École polytechnique
SEII-3
Approximations hilbertiennes
et développements en série
Année 2007-2008

Contrôle (une heure et trente minutes)

18 février 2008

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

Les réponses seront soigneusement justifiées.

I

Soit E l'espace des fonctions f indéfiniment dérivables sur $[0,+\infty[$, à valeurs réelles et telles que, pour tout entier k,

$$\int_0^\infty |f^{(k)}(t)|^2 t^2 \mathrm{e}^{-t} dt + \max_{t\geq 0} |f^{(k)}(t)| \mathrm{e}^{-t/2} \text{ est fini.}$$

On admet que l'expression

$$\langle f,g\rangle = \int_0^\infty f(t)g(t)t^2\mathrm{e}^{-t}dt, \quad f,g\in E.$$

définit un produit scalaire sur E.

Soit H l'opérateur de E dans E qui à $f\in E$ associe la fonction Hf de E définie par

$$Hf(t) = -tf''(t) + (t-3)f'(t), \quad t\geq 0.$$

(**1**) Montrer que pour $f\in E$

$$\langle Hf,f\rangle = \int_0^\infty [f'(t)]^2 t^3 \mathrm{e}^{-t}dt.$$

En déduire que si $Hf=\alpha f$ avec f non nul, alors le réel α est positif non nul.

(**2**) Montrer que

$$\langle Hf,g\rangle = \langle Hg,f\rangle, \quad f,g\in E.$$

(**3**) Soient f et g des éléments de E et α,β des réels tels que $Hf=\alpha f$, $Hg=\beta g$. Montrer que si f et g ne sont pas orthogonaux dans E, alors $\alpha=\beta$.

II

Soit $\mathcal{H}$ l'espace des fonctions F définies sur $[-\pi, \pi]$, deux fois dérivables avec des dérivées F', F'' continues, à valeurs complexes et vérifiant $F(-\pi) = F(\pi) = 0$.

Soit B la fonction définie sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ par

$$B(F, G) = F(0)\overline{G(0)} + \int_{-\pi}^{\pi} F'(t)\overline{G'(t)}dt, \quad F, G \in \mathcal{H}.$$

(**1**) Montrer que B définit un produit scalaire sur $\mathcal{H}$.

(**2**) Montrer que les fonctions H et K définies par

$$H(t) = \sin^3(4\,t), \quad K(t) = \cos^5(2008\,t) - 1, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

sont des fonctions de l'espace $\mathcal{H}$, orthogonales relativement au produit scalaire B. (*On pourra remarquer que H est impaire, alors que K est paire*)

III

Soit Y la fonction définie par

$$Y(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}, \quad t > 0.$$

(**1**) Montrer que Y vérifie l'équation différentielle

$$t^2 y''(t) + ty'(t) + (t^2 - 1/4)y(t) = 0, \quad t > 0.$$

(**2**) Soit $I(k)$ la suite définie pour k entier par

$$I(k) = \int_0^{\infty} t^k \mathrm{e}^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Montrer que

$$I(k+1) = \left(k + \frac{1}{2}\right) I(k), \quad k \in \mathbb{N}$$

et en déduire que

$$I(k+1) = \frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}k!}\sqrt{\pi}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

On admettra que $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{-1/2} dt = \sqrt{\pi}$.

(**3**) En utilisant le développement en série de la fonction sin, montrer que

$$Y(t) = \frac{\sqrt{\pi t}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! I(k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}, \quad t > 0.$$