

Cohomologie elliptique

groupe de travail Nantes, 13-14/06/10
(Cohomologie elliptique et théorie quantique des champs)

Introduction

→ Cohomologies : axiomes d'Eilenberg-Steenrod

(1) A^n : foncteur contravariant de la cat. des paires d'esp. top. $(Y \subseteq X)$

vers les gres abéliens. (cohomologie absolue avec $A = \mathbb{Z}$)
(inv. d') homotopie :

(2) invariance par équivalence d'homotopie (faible) $(\text{point } (X, \phi))$

(3) longue suite exacte pour $Z \subseteq Y \subseteq X$ en cohon $\rightarrow \delta$ morph. connectant

(4) excision $(\bar{U} \subseteq Y \subseteq X, \bar{U} \cap Z = \emptyset) \quad A^n(X, Y) \cong A^n(X \setminus U, Y \setminus U)$

(5) additivité

(6) dimension : $A^n(\text{pt}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \end{cases}$

→ cohomologie singulière

~~X~~ → $H^n(X, Y; \mathbb{Z})$

• K-théorie → paire

• plus généralement : théorie de l'homotopie stable (spectre)

on utilise cohomologie complexe-orientée à la place

Définitions : • Multiplicative : $A^*(X)$ anneau commutatif gradué.

• Paire : multiplicative + $A^i(\text{pt}) = 0$ lorsque i est impaire.

• Périodique : mult. + $\exists \beta \in A^{-2}(\text{pt})$ inversible dans $A^*(\text{pt})$ (donc $\beta^{-1} \in A^2(\text{pt})$)

• K-théorie (complexes)
• H^*

Ex : • K-théorie (complexes)

• $\prod_{n \in \mathbb{Z}} H^{n+2k}(X; \mathbb{R}) =: A^n(X)$

• autres exemples ?

→ * Suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch

$$E_2^{p,q} = H^p(X; A^q(\text{pt})) \Rightarrow A^{p+q}(X)$$

→ coh. singulière de X + $A^*(\text{pt}) \Rightarrow A^*(X)$

Complicé mais se simplifie dans le cas de l'espace projectif complexe de dimension infini $\mathbb{CP}^\infty$.

$$\hookrightarrow A^*(\mathbb{CP}^\infty) \cong A^*(pt)[t]$$

t degré 2 (par 2-périodicité)

On peut utiliser ce t pour définir la première classe de Chern de tout fibré en droites complexe $\mathcal{L}$ sur un espace X (paracompact)

• $\mathbb{CP}^\infty$: espace classifiant pour les fibrés en droites complexes

$$\forall (X, \mathcal{L}), \exists \phi: \begin{array}{ccc} \phi^* \mathcal{L} = \mathcal{L} & & \mathcal{L} \leftarrow \text{fibré en droites universel} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[\phi]{} & \mathbb{CP}^\infty \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(la fibre d'un point est donnée} \\ \text{par la droite qui lui correspond)} \end{array}$$

• on définit $c_1(\mathcal{L}) := \phi^* t \in A^*(X)$: théorie qui se comporte raisonnablement bien

Cas classiques: $\times H^*(X): c_1(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}') = c_1(\mathcal{L}) + c_1(\mathcal{L}')$

$\times K^*(X): c_1(\mathcal{L}) = [\mathcal{L}] - 1$ (plus simple)

$$c_1(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}') = c_1(\mathcal{L}) + c_1(\mathcal{L}') + c_1(\mathcal{L})c_1(\mathcal{L}')$$

$\times$ de façon générale, $c_1(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}') = f(c_1(\mathcal{L}), c_1(\mathcal{L}'))$ où f est une loi de groupe formel.

$$\left[\begin{array}{ll} c_1(X \times X) = 0 \Rightarrow f(t, 0) = f(0, t) = t \\ \otimes \text{ est commutatif à iso. près} \Rightarrow f(u, v) = f(v, u) \\ \otimes \text{ — associatif —} \Rightarrow f(u, f(v, w)) = f(f(u, v), w) \end{array} \right.$$

Est-ce qu'une loi de groupe formel permet de définir une cohomologie?

* Anneau de Lazard $MP(pt)$ classifie les lois de groupes formels:

$$\mathcal{G}: \begin{array}{c} \Omega_{\text{ét}}^*(pt) \\ \text{modulaire} \end{array} MP(pt) \xrightarrow{\text{monph. d'alg. comm.}} R \xrightarrow{1-1} \begin{array}{c} \Omega_{\text{ét}}^*(pt) \\ \text{périodique} \end{array} f(u, v) \text{ à coefficients dans } R$$

$\Omega_{\text{ét}}^*(pt)$
 $MP(pt)$: anneau de coefficients pour une cohomologie appelée cobordisme complexe (périodique)

$$\mathcal{A} = MP(pt)\text{-mod} \xrightarrow{\Omega_{\text{ét}}^*(pt)} \mathcal{A}_{\mathcal{G}}^{\wedge}(X) := MP^{\wedge}(X) \otimes_{MP(pt)} R$$

$\hookrightarrow$ Cohomologie? pas toujours, problème: les suites exactes longues ne sont pas forcément préservées.

(tout est sur $\mathbb{C}$ ici $\uparrow$)

- Plan:
- 1) (G) bordisme
 - 2) Foncteur exact de Landweber
 - 3) Cohomologie elliptique

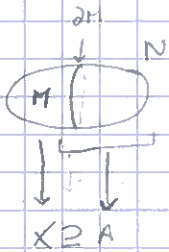
1) (G) bordisme (Construction de Baas-Sullivan)

Déf. • Groupe de bordisme $\Omega_m^{so}(X) := \{f: M^m \rightarrow X\} / \sim$ où

$$\begin{array}{ccc} f_0 \sim f_1 & \text{si elles sont obtenues par restriction de } F: W^{m+1} \rightarrow X \\ \downarrow \pi_0 & \downarrow \pi_1 \\ X & X \end{array} \quad \text{à } M_0 \cup (M_1) = \partial W$$

$$\bullet \Omega_m^{so}(X, A) := \{(M^m, \partial M^{m-1}) \xrightarrow{f} (X, A)\} / \sim \quad \text{où}$$

$$f: M \rightarrow X \text{ tq } f|_{\partial M}: \partial M \rightarrow A \subseteq X$$



si $M^m \in N^m$ variété fermée ($\partial N = \emptyset$)

$$f: N \rightarrow X \text{ tq } f(N \setminus \bar{M}) \subseteq A$$

alors $[N, f] = [M, f|_M]$ dans $\Omega_m^{so}(X, A)$

(*)

$$\bullet \partial: \Omega_m^{so}(X, A) \rightarrow \Omega_{m-1}^{so}(A) \quad (\text{morph. connectant})$$

$$[M, f] \mapsto [\partial M, f|_{\partial M}]$$

Propriétés:

• fonctionnalité et invariance d'homotopie: pas de problème
additivité non plus.

$$\bullet \text{ exactitude: } \Omega_m^{so}(A) \xrightarrow{i_*} \Omega_m^{so}(X) \xrightarrow{j_*} \Omega_m^{so}(X, A) \xrightarrow{\partial} \Omega_{m-1}^{so}(A)$$

$$[(A, \emptyset) \xrightarrow{i} (X, \emptyset) \xrightarrow{j} (X, A)]$$

cas non triviaux: $j_* i_* = 0$ et $\ker \partial \subseteq \text{Im } j_*$

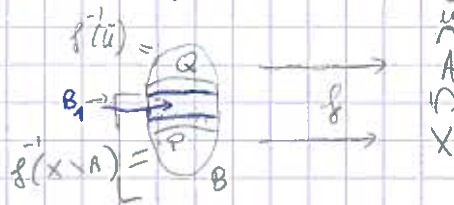
↳ prendre $M = \emptyset$ dans (*)

$[M, f] \in \ker \partial \Rightarrow (\partial M, f|_{\partial M})$ bordante dans A donc par (*),
(par le)

$[M, f]$ est dans l'image de j_* .

$$(M \cup \partial M)$$

• excision: $\bar{U} \not\subset A \Rightarrow i_*: \Omega_m^{so}(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{\cong} \Omega_m^{so}(X, A)$

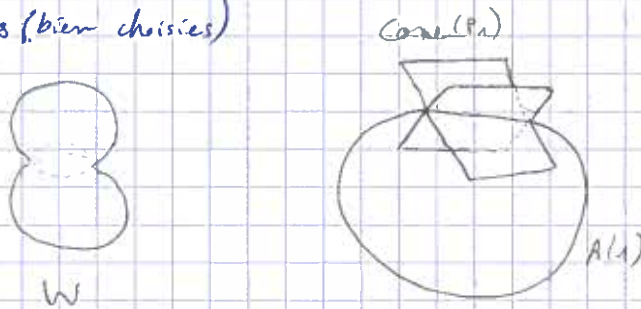


donne $i_* [B_1, f|_{B_1}] = [B, f]$

injectivité de la même façon

$\Rightarrow \Omega_m^{so}$: homologie

Rem. • Il est possible d'étendre ces constructions aux variétés avec singularités (bien choisies)



Def. Variété avec singularité de type (P_1) : $W = A \cup (A(1) \times_{A(1) \times P_1} \text{Cone}(P_1))$

• L'intérêt est d'obtenir une homologie $M_*(-)$ dont l'anneau de coefficients est $M_*(pt) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][\delta, \varepsilon]$ (on est sur $\mathbb{R}$ ici)

$M_*(-)$ peut être vue comme un quotient de $\Omega_m^{so}[\frac{1}{2}](-)$.

2) Théorème du foncteur exact de Landweber $\Omega_m^{so}[\frac{1}{2}](-) \rightarrow M_*(-)$

Le cadre naturel pour le théorème du foncteur exact est le cobordisme complexe $\Omega_m^{so}(-)$ dont l'anneau de coefficients est l'anneau de Lazard.

⌈ Ce que l'on a vu précédemment ne s'applique pas directement dans le cas complexe car une variété complexe est de dimension paire et donc son bord ne peut pas être une variété (car de dimension impaire). On généralise en mettant une structure complexe sur le plan tangent stable. ⌋

$(\text{sur } R)$ / donc correspond à $\varphi: \Omega^u \rightarrow R$

Soit F une loi de groupe formel. On définit

$$[n](x) := F([n-1](x), x) \text{ et } [0](x) := 0.$$

Pour p premier, on écrit:

$$[p](x) = px + \dots + u_1 x^p + \dots + u_2 x^{p^2} + \dots + u_n x^{p^n} + \dots$$

hauteur = h si $u_i = 0$ pour $i < h$ et $u_h \neq 0$.

Pour démontrer que $\Omega^u(-) \otimes_{\Omega^u} R$ est une homologie, il est seulement nécessaire de montrer que l'exactitude est préservée par $\otimes R$.

Critère:

Théorème du foncteur exact:

$\Omega^u(-) \otimes_{\Omega^u} R$ est une homologie si pour chaque premier p , la suite $p, u_1, \dots, u_n, \dots$ est une suite régulière sur R . C'est-à-dire la multiplication par p sur R , et par u_n sur $R/(pR + \dots + u_{n-1}R)$ pour tout $n \geq 1$, est injective.

Rappel: $\log \varphi(x) =: g(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varphi(\mathbb{CP}^{2n})}{2n+1} x^{2n+1}$ en réel

$\uparrow$ genre $\uparrow$ log

$\sum_{n \geq 0} \frac{\varphi(\mathbb{CP}^n)}{n+1} x^{n+1}$ en complexe

$F(x, y) = g^{-1}(g(x) + g(y))$

- Rem:
- vrai aussi pour les modules sur Ω^u .
 - la réciproque est vraie
 - démo utilise les opérations stables en cobordisme complexe et la détermination des idéaux premiers de Ω^u stables sous ces opérations.
 - vrai aussi en cohomologie (avec X CW-complexe).

3) Cohomologie elliptique

Genere elliptique : $g_E(x) = \int_0^x (1 - 2\delta t^2 + \varepsilon t^4)^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^x \left(\frac{1}{R(t)} \right)^{\frac{1}{2}} dt$

Loi de groupe formel associée : $F_E(x, y) = \frac{x\sqrt{R(y)} + y\sqrt{R(x)}}{1 - \varepsilon x^2 y^2}$.

Discriminant : $\Delta := \varepsilon(\delta^2 - \varepsilon)^2$.

On a une courbe elliptique si Δ ne s'annule pas.

On souhaite donc appliquer le théorème du foncteur exact à $R = M.[D^{-1}] = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][\delta, \varepsilon, D^{-1}]$ ($F_E(x, y)$ associée à une courbe elliptique si Δ est inversible).

• $p = 2$: 2 est inversible donc $-x$ est injective et $R/xR = \{0\}$: ok

• p impair : x pas de p torsion $(p, u_1, u_2, \dots)$

x action de u_1 sur $\mathbb{F}_p[\delta, \varepsilon, D^{-1}]$

On peut démontrer que $u_1 \equiv P_{(p-1)/2}(\delta, \varepsilon) \Big|_{[p]}^{\text{mod } p}$ où

$$\frac{1}{(1 - 2\delta x^2 + \varepsilon x^4)^{1/2}} = \sum_{n \geq 0} P_n(\delta, \varepsilon) x^{2n}$$

avec $P_n(1, 1) = 1 \quad \forall n$ donc $u_1 \not\equiv 0 [p]$.

x on montre que u_2 est inversible. Sinon

$u_2 \in I$ (idéal maximal) et on obtient une courbe

$$\bar{E} : y^2 = 1 - 2\bar{\delta}x^2 + \bar{\varepsilon}x^4 \text{ sur le corps résiduel } \mathbb{F}_{(p, u_1)}/I = K$$

Comme Δ est inversible dans $R/(p, u_1)$, il l'est dans K et

$\bar{E}$ est une courbe elliptique dont la loi de groupe

formel vérifie $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0$, ce qui est impossible puisque

la loi de groupe formel d'une courbe elliptique sur

un corps de caractéristique $p > 1$ est 1 ou 2 (thm).

□

$\Rightarrow$ Thm : $g_E(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - 2\delta t^2 + \varepsilon t^4}} dt : \Omega_{\bullet}^u \rightarrow \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][\delta, \varepsilon] = \pi_* \rightarrow M_*[D^{-1}]$.

Alors $\Omega_{\bullet}^u(-) \otimes M_*[D^{-1}]$ est une théorie de cohomologie

dont la loi de groupe formel est donnée par F_E (formule d'Euler)

De plus, le foncteur oubli $\Omega^u(\cdot) \rightarrow \Omega^{\circ,0}(\cdot)$ induit un iso

$$\Omega^u(-) \otimes_{\Omega^u} \Omega^{50} \left[\frac{1}{2} \right] \xrightarrow{\sim} \Omega^{50}(-) \left[\frac{1}{2} \right] \quad [\text{Landweber}]$$

✓

$$\begin{array}{ccc} \text{Th. Langvaben} & \text{[D.1]} & \text{[D.1]} \\ \text{limiting} & \downarrow & \downarrow \\ \text{exact} & & \end{array}$$

$$\text{then } \Omega^u(-) \otimes_{\Omega^u M} \cong \Omega^u(-) \otimes_{\Omega^u M} \quad \left(\text{can } M \text{ set } \Omega^u \left(\frac{1}{2} \right) \text{ in} \right)$$

$$- - - - - [D.1] \cong - - - - - [D.1]$$

Se funziona $\phi: \Omega^{\bullet,0}(-) \rightarrow \mathcal{H}_*(-) (= \Omega^{\bullet,0}(-)/\mathcal{I}_-)$

induit une application $\Omega_{\bullet}^{s,0}(-) \otimes_{\Omega_{\bullet}^{s,0}} \pi[\Delta'] \rightarrow \pi(-)[\Delta']$

de théories homologiques isomorphes sur leur anneau de coefficients. On a donc

Thm: $\Omega^{so}(-) \otimes_{\Omega^{so}} \pi[\sigma^{-1}] \xrightarrow{\cong} \pi(-)[\sigma^{-1}]$ cohomologie elliptique

(théorème de comparaison pour des théories homologiques)

Rappel. $\cdot \Omega^{\text{so}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cong \mathbb{Z} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} [x_4, x_8, \dots] , \quad x_{4n} = [c \mathbb{P}^{2n}]$

$$\cdot \Omega^n \left[\frac{1}{2} \right] \cong \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] [y_2, y_4, \dots] \cong \mathbb{Z}, \quad y_{2n} = [cP^n]$$

$$\cdot \Omega^{\text{so}}[\frac{1}{2}]/I. \xrightarrow{\cong} \pi[\frac{1}{2}][\delta, \varepsilon]$$

$\uparrow$ bien choisi (tue tous les genres elliptiques)

$$SL(2, \mathbb{Z})$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \pmod{m}$$

Thm: $\mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] [5, \varepsilon] =$ l'ensemble des formes modulaires pour $\Gamma_0^{\text{II}}(2)$ dont les coeff. de Fourier sont dans $\mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right]$.

2) $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}][S, \varepsilon, S^{-1}] \cong$ anneau des ~~fonctions~~ ^{fonctions} modulaires pour $\Gamma_0(2)$ qui sont holomorphes sur H^+ .