos \pi\nu) T_n(\cos \pi\nu) d\nu T_n(\cos \pi u) \\
 &= 2 \sum_{n \geq 1} \int_0^1 f(\cos \pi\nu) \cos(n\pi\nu) d\nu \cos(n\pi u) \\
 &= f(\cos \pi u) - \int_0^1 f(\cos \pi\nu) d\nu
 \end{aligned}$$

Cela éclaire la simplicité de la forme (24) des polynômes de Chebyshev : la théorie analogue développée dans l'espace  $\mathcal{T}_\alpha = L^2([-1, 1], (1-t^2)^{-\alpha/2} dt)$ ,  $\alpha < 2$  introduit des systèmes de polynômes orthogonaux de Gegenbauer  $(T_n(\alpha))_{n \geq 0}$ , cas particuliers des familles polynomiales dites Jacobi, sans expression aussi simple que pour les polynômes de Chebyshev.

## 2.4. Fonctions d'Hermite

L'espace de Hilbert

$$L^2(\mathbb{R}, e^{-t^2}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 e^{-t^2} dt < +\infty \right\}$$

contient les fonctions polynômes.

**Proposition 2.1.** *L'espace des fonctions polynômes est dense dans l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}, e^{-t^2})$ .*

*Démonstration.* — Soit  $f \in L^2(\mathbb{R}, e^{-t^2})$  orthogonale à tous les polynômes  $t^n$ ,  $n \leq 0$ . Vu

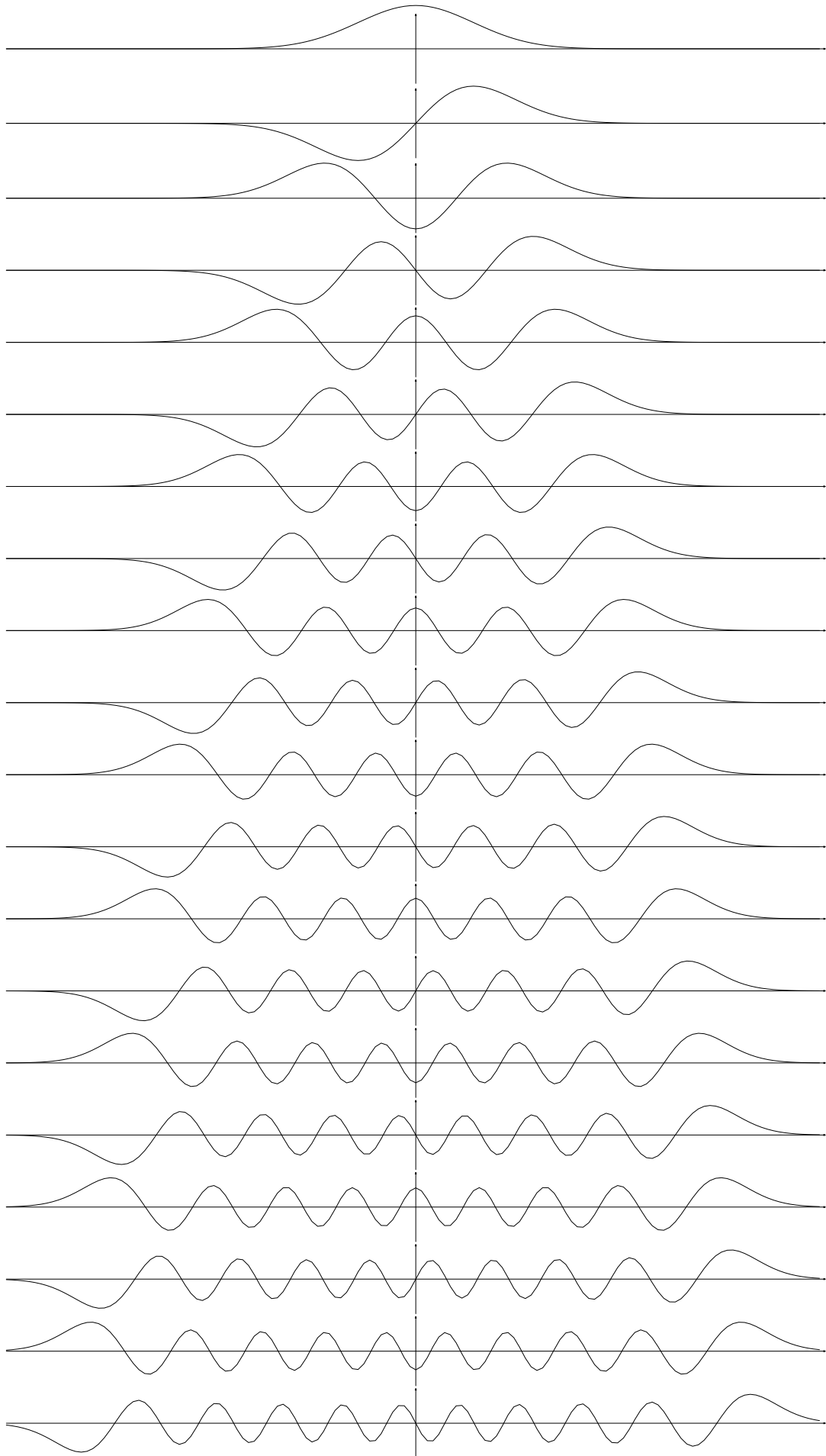
$$\left[ \int_{\mathbb{R}} |e^{-tp} f(t) e^{-t^2}|^2 dt \right]^2 \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-2t \Re p} e^{-t^2} dt \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 e^{-t^2} dt,$$

la transformée de Laplace

$$\mathcal{L}(f(t)e^{-t^2})(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-tp} f(t) e^{-t^2} dt$$

est définie holomorphe sur  $\mathbb{C}$ . Ses dérivées en  $p = 0$

$$\frac{d^n \mathcal{L}(f(t)e^{-t^2})}{dp^n}(0) = \int_{\mathbb{R}} (-t)^n f(t) e^{-t^2} dt$$

FIGURE 8 . Les fonctions d'Hermite  $h_n$  pour  $n = 0, \dots, 19$ .

sont toutes nulles,  $\mathcal{L}(f(t)e^{-t^2})$  est nulle et donc aussi  $f$ , d'après l'injectivité de la transformation de Laplace  $\mathcal{L}$ .  $\square$

Ce qui a été énoncé ci-dessus pour les polynômes de Legendre et l'espace de Hilbert  $L^2([-1, 1])$  se développe de manière analogue dans l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}, e^{-t^2})$ , comme l'indique le théorème suivant

**Théorème/Définition\* 2.4.** *La famille des polynômes de Hermite  $(H_n)_{n \geq 0}$  est caractérisée par l'une des trois présentations suivantes*

1. Les  $H_n$  sont donnés par la fonction génératrice

$$(26) \quad H(x, t) = e^{-2tx - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(t)x^n.$$

2. Le polynôme  $H_n, n \geq 0$  est défini par la formule de Rodrigues

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}.$$

3. La suite  $(H_n)_{n \geq 0}$  vérifie la relation de récurrence

$$(27) \quad H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t), \quad n \geq 1,$$

avec  $H_0(t) = 1$  et  $H_1(t) = 2t$ .

La suite  $(H_n)_{n \geq 1}$  est orthogonale dans  $L^2(\mathbb{R}, e^{-t^2} dt)$  avec

$$(28) \quad \int_{\mathbb{R}} H_n^2(t) e^{-t^2} dt = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

La famille  $(\tilde{H}_n)_{n \geq 0}$  des polynômes d'Hermite unitaires  $\tilde{H}_n = H_n / \sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}$  est une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R}, e^{-t^2} dt)$ .

Le polynôme  $H_n$  vérifie l'équation différentielle

$$(29) \quad H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0$$

**Définition 2.2.** Les fonctions d'Hermite, définies suivant,

$$h_n(t) = \tilde{H}_n(t) e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R}, n \geq 0.$$

constituent une base orthonormée de l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$ .

Les polynômes de Hermite sont disponibles dans la bibliothèque de fonctions spéciales de `maple`<sup>TM</sup>, mais apparemment pas dans celle de `matlab`<sup>TM</sup>.

## 2.5. Système de Haar

Pour  $a < b$ , soit  $\Pi_{[a,b]}$  la fonction caractéristique de l'intervalle  $[a, b]$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\Pi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \leq t \leq b, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'ensemble des fonctions  $\Pi_{[a,b]}, a, b \in \mathbb{R}$  engendre linéairement l'espace des fonctions en escalier à support compact, qui est dense dans l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$ .

Il en est donc de même du sous-espace  $V_\infty$  engendré par les fonctions  $\Pi_{[a,b]}$  avec les extrémités  $a, b$  dans l'ensemble des rationnels dyadiques  $D_\infty = \{k2^{-\ell}, k \in \mathbb{Z}, \ell \in \mathbb{N}\}$ . Ainsi toute famille orthonormée engendrant linéairement le sous-espace  $V_\infty$  est une base hilbertienne du Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$ .

Si, pour  $N \in \mathbb{Z}$ ,  $V_N$  désigne le sous-espace des fonctions en escalier à discontinuités dans l'ensemble  $D_N = \{k2^{-N}, k \in \mathbb{Z}\}$  des dyadiques de niveau  $N$ , la famille  $(V_N)_{N \in \mathbb{Z}}$  vérifie les propriétés suivantes, dont la preuve est rapide,

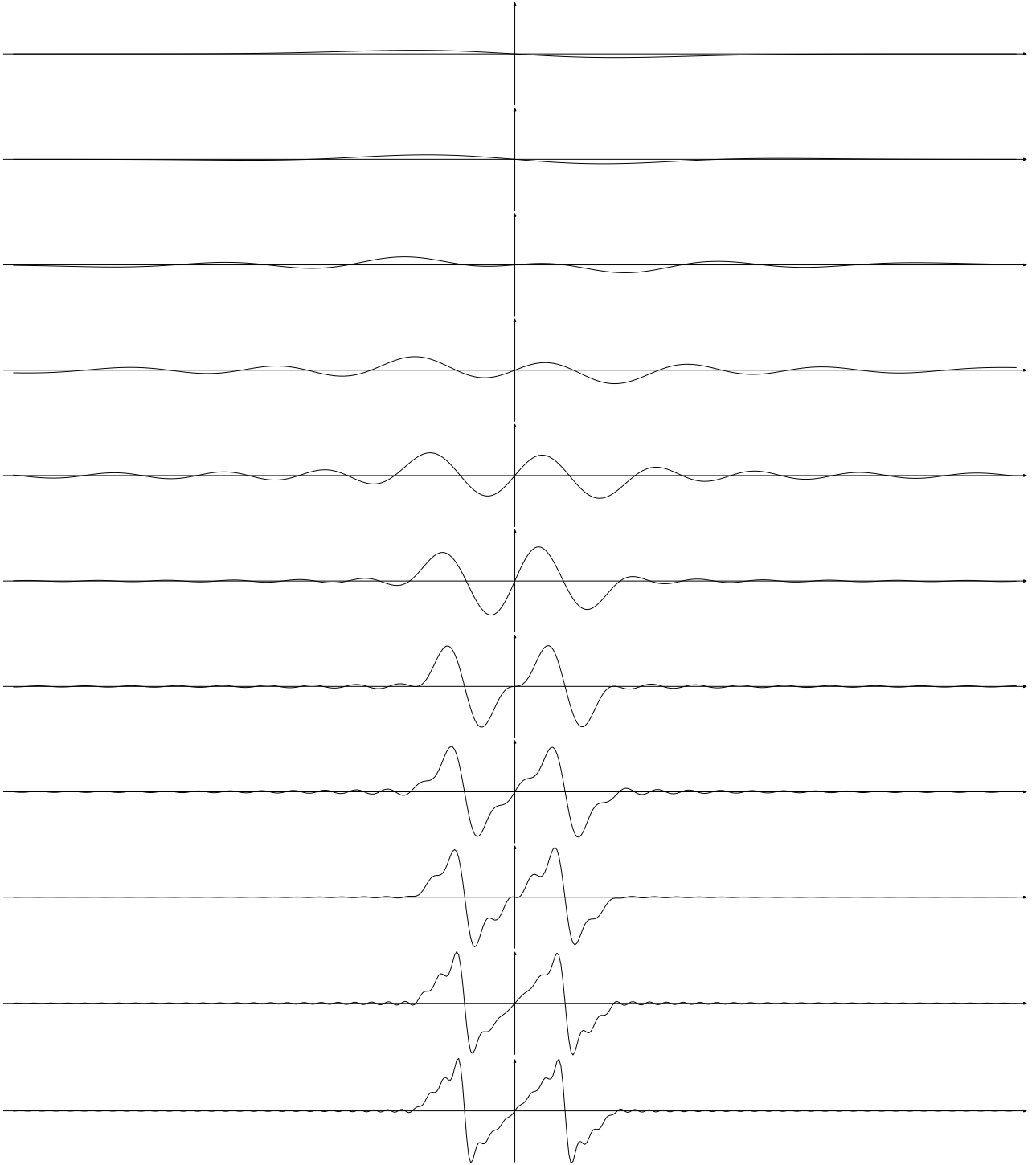
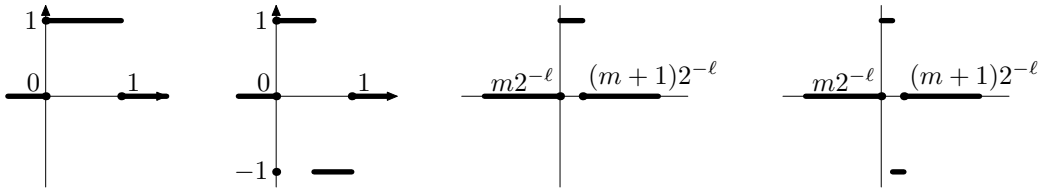


FIGURE 9 . Approximations sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f_1$  à support  $[-1, 1]$  et telle que  $f_1(t) = t$  si  $|t| < 1/2$  et  $f_1(t) = t - \text{sgn}(t)$  si  $|t| \geq 1/2$  par la somme de polynômes d'Hermite  $\sum_{n=0}^N \|H_n\|^{-2} \langle f_T, H_n \rangle H_n$  pour  $N = 2, 6, 10, 14, 22, 50, 100, 200, 400, 700, 1000$ .

1.  $V_N \subset V_{N+1}$  pour  $N \in \mathbb{Z}$ ,
2.  $\cup_{N \in \mathbb{Z}} V_N = V_\infty$ ,  $\cap_{N \in \mathbb{Z}} V_N = \{0\}$ ,
3. L'espace  $V_0$  est stable par la translation entière  $\tau_1 : \tau_1(f)(t) = f(t - 1), t \in \mathbb{R}$ .
4. Le changement d'échelle  $h$  définie par  $h(f)(t) = \sqrt{2}f(2t)$  applique isométriquement  $V_N$  sur  $V_{N+1}$ .

FIGURE 10 . Les ondelettes de Haar  $\varphi, \psi$ , ainsi que  $\varphi_{\ell, m}, \psi_{\ell, m}$ .

**Théorème 2.9.** Soient  $\varphi = \Pi_{[0,1]}$ ,  $\psi = \sqrt{2}[h\varphi - h\tau_1\varphi]$  et  $\varphi_{\ell, m} = h^\ell \tau_m \varphi$ ,  $\psi_{\ell, m} = h^\ell \tau_m \psi$  pour  $m, \ell \in \mathbb{Z}$ .

Alors la famille  $(\varphi_{\ell, m})_{m \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $\overline{V}_\ell$  et la famille  $(\psi_{\ell, m})_{\ell, m \in \mathbb{Z}}$ , dit système de Haar, est une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ .

*Démonstration.* — La famille  $(\varphi_{0, m})_{m \in \mathbb{Z}}$  est une base de  $\overline{V}_0$ ; par changement d'échelle  $h^\ell$  il en est de même pour  $(\varphi_{\ell, m})_{m \in \mathbb{Z}}$  et  $\overline{V}_\ell$ .

Soit une fonction  $f$  de l'orthogonal  $W_0$  de  $V_0$  dans  $V_1$ . Alors, il existe des complexes  $f_m, m \in \mathbb{Z}$  tels que

$$f = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m \varphi_{1, m}.$$

L'orthogonalité avec  $\varphi_{0, M}$  donne  $f_M + f_{M+1} = 0$ , d'où

$$f = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_{2M} [\varphi_{1, 2M} - \varphi_{1, 2M+1}] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_{2M} \sqrt{2} \psi_{0, M}.$$

On en déduit que  $(\psi_{0, M})_{M \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $W_0$ . Comme précédemment, par changement d'échelle,  $(\psi_{\ell, m})_{m \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $W_\ell$ , orthogonal de  $V_\ell$  dans  $V_{\ell+1}$ . On conclut en remarquant que  $L^2 = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}} W_\ell$ .  $\square$

Ainsi, si pour  $f \in L^2(\mathbb{R})$  les scalaires  $f_{\ell, m}$  désignent les coefficients de  $f$  dans le système de Haar, à savoir,  $(\psi_{\ell, m})_{\ell, m \in \mathbb{Z}}$ ,

$$f_{\ell, m} = \int_{\mathbb{R}} \psi_{\ell, m}(t) f(t) dt = \int_{\mathbb{R}} 2^{\ell/2} \psi(2^\ell t - m) f(t) dt,$$

on a, pour la convergence  $L^2$ ,

$$f(t) = \sum_{\ell, m \in \mathbb{Z}} f_{\ell, m} \psi_{\ell, m}(t) = \sum_{\ell, m \in \mathbb{Z}} f_{\ell, m} 2^{\ell/2} \psi(2^\ell t - m)$$

Si  $f$  est à support compact, l'approximation  $f_L, L \in \mathbb{N}$  définie par

$$f_L(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{L-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_{\ell, m} \psi_{\ell, m}(t)$$

est une somme finie, avec discontinuités dans l'ensemble  $D_L$  des dyadiques de niveau  $L$ . C'est un élément de  $V_L$ , en fait la projection de  $f$  sur ce sous-espace vu que

$$\langle f_L, \varphi_{L, n} \rangle = \sum_{\ell=-\infty}^{L-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{\ell, m} \rangle \langle \psi_{\ell, m}, \varphi_{L, n} \rangle = \langle f, \varphi_{L, n} \rangle.$$

**Proposition 2.2.** Soit  $f$  fonction continue sur  $\mathbb{R}$  à support compact. Alors la suite  $(f_M)_{M \geq 0}$  définie par

$$f_L(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{L-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_{\ell, m} \psi_{\ell, m}(t)$$

converge vers  $f$  uniformément.

*Démonstration.* — Soit  $\varepsilon > 0$ . La fonction  $f$ , continue et à support compact, est uniformément continue. Ainsi, il existe  $\ell$  tel que si  $|t - t'| \leq 2^{-\ell}$ , alors  $|f(t) - f(t')| \leq \varepsilon$ . Ainsi, pour  $t$  dans  $[m2^{-\ell}, (m+1)2^{-\ell}]$ , on a

$$f_\ell(t) = 2^{\ell/2} \int_{m2^{-\ell}}^{(m+1)2^{-\ell}} f(u) du 2^{\ell/2} \varphi(2^\ell t - m)$$

puisqu'il y a tous les autres termes de la série sont nuls dans cet intervalle, et par suite

$$|f_\ell(t) - f(t)| = 2^\ell \left| \int_{m2^{-\ell}}^{(m+1)2^{-\ell}} [f(u) - f(t)] \right| \leq \varepsilon,$$

ce qui achève la preuve.  $\square$

La proposition précédente approche une fonction continue par des fonctions en escalier : c'est un des inconvénients du système de Haar. La théorie des ondelettes introduit des couples de fonctions  $\phi, \psi$  à support compact, dérivables autant de fois que désiré et qui donnent lieu à des analyses du même type que le système de Haar : le système  $(h^\ell \tau_m \psi)_{\ell \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$  et les espaces  $V_\ell$ , dont  $(h^\ell \tau_m \psi)_{m \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée, vérifient les propriétés du théorème 2.9.

## 2.6. Exercices

1. Soit  $f$  une fonction définie sur  $(0, 1)$  telle que  $\int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty$ . En considérant les développements de Fourier d'une fonction  $f_p$  (resp.  $f_i$ ) paire (resp. impaire) sur  $(-1, 1)$  qui coïncide avec  $f$  sur  $(0, 1)$ , montrer les développements dans  $L^2(0, 1)$  en série de cosinus et sinus

$$f(t) = \int_0^1 f(u) du + 2 \sum_{n>0} \int_0^1 f(u) \cos(n\pi u) du \cos(n\pi t),$$

$$f(t) = 2 \sum_{n>0} \int_0^1 f(u) \sin(n\pi u) du \sin(n\pi t).$$

Formuler sous des hypothèses appropriées des résultats de convergence simple pour les représentations précédentes et appliquer les à la fonction  $f_0$  définie par

$$f_0(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ t - 1/2, & \text{si } 1/2 < t \leq 1. \end{cases}$$

2. Soient  $\mathcal{L}$  l'application définie sur l'ensemble  $\mathcal{C}^\infty([-1, 1])$  des fonctions indéfiniment dérivables sur  $[-1, 1]$  par

$$\mathcal{L}f(t) = (1 - t^2)f''(t) - 2tf'(t), \quad t \in [-1, 1], f \in \mathcal{C}^\infty([-1, 1])$$

Montrer que

$$\langle \mathcal{L}f, g \rangle = \langle f, \mathcal{L}g \rangle \quad f, g \in \mathcal{C}^\infty([-1, 1])$$

où  $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$  pour  $p, q \in \mathcal{C}^\infty([-1, 1])$ .

En déduire que pour  $f_i, i = 1, 2$  tels qu'il existe un scalaire  $\lambda_i$  avec  $\mathcal{L}f_i = \lambda_i f_i, i = 1, 2$  et  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , alors  $\langle f_1, f_2 \rangle = 0$ .

3. En utilisant la fonction génératrice définissant la suite de polynômes de Legendre  $(L_n)_{n \geq 0}$

$$(1 - 2xt + x^2)^{-1/2} = \sum_{n \geq 0} L_n(t)x^n$$

calculer  $\int_{-1}^1 L_n(t)dt$  et montrer que  $(n+1)L_n(t) = L'_{n+1}(t) - tL'_n(t)$ .

4. Soient  $Q_0, Q_1$  définis sur l'intervalle  $(-1, 1)$  par

$$Q_0(t) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1+t}{1-t} \right), \quad Q_1(t) = -1 + \frac{1}{2}t \log \left( \frac{1+t}{1-t} \right).$$

Montrer que

$$(1-t^2)Q_0''(t) - 2tQ_0'(t) = 0, \quad (1-t^2)Q_1''(t) - 2tQ_1'(t) = -2Q_1.$$

5. (a) Montrer que

$$\cos(nt) = 2 \cos t \cos((n-1)t) - \cos((n-2)t).$$

En déduire l'existence, pour tout entier  $n \geq 0$ , d'un unique polynôme  $T_n$  tel que

$$T_n(\cos(t)) = \cos(nt), \quad t \in \mathbb{R}.$$

On pourra, après avoir donné explicitement  $T_0, T_1, T_2$ , montrer l'existence de  $T_n$  par une récurrence. Quel est le degré de  $T_n$  ?

- (b) En calculant la partie réelle de  $e^{jnt} = (\cos t + j \sin t)^n$ , montrer que pour  $n \geq 0$

$$T_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}.$$

- (c) Montrer que, pour tout entier  $n \geq 0$ , il existe un polynôme  $Q_n$  tel que

$$\sin t Q_n(\cos(t)) = \sin(nt), \quad t \in \mathbb{R}.$$

On pourra dériver la relation  $\cos(nt) = T_n(\cos(t))$ . Donner explicitement  $Q_0, Q_1, Q_2$ . Quel est le degré de  $Q_n$  ?

Montrer que pour  $n \geq 2$

$$Q_n(X) = 2XQ_{n-1}(X) - Q_{n-2}(X).$$

- (d) Montrer que

$$\begin{aligned} (1 - X^2)Q_n(X)^2 + T_n(X)^2 &= 1, \\ T_n'(X) &= nQ_n(X) \\ (1 - X^2)Q_n'(X) &= XQ_n(X) - nT_n(X). \end{aligned}$$

6. Soit  $T_n$  le polynôme de Chebyshev d'ordre  $n$  tel que  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$  pour  $x \in [-1, 1]$ . Montrer que

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left( \left( x + j\sqrt{1-x^2} \right)^n + \left( x - j\sqrt{1-x^2} \right)^n \right), \quad |x| \leq 1,$$

et en déduire

$$T_n(x) = \operatorname{ch}(n \operatorname{arcch} x), \quad x \geq 1.$$

7. La suite de polynômes de Hermite  $(H_n)_{n \geq 0}$  est caractérisée par la fonction génératrice

$$e^{2xt-x^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{H_n(t)x^n}{n!},$$

En dérivant par rapport à  $t$  l'égalité précédente, montrer que

$$H'_n(t) = 2nH_{n-1}(t), \quad n \geq 1.$$

En dérivant par rapport à  $x$  la définition précédente par fonction génératrice, montrer que

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t), \quad n \geq 1.$$

Montrer

$$H_n\left(\frac{t_1 + t_2}{\sqrt{2}}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{2^{-n/2}k!(n-k)!} H_k(t_1)H_{n-k}(t_2).$$

En utilisant la formule de Taylor pour la fonction  $e^{-x^2}$ , montrer que

$$H_n(t) = e^{t^2} (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2})$$

En déduire que

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(t)H_m(t)e^{-t^2} dt = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m, \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

8. Soit  $(L_n)_{n \geq 0}$  (resp.  $(H_n)_{n \geq 0}$ ) la suite des polynômes de Legendre (resp. Hermite) caractérisées par leur fonction génératrice

$$(1 - 2xt + x^2)^{-1/2} = \sum_{n \geq 0} L_n(t)x^n,$$

$$e^{2xt-x^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{H_n(t)x^n}{n!}.$$

Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \tau^n e^{-\tau^2} H_n(t\tau) d\tau = \sqrt{\pi} n! L_n(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$



# CHAPITRE 3

## FONCTIONS DE BESSEL

### 3.1. Modélisation dans un domaine circulaire

Divers phénomènes physiques portant sur le disque  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ , comme le déplacement vertical  $u$  d'une membrane circulaire ou la propagation de la chaleur  $u$  dans un disque, sont modélisés par une équation aux dérivées partielles portant sur la fonction  $u(x, y, t)$ ,  $(x, y) \in D, t \in \mathbb{R}$  décrivant l'évolution temporelle de l'observable  $u$  :

$$(30) \quad \Delta u = A\partial_t^2 u + B\partial_t u + Cu$$

avec une condition sur le bord  $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$ , par exemple la condition dite de Dirichlet

$$(31) \quad u(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial D.$$

Dans l'équation (30),  $A, B$  sont des constantes et le laplacien  $\Delta$  est l'opérateur différentiel

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$$

en coordonnées cartésiennes, soit

$$\Delta = r^{-1}\partial_r(r\partial_r) + r^{-2}\partial_\varphi^2$$

en coordonnées polaires  $(r, \varphi)$  avec  $(x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi)$ .

Dans le cas de la vibration de la membrane circulaire, on a  $A = 1$  et  $B = 0$ , d'où l'équation des ondes  $\Delta u = \partial_t^2 u$ , pour l'évolution de la température on a l'équation de la chaleur  $\Delta u = \partial_t u$

Les solutions de l'équation (30) du type  $R(r)\Phi(\varphi)T(t)$  vérifient

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \frac{A \frac{d^2 T}{dt^2} + B \frac{dT}{dt} + CT}{T}$$

Les variables  $r, \varphi, T$  étant indépendantes, les membres de l'équation précédente sont constants, soit  $-K$ , d'où les deux équations

$$(32) \quad \begin{aligned} A \frac{d^2 T}{dt^2} + B \frac{dT}{dt} + CT &= -KT \\ \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} &= -K \end{aligned}$$

où la seconde

$$r^2 \left[ \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + K \right] = -\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}$$

se sépare en

$$(33) \quad r^2 \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + KR \right] = LR$$

$$(34) \quad \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + L\Phi = 0$$

Les équations (34) et (32), au contraire de (33), sont résolubles par des fonctions classiques. En particulier, (34) a des solutions du type  $\Phi(\varphi) = \Phi_0 e^{in\varphi}$  avec  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $L = -n^2$ . Alors, l'équation (33) prend alors la forme

$$\frac{d^2R}{dr^2} + r^{-1} \frac{dR}{dr} + (K - n^2 r^{-2}) R = 0$$

soit pour la fonction  $y(r) = R(r/\sqrt{K})$  l'équation différentielle

$$y'' + r^{-1}y' + (1 - n^2 r^{-2})y = 0$$

dite équation de Bessel d'ordre  $n$ .

On obtient donc  $\cos(n(\varphi - \varphi_0))J_n(\sqrt{K}r) \cos(\sqrt{K}(t - t_0))$  comme solution particulière de l'équation des ondes,  $\cos(n(\varphi - \varphi_0))J_n(\sqrt{K}r)e^{-K(t-t_0)}$  pour celle de la chaleur. La théorie générale établit que la solution du problème (30)-(31) peut s'exprimer suivant une série à termes du type précédent, ainsi pour l'équation de la chaleur  $A = C = 0, B = 1$  dans (30) une solution générale de la forme

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n,p} u_{n,p} \cos(n(\varphi - \varphi_{n,p})) J_n(\sqrt{K_{n,p}}r) e^{-K_{n,p}(t-t_0)}$$

où  $K_{n,p}$  est un zéro de la fonction de Bessel  $J_n$  (cf. Section 3.3 ci-dessous) et  $u_{n,p}, \varphi_{n,p}$  des coefficients appropriés.

### 3.2. Les fonctions de Bessel

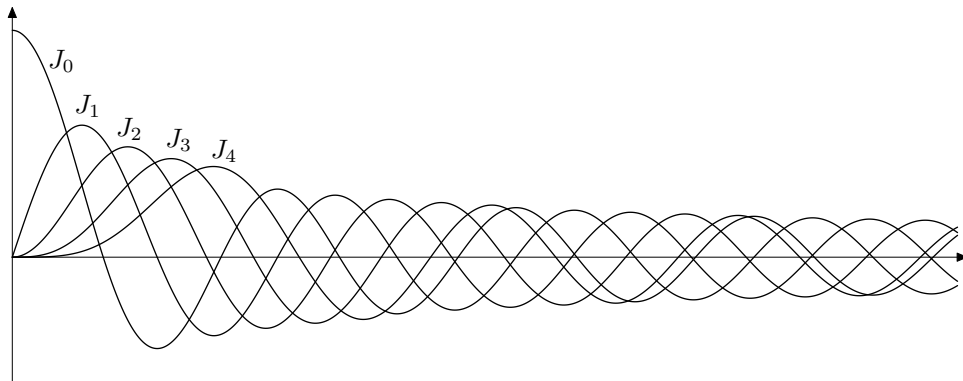


FIGURE 11 . Les fonctions de Bessel  $J_n, n = 0, 1, 2, 3, 4$  sur l'intervalle  $(0, 25)$ .

Pour  $n$  entier, la fonction de Bessel  $J_n$  est définie par une série et est solution d'une équation différentielle (comme la fonction classique  $e^t$ )

**Proposition/Définition 3.1.** Soit  $n$  entier. La série

$$(35) \quad J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left( \frac{t}{2} \right)^{n+2k}$$

est absolument convergente pour  $t \in \mathbb{C}$  et est solution de l'équation différentielle

$$(36) \quad t^2 y''(t) + t y'(t) + (t^2 - n^2) y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La fonction  $J_n$  est appelée fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $n$ .

*Démonstration.* — La convergence de la série résulte de la convergence vers 0 du quotient  $(|t|/2)^2/((k+1)(n+k+1))$  de deux termes consécutifs lorsque  $k \rightarrow \infty$ . La série est dérivable terme à terme, ce qui permet de vérifier que  $J_n$  est solution de (36).  $\square$

La proposition suivante indique que  $J_n$  s'obtient aisément en terme de  $J_0$  et  $J_1$  (ou  $J'_0$ )

**Proposition 3.1.** *Les fonctions de Bessel  $J_n, n \geq 1$  vérifient les relations de récurrence*

$$\begin{aligned} J_{n-1}(t) + J_{n+1}(t) &= \frac{2n}{t} J_n(t), \\ J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t) &= 2J'_n(t). \end{aligned}$$

De plus,  $J'_0 = -J_1$ .

*Démonstration.* — On vérifie, pour  $n \geq 1$

$$\frac{d}{dt}[t^n J_n(t)] = t^n J_{n-1}(t), \quad \frac{d}{dt}[t^{-n} J_n(t)] = -t^{-n} J_{n+1}(t)$$

soit

$$J'_n(t) + \frac{n}{t} J_n = J_{n-1}(t), \quad J'_n(t) - \frac{n}{t} J_n = -J_{n+1}(t),$$

qui donnent les relations de la proposition.  $\square$

Les fonctions de Bessel ont des propriétés pour certaines analogues à celles des polynômes classiques (Legendre : Th. 2.2, Chebyshev : Th. 2.3, Hermite : Th. 2.4)

**Théorème\* 3.1.** *La famille des fonctions de Bessel  $(J_n)_{n \geq 0}$  est caractérisée par l'une des deux présentations suivantes*

1. Les  $J_n$  sont donnés par la fonction génératrice

$$(37) \quad J(x, t) = e^{\frac{t}{2}(x-x^{-1})} = J_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(t)[x^n + (-x)^{-n}], \quad t > 0.$$

2. La fonction  $J_n$  est donnée par la série entière

$$(38) \quad J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k}$$

De plus, la suite  $(J_n)_{n \geq 0}$  vérifie la relation de récurrence

$$tJ_{n+1}(t) = 2nJ_n(t) - tJ_{n-1}(t)$$

La fonction  $J_n$  a comme équivalents aux bornes de l'intervalle  $(0, +\infty)$

$$(39) \quad J_n(t) \sim_{t \rightarrow 0} \frac{t^n}{2^n n!}, \quad J_n(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2} \cos\left(t - \frac{1}{2}n\pi - \frac{\pi}{4}\right).$$

$\triangle$  **Remarque 3.1.** En posant, pour  $n \geq 0$ ,  $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  et en prenant la variable  $\theta$  telle que  $x = e^{j\theta}$ , la relation (37) s'écrit comme un développement en série de Fourier

$$e^{jt \sin \theta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(t) e^{jn\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{jt \sin \theta} e^{-jn\theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t \sin \theta - n\theta) d\theta.$$

Vu que  $J_n$  vérifie l'équation différentielle (36), la fonction  $U_n$  définie par  $U_n(t) = J_n(t)\sqrt{t}$ ,  $t > 0$  vérifie l'équation différentielle

$$u'' + u + \left(\frac{1}{4} - n^2\right)t^{-3/2}u = 0.$$

Ainsi, le terme de droite dans l'asymptotique (39) lorsque  $t \rightarrow \infty$  vérifie, au facteur  $\sqrt{t}$  près, l'équation différentielle précédente où le terme  $(1/4 - n^2)t^{-3/2}u$  a été négligé.  $\nabla$

En remplaçant dans (35) les factorielles d'entiers  $\ell!$  par les valeurs  $\Gamma(\ell+1)$  de la fonction eulérienne  $\Gamma$  (cf. (47) dans l'appendice), on définit la fonction  $J_\nu$  pour un indice  $\nu$  non entier sur  $\mathbb{R}^+$

$$(40) \quad J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2k}, \quad t > 0,$$

fonction qui conserve certaines des propriétés des fonctions de Bessel  $J_n$  d'ordre  $n$  entier, notamment l'équation différentielle (36) et les relations de récurrence de la Prop. 3.1.

En particulier, pour  $\nu = 1/2$ ,  $U_{1/2} = \sqrt{t}J_{1/2}$  satisfait à l'équation différentielle  $u'' + u = 0$ . En fait, la définition (35) de  $J_{1/2}$  donne

$$J_{1/2}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(1/2+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{1/2+2k} = \left(\frac{2t}{\pi}\right)^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2} \sin t,$$

où on a utilisé la formule de duplication de la fonction  $\Gamma$  (cf. (50) de l'appendice A). L'asymptotique pour  $t \rightarrow \infty$  de (39) est donc une égalité pour  $J_{1/2}$ .

Plus généralement, les séries (40) pour  $\nu$  demi-entier définissent des fonctions élémentaires dérivées du sinus cardinal sinc

$$J_{k+1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} t^{k+1/2} \left(-\frac{1}{t} \frac{d}{dt}\right)^{k+1} (\cos t), \quad t > 0.$$

soit, si  $j_k$  est définie par  $j_k(t) = \sqrt{\pi/(2t)} J_{k+1/2}(t)$ ,  $t > 0$ ,

$$j_0(t) = \text{sinc } t, \quad j_1(t) = \frac{\sin t}{t^2} - \frac{\cos t}{t}, \quad j_2 = \left(\frac{3}{t^3} - \frac{1}{t}\right) \sin t - \frac{3 \cos t}{t^2}.$$

Terminons par une représentation intégrale de  $J_n$ .

**Proposition 3.2.**

$$(41) \quad J_n(t) = \frac{(t/2)^n}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1/2)} \int_0^\pi \cos(t \cos \theta) \sin^{2n} \theta d\theta$$

*Démonstration.* — En utilisant l'expression (51) de la fonction beta de l'appendice, on a la formule

$$\frac{1}{\Gamma(k+n+1)} = \frac{1}{\Gamma(k+1/2)\Gamma(n+1/2)} \int_{-1}^1 u^{2k} (1-u^2)^{n-1/2} du$$

qu'on va utiliser dans la représentation de  $J_n$  en série

$$\begin{aligned} J_n(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (t/2)^{n+2k}}{\Gamma(k+1)} \frac{1}{\Gamma(k+1/2)\Gamma(n+1/2)} \int_{-1}^1 u^{2k} (1-u^2)^{n-1/2} du \\ &= \frac{(t/2)^n}{\Gamma(n+1/2)} \int_{-1}^1 (1-u^2)^{n-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (tu)^{2k}}{2^{2k}\Gamma(k+1)\Gamma(k+1/2)} du \\ &= \frac{(t/2)^n}{\Gamma(1/2)\Gamma(n+1/2)} \int_{-1}^1 (1-u^2)^{n-1/2} \cos tudu \end{aligned}$$

La formule de duplication de la fonction  $\Gamma$  a été utilisée dans la dernière égalité. Cela donne la formule de la proposition.  $\square$

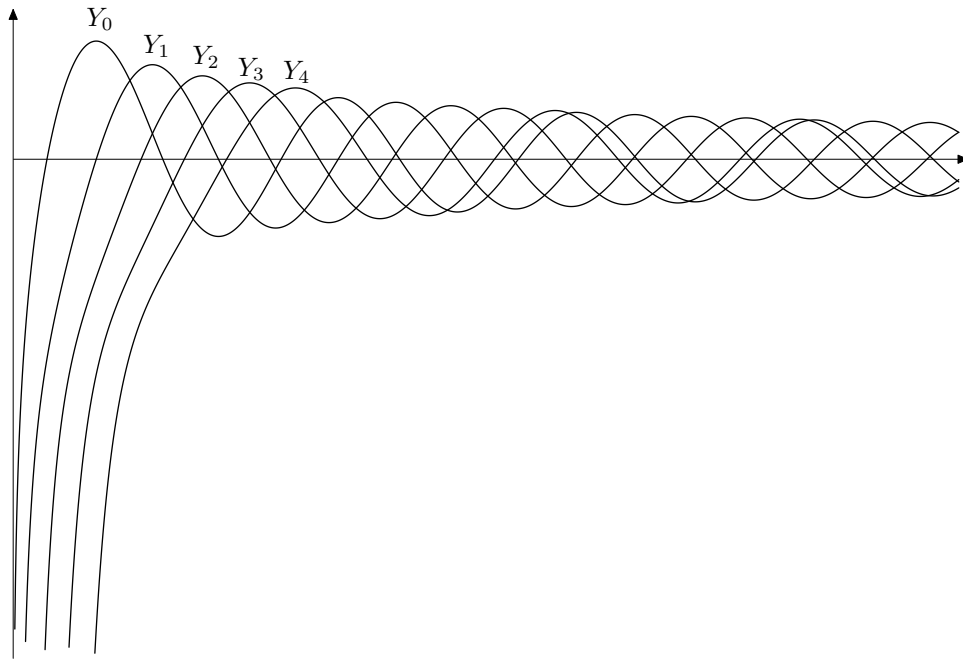


FIGURE 12 . Les fonctions de Bessel  $Y_n, n = 0, 1, 2, 3, 4$  sur l'intervalle  $(0, 25)$ .

L'équation différentielle (36) a deux solutions indépendantes sur  $\mathbb{R}^+$  ; la fonction  $Y_n$  définie par

$$(42) \quad Y_n(t) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(t) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(t)}{\sin \nu\pi}, \quad t > 0,$$

est indépendante de  $J_n$  : au contraire de  $J_n$ , elle ne se prolonge pas à  $\mathbb{R}$ , du fait de sa singularité en  $t = 0$

$$(43) \quad Y_n(t) = 2J_n(t) \log \frac{t}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k-n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [\psi(k+1) + \psi(n+k+1)]}{k!(n+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k},$$

où  $\psi$  est la dérivée logarithmique de  $\Gamma$  (cf. l'appendice A).

Les fonctions de Bessel  $J_n, n \in \mathbb{N}$  sont présentes dans `maple`<sup>TM</sup>, `matlab`<sup>TM</sup> ainsi que dans la bibliothèque `math` du compilateur C (utilisé pour le tracé des figures 11 et 12).

```
#include <math.h>
double jn (int n, double x);
double yn (int n, double x);
```

### 3.3. Développements en série de Fourier-Bessel

L'ensemble des zéros des fonctions de Bessel  $J_\nu$  a été bien étudié.

**Théorème\* 3.2.** *Soit  $\nu$  réel positif. La fonction  $J_\nu$  a une infinité de zéros sur  $\mathbb{R}^+$ , tous simples. Si  $\nu$  est un entier  $n$ ,  $J_n$  a pour seuls zéros ses zéros réels,  $t = 0$  étant d'ordre  $n$ .*

Notons par  $(x_{\nu i})_{i \geq 1}$  la suite croissante des zéros non nuls de  $J_\nu$ .

Pour  $\alpha$  réel, la fonction  $\mathbf{J}_{\nu, \alpha}$  définie par  $\mathbf{J}_{\nu, \alpha}(t) = J_\nu(\alpha t), t > 0$  est solution de l'équation différentielle

$$\mathbf{J}_{\nu, \alpha}'' + t^{-1} \mathbf{J}_{\nu, \alpha}' + (\alpha^2 - \nu^2 t^{-2}) \mathbf{J}_{\nu, \alpha} = 0$$

Soient  $\alpha_+, \alpha_-$  des réels distincts. En multipliant par  $\alpha_{\mp}$  l'équation vérifiée par  $\mathbf{J}_{\nu, \alpha_{\pm}}$  et faisant la différence, on obtient

$$(\alpha_+^2 - \alpha_-^2) \int_0^1 t J_{\nu}(\alpha_+ t) J_{\nu}(\alpha_- t) dt = [t (J_{\nu}(\alpha_+ t) \alpha_- J'_{\nu}(\alpha_- t) - \alpha_+ J'_{\nu}(\alpha_+ t) J_{\nu}(\alpha_- t))]_0^1$$

soit

$$\int_0^1 t J_{\nu}(\alpha_+ t) J_{\nu}(\alpha_- t) dt = \frac{J_{\nu}(\alpha_+) \alpha_- J'_{\nu}(\alpha_-) - \alpha_+ J'_{\nu}(\alpha_+) J_{\nu}(\alpha_-)}{\alpha_+^2 - \alpha_-^2}$$

Ainsi, si  $i \neq j$ ,

$$(44) \quad \int_0^1 t J_{\nu}(x_{\nu i} t) J_{\nu}(x_{\nu j} t) dt = 0$$

et, en passant à la limite  $\alpha_+, \alpha_- \rightarrow x_{\nu i}$

$$(45) \quad \int_0^1 t J_{\nu}^2(x_{\nu i} t) dt = \frac{1}{2} J'_{\nu}(x_{\nu i})^2 = \frac{1}{2} J_{\nu+1}(x_{\nu i})^2$$

Les identités (44) sont des relations d'orthogonalité : pour un  $\nu$  positif, la suite de fonc-

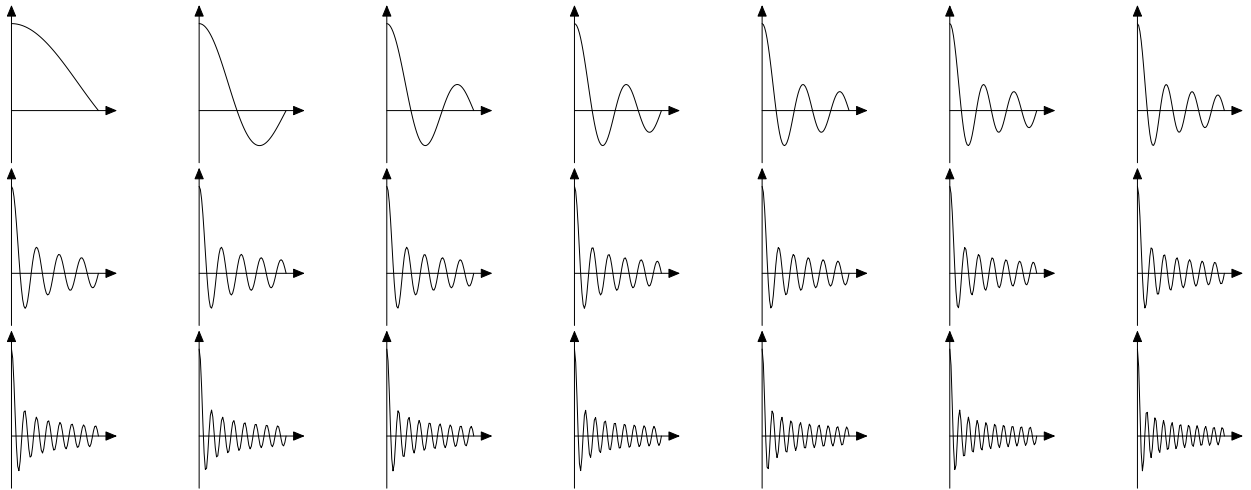


FIGURE 13 . Les fonctions de Bessel  $J_0(x_{0n}t), t \in [0, 1]$  pour  $n = 0, \dots, 20$ .

tions  $(\mathbf{J}_{\nu i})_{i \geq 1}$  avec  $\mathbf{J}_{\nu i}(r) = J_{\nu}(x_{\nu i} r), r \in (0, 1)$ , est une famille orthogonale dans l'espace  $L^2((0, 1), r dr)$ , dont les normes sont précisées par l'identité (45). On montre que la famille orthonormée obtenue par normalisation c'est une base hilbertienne, qui donne des développements en série de Fourier-Bessel pour les fonctions définies sur  $[0, 1]$ , séries au sens  $L^2$  et avec des propriétés de convergence simple sous des hypothèses analogues à celle du théorème de Dirichlet 2.3 pour les séries de Fourier.

**Théorème\* 3.3.** Soit  $\nu \geq -1/2$ . Soit  $f$  une fonction définie sur  $(0, 1)$  telle que  $\int_0^1 r |f(r)|^2 dr$  soit finie. Alors, dans l'espace  $L^2((0, 1), r dr)$ , on a le développement en série

$$f(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2}{J_{\nu+1}^2(x_{\nu \ell})} \int_0^1 u f(u) J_{\nu}(x_{\nu \ell} u) du J_{\nu}(x_{\nu \ell} t)$$

Si la fonction  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $(0, 1)$  avec l'intégrale  $\int_0^1 \sqrt{t} |f(t)| dt$  finie, alors

$$(46) \quad \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2}{J_{\nu+1}^2(x_{\nu \ell})} \int_0^1 u f(u) J_{\nu}(x_{\nu \ell} u) du J_{\nu}(x_{\nu \ell} t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}$$

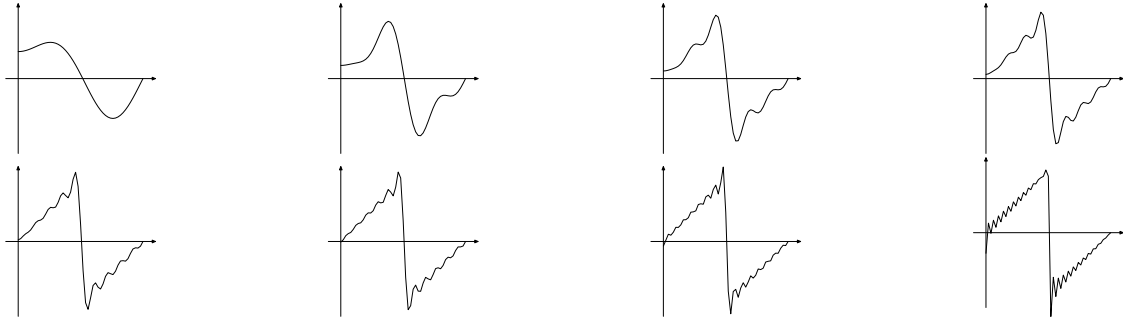


FIGURE 14 . Approximations de la fonction  $f_1$  définie sur  $[0, 1]$  par  $f_1(t) = t$  si  $t < 1/2$  et  $f_1(t) = t - 1$  sinon, par la somme de fonctions de Bessel (46) tronquée à l'ordre  $N$  pour  $N = 2, 6, 10, 14, 18, 22, 30, 50$ .

$\triangle$  **Remarque 3.2.** Pour  $\nu = 1/2$ , les séries de Fourier-Bessel de la fonction  $f$  du théorème précédent se ramènent à des séries sinusoïdales de Fourier pour la fonction  $\sqrt{t}f$ , vu que  $J_{1/2}(t) = \sqrt{\pi/2t} \sin t$ , soit

$$\sqrt{t}f(t) = 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_0^1 \sqrt{u}f(u) \sin(\pi\ell u) du \sin(\pi\ell t).$$

$\nabla$

### 3.4. Exercices

1. Si  $f$  est à dérivée seconde continue sur  $[0, 1]$ , on note  $\mathcal{L}f$  l'application  $\mathcal{L}f(t) = f'' + t^{-1}f'(t)$ . Montrer que, si  $f, g$  sont deux fois dérivables avec  $f(1) = g(1) = 0$

$$\langle \mathcal{L}f, g \rangle_1 = \langle f, \mathcal{L}g \rangle_1$$

où  $\langle p, q \rangle_1 = \int_0^1 p(t)q(t)t dt$ .

En déduire que pour  $\lambda_i, i = 1, 2$  zéros distincts de la fonction de Bessel  $J_0$  et  $f_i$  les fonctions définies par  $f_i(t) = J_0(\lambda_i t)$ , alors  $\langle f_1, f_2 \rangle_1 = 0$ .

2. En partant de la définition de  $J_p$  comme série entière, montrer que  $\frac{d}{dt}(t^p J_p(t)) = t^p J_{p-1}(t)$
3. En dérivant par rapport à  $x$ , puis par rapport à  $t$  la série génératrice

$$e^{\frac{t}{2}(x-x^{-1})} = J_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(t)[x^n + (-x)^{-n}]$$

montrer que

$$\begin{aligned} nJ_n(t) &= \frac{t}{2} (J_{n-1}(t) + J_{n+1}(t)), \\ J'_n(t) &= \frac{1}{2} (J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t)). \end{aligned}$$

4. Pour  $n$  entier, soit  $J_n$  définie par

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Montrer que, pour  $n \geq 1$  et  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$J_{n-1}(t) + J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t} J_n(t),$$

$$\frac{d}{dt} [t^n J_n(t)] = t^n J_{n-1}(t).$$

(b) Soit  $\Gamma$  la fonction Gamma d'Euler définie par

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^s \frac{dt}{t}.$$

Montrer que  $\Gamma(s)$  est bien définie pour  $s > 0$ . En intégrant par parties, montrer que

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad s > 0.$$

En déduire  $\Gamma(n+1) = n!$  pour  $n$  entier.

Montrer que  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  (on utilisera  $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ ).

(c) Montrer que, pour  $n$  entier positif et  $t$  réel

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}$$

(d) Pour  $t, \nu$  réels positifs, on pose

$$J_{\nu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu}$$

Montrer que

$$J_{1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin(t), \quad t > 0.$$

5. Soit  $n$  un entier relatif et  $\mathcal{J}_n$  la fonction définie par

$$\mathcal{J}_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nu - t \sin u) du.$$

(a) Montrer que  $\mathcal{J}_n$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , paire si  $n$  est pair et impaire si  $n$  est impair.

Montrer que  $\mathcal{J}_{-n} = (-1)^n \mathcal{J}_n$ .

(b) Montrer que pour tout entier  $p \geq 0$ ,

$$\mathcal{J}_{2p}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(2pu) \cos(t \sin u) du,$$

$$\mathcal{J}_{2p+1}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin((2p+1)u) \sin(t \sin u) du.$$

(c) Montrer que  $\mathcal{J}_n$  est indéfiniment dérivable et que

$$\mathcal{J}'_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin u \sin(nu - t \sin u) du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos u (n - t \cos u) \cos(nu - t \sin u) du,$$

$$\mathcal{J}''_n(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 u \cos(nu - t \sin u) du.$$

En déduire que  $\mathcal{J}_n$  est solution de l'équation différentielle

$$t^2 y''(t) + t y'(t) + (t^2 - n^2) y(t) = 0.$$



(d) Soit  $\nu$  réel. Soit  $y$  solution sur  $\mathbb{R}$  de

$$(ED_\nu) \quad t^2 y''(t) + t y'(t) + (t^2 - \nu^2) y(t) = 0$$

Montrer que  $z$  définie par  $z(t) = t^\nu y(t)$ ,  $t > 0$  est solution de l'équation différentielle

$$t^2 z''(t) + (2\nu - 1) z'(t) + t^2 z(t) = 0.$$

En déduire que  $y_{1/2}$  définie par  $y_{1/2}(t) = t^{-1/2} \sin t$ ,  $t > 0$  est solution de l'équation différentielle  $(ED_{1/2})$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

## APPENDICE A

### LA FONCTION GAMMA D'EULER $\Gamma$

La fonction  $\Gamma$  <sup>(1)</sup> d'Euler est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Re z > 0.$$

Elle vérifie

$$(47) \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Re z > 0, \quad \Gamma(n+1) = n! \quad \text{si } n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi},$$

la factorisation de Weierstrass

$$(48) \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n},$$

la *formule des compléments*

$$(49) \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

la *formule de duplication*

$$(50) \quad \Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)}{\sqrt{\pi}},$$

et la relation avec la *fonction beta*

$$(51) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Sa dérivée logarithmique  $\psi = \Gamma'/\Gamma$  a comme valeurs aux entiers

$$(52) \quad \psi(1) = \gamma, \quad \psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad n \geq 1.$$

Dans les formules (48) et (52),  $\gamma$  désigne la constante d'Euler-Mascheroni

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} [1/k - \log(1 + 1/k)].$$

L'intégrale exponentielle se ramène à l'évaluation de  $\Gamma$  en  $t = 1/2$  :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

---

1. Dans une lettre à Goldbach datée du 13 octobre 1729, Euler introduit la fonction  $z \rightarrow \int_0^1 (-\log u)^{z-1} du$ , fonction qui fut notée  $\Gamma$  par Legendre en 1809.

# INDEX

- base orthonormée, 5
- JA. BERNOULLI, 11
- F. BESSEL, 6, 28
- boule, 3
- V. BUNYAKOVSKY, 2
- A.-L. CAUCHY, 2, 14
- P. CHEBYSHEV, 18
- J. DIRICHLET, 16
- espace de Hilbert, 2
- L. EULER, 11, 37
- famille
  - orthogonale, 3
  - orthonormée, 3
- E. FISCHER, 4
- fonction
  - de Bessel, 17, 29
  - beta, 31, 37
  - de carré intégrable, 3
  - exponentielle, 5, 9
  - de Haar, 22
  - d'Hermite, 22
- forme linéaire, 4
- formule
  - des compléments, 37
  - de duplication, 31, 37
  - de Rodrigues, 13, 19, 22
- J. FOURIER, 9
- L. GEGENBAUER, 20
- C. GOLDBACH, 37
- A. HAAR, 24
- C. HERMITE, 22
- D. HILBERT, 1
- A.-M. LEGENDRE, 13, 37
- L. MASCHERONI, 37
- P. MENGOLI, 11
- ondelettes, 25
- M.-A. PARSEVAL, 6
- partie
  - convexe, 3
  - fermée, 3
  - orthogonale, 3
- polynôme
  - de Chebyshev, 18
  - d'Hermite, 22
  - de Jacobi, 20
  - de Legendre, 13
- produit scalaire, 1
- projection orthogonale, 4
- PYTHAGORE, 3
- J. RAYLEIGH, iv
- F. RIESZ, 4
- L. SCHWARTZ, 10
- H. SCHWARZ, 2
- vecteurs orthogonaux, 3
- K. WEIERSTRASS, 37