UNIVERSITÉ DE NANTES

École polytechnique
SEII-1 Distributions et transformées
Année 2007-2008

# Contrôle (une heure et trente minutes)

14 janvier 2008

*Le sujet est composé de trois exercices indépendants.*

*Les réponses seront soigneusement justifiées.*

## I

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(t) = \mathrm{e}^{-|t-1|}, \quad t \in \mathbb{R},$$

et $h$ la fonction $h = g\Upsilon$ où $\Upsilon$ est la fonction d'Heaviside.

(**1**) Tracer le graphe des fonctions $g$ et $h$.

(**2**) Donner les parties de $\mathbb{R}$ où $g$ et $h$ sont indéfiniment dérivables. Tracer le graphe des dérivées $g', h', g'', h''$ sur ces parties.

(**3**) Calculer au sens distribution les dérivées d'ordre 1 et 2 des fonctions $g$ et $h$, soit les dérivées des distributions régulières $U_g$ et $U_h$ associées aux fonctions $g$ et $h$ respectivement.

En déduire que

$$U_g - (U_g)'' = 2\delta_1.$$

(**4**) Calculer la transformée de Laplace $\mathcal{L}(h)$ de $h$. Quelle est la transformée de Fourier $\widehat{h}$ de $h$ ?

## II

Soient $F$ et $G$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ suivant

$$F(t) = 0 \text{ si } t < 0, \quad F(t) = \cos(2t) \text{ si } t \geq 0,$$
$$G(t) = 0 \text{ si } t < 0, \quad G(t) = \sin(t) \text{ si } t \geq 0.$$

Montrer que le produit de convolution $F * G$ vérifie

$$F * G(t) = 0 \text{ si } t < 0, \quad F * G(t) = \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{3} \text{ si } t \geq 0.$$

## III

Soit $u$ une distribution telle que

$$4u - u'' = 2\mathrm{e}^{-|t|}.$$

(**1**) Montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{u}$ vérifie

$$\widehat{u}(f) = \frac{1}{(1+4\pi^2 f^2)(1+\pi^2 f^2)}, \quad f \in \mathbb{R}.$$

(**2**) En utilisant l'identité

$$\frac{\alpha - \beta}{(1+\alpha X)(1+\beta X)} = \frac{\alpha}{1+\alpha X} - \frac{\beta}{1+\beta X},$$

déduire de la formule précédente de $\widehat{u}$ que

$$u = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-|t|} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2|t|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$