Le genre elliptique

Notes d'exposé du groupe de travail
Cohomologie elliptique

(Nantes, dans le cadre du GDR 2875)

Salim RIVIERE

décembre 2010

1 Genres, logarithmes, fonctions caractéristiques et suites multiplicatives

1.1 Définitions et proprietés générales des genres

Soit B une $\mathbb{Q}$-algèbre unitaire. Soit $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une famille d'indeterminées telle que p_i est de poids i pour tout entier i et $p_0 = 1_B$. On note $\mathcal{B}$ l'anneau des polynomes en les indeterminées p_i à coefficients dans B. $\mathcal{B}$ est alors gradué par les poids homogènes ($p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}$ a pour poids $i_1 + i_2 + \cdots + i_k$). On note $\mathcal{B}_k$ le B-module des polynomes homogènes de poids k, pour tout entier k.

Définition 1.1.1 *Une suite $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'élements de $\mathcal{B}$ est dite m-suite, ou* suite multiplicative *si*

- *$K_0 = 1$ et $K_j \in \mathcal{B}_j$ pour tout entier $j \geqslant 1$.*
- *Pour toutes familles d'indeterminées ou d'éléments de B $(p_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, $(p'_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et $(p''_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ verifiant l'égalité entre séries formelles*

$$1+p''_1z+p''_2z^2+p''_3z^3+\cdots = (1+p'_1z+p'_2z^2+p'_3z^3+\cdots)(1+p_1z+p_2z^2+p_3z^3+\cdots)$$

on a l'égalité entre séries formelles suivante

$$\sum_{j=0}^{\infty} K_j(p''_1, p''_2, \cdots, p''_j)z^j = \sum_{j=0}^{\infty} K_j(p'_1, p'_2, \cdots, p'_j)z^j \sum_{j=0}^{\infty} K_j(p_1, p_2, \cdots, p_j)z^j \qquad (*)$$

La série formelle $\sum_{j=0}^{\infty} K_j(p_1, p_2, \cdots, p_j)z^j$ sera notée $K(\sum_{j=0}^{\infty} p_jz^j)$ afin d'alleger les notations.

Remarque 1.1.2 *La proprieté de multiplicativité* $(*)$ *peut s'écrire*

$$\sum_{j=0}^{\infty} p''_jz^j = \sum_{j=0}^{\infty} p'_jz^jz^j \sum_{j=0}^{\infty} p_jz^j \Rightarrow K(\sum_{j=0}^{\infty} p''_jz^j) = K(\sum_{j=0}^{\infty} p'_jz^j)K(\sum_{j=0}^{\infty} p_jz^j)$$

A toute suite multiplicative $K := (K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est associée une série formelle Q_K dont le premier terme est 1 définie de la façon suivante :

$$Q_K(z) := K(1+z)$$

Le coefficient devant z^j dans Q est alors $K_j(1,0,\cdots,0)$.

Proposition 1.1.3 *La série Q définie précédemment détermine entièrement la suite multiplicative K. Elle est appelée* série caractéristique *de K.*

Réciproquement on a :

Proposition 1.1.4 *Toute série formelle Q dont le terme de degré* 0 *est* 1 *est la série caractéristique d'une suite multiplicative K_Q.*

Les deux propositions nous fournissent une bijection entre l'ensemble des séries formelles de premier terme égal à 1 et l'ensemble des suites multiplicatives.

Notons Ω_*^{SO} l'anneau des classes de cobordisme orienté.

Définition 1.1.5 *Soit B une $\mathbb{Q}$-algèbre unitaire. Un* genre *(orienté) à valeurs dans B est un morphisme de $\mathbb{Q}$ algèbres*

$$\varphi : \Omega_*^{SO} \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow B$$

Les suites multiplicatives fournissent des genres de la façon suivante

Proposition 1.1.6 *Soit $K := (K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite multiplicative et M une variété de dimension $4n$. Notons $[M]$ la classe fondamentale de M ($[M] \in H_{4n}(M,\mathbb{Z})$) et, pour tout entier i, p_i la i-ème classe de Pontrjagin de M ($p_i \in H^{4i}(M,\mathbb{Z})$). Posons*

$$\varphi_K(M) := K_n(p_1, p_2, \cdots, p_n)([M])$$

et dans le cas où la dimension de la varieté M n'est pas divisible par 4 *on pose $\varphi_K(M) := 0$.*

L'application φ_K ainsi définie induit un genre, toujours noté φ_K, à valeurs dans B.

Remarque 1.1.7

1. *Si M est de dimension divisible par* 4*, $\varphi(M)$ est une combinaison linéaire de nombres de Pontrjagin de M.*
2. *Toute série caractéristique (i.e de premier terme égal à 1) Q donne de même un genre φ_Q. La fonction caractéristique de φ_Q est Q.*

Définition 1.1.8 *Le* logarithme *d'un genre φ est la série formelle* $\log_\varphi$ *définie par*

$$\log_\varphi(t) := \sum_{n\geqslant 0} \frac{\varphi(\mathbb{C}P^{2n})}{2n+1} t^{2n+1}$$

Soit Q une série caractéristique. Définissons la série formelle f par $f(x) := \frac{x}{Q(x^2)}$. Le premier terme de f est x donc f est inversible formellement. Notons $\log_Q := f^{-1}$.

Proposition 1.1.9

$$\log_{\varphi_Q}(t) = \log_Q(t)$$

Nous savons par ailleurs grâce à un théorème de R. Thom que l'anneau $\Omega_*^{SO} \otimes \mathbb{Q}$ est un anneau de polynomes en les classes des $\mathbb{C}P^{2n}$ (pour $n \in \mathbb{N}$) :

Théorème 1.1.10 (Thom)

$$\Omega_*^{SO} \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^4, \mathbb{C}P^6, \cdots]$$

Ainsi un genre est entièrement déterminé par ses valeurs sur les classes de cobordisme des $\mathbb{C}P^{2n}$ et donc par son logarithme. De plus si φ est un genre, son logarithme est aussi celui d'une série caractéristique Q. En effet

$$\log_Q(t) = \log_\varphi(t) \Leftrightarrow \frac{x}{Q(x^2)} = \log_\varphi^{-1}(x) \Leftrightarrow Q(x^2) = \frac{x}{\log_\varphi^{-1}(x)}$$

La proposition 1.1.9 nous dit qu'alors $\log_{\varphi_Q} = \log_\varphi$ d'où $\varphi = \varphi_Q$ d'après le théorème de Thom. Ainsi tout genre est obtenu comme genre associé à une série caractéristique (par la construction de la proposition 1.1.6 en utilisant K_Q) Il y a bijection entre l'ensemble des genres, celui des séries caratéristiques, et celui des suites multiplicatives.

Enfin, un dernier objet est attaché à un genre, sa loi de groupe formelle :

Définition 1.1.11 *La* loi de groupe formelle *associée à un genre φ est la série formelle en deux variables F_φ définie par*

$$F_\varphi(x, y) := \log_\varphi^{-1}(\log_\varphi(x) + \log_\varphi(y))$$

En conclusion, nous avons défini les objets genre, série caractéristique, loi de groupe formelle, et logarithme. La donnée de l'un de ces quatre objets détermine les trois autres.

1.2 Genre elliptique

Dans cette sous section, $B = \mathbb{Q}$.

Définition 1.2.1 *Un genre $\varphi : \Omega_*^{SO} \otimes \mathbb{Q} \to B$ est dit* elliptique *si son logarithme $\log_\varphi$ est donné par une integrale elliptique de la forme suivante*

$$\log_\varphi(x) = \int_0^x \frac{1}{(1 - 2\delta t^2 + \varepsilon t^4)^{1/2}} dt$$

Remarque 1.2.2 *Un genre elliptique φ a pour loi de groupe formelle*

$$F_\varphi(x, y) = \frac{x\sqrt{R(y)} + y\sqrt{R(x)}}{1 - \varepsilon x^2 y^2}$$

Le premier exemple de genre est le genre elliptique L ou genre signature.

Définition 1.2.3 *Le genre L est le genre de série caractéristique Q_L donnée par*

$$Q_L(x^2) := \frac{x}{\mathrm{th}(x)}$$

Proposition 1.2.4 *Le genre L est elliptique.*

Preuve de la proposition : Clairement $\log_L(x) = \mathrm{th}^{-1}(x)$. Or

$$\mathrm{th}^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt = \int_0^x \frac{1}{((1-t^2)^2)^{1/2}}dt = \int_0^x \frac{1}{((1-2t^2+t^4)^{1/2}}dt$$

Donc le genre L est elliptique de paramètres $\delta = 1$ et $\varepsilon = 1$. De plus le développement en série de $\frac{1}{1-t^2}$ est

$$\frac{1}{1-t^2} = \sum_{k\geqslant 0} t^{2k}$$

d'où

$$\log_L(x) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2k+1} t^{2k+1}$$

On en déduit que pour tout entier n, $L(\mathbb{C}P^{2n}) = 1$.

$\square$

Définition 1.2.5 *Le genre $\hat{A}$ est le genre défini par la série caractéristique $Q_{\hat{A}}$ donnée par*

$$Q_{\hat{A}}(x^2) := \frac{x/2}{\sinh x/2}$$

Proposition 1.2.6 *Le genre $\hat{A}$ est elliptique.*

Preuve de la proposition :
Dans ce cas, le logarithme est donné par $\log_{\hat{A}}(x) = \sinh(x/2)^{-1}$. Or

$$\frac{d}{dx}(2\sinh(x/2)^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2/4}}$$

D'où

$$\log_{\hat{A}}(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2/4}}dt$$

ce qui prouve que le genre $\hat{A}$ est elliptique de paramètres $\delta = -\frac{1}{8}$ et $\varepsilon = 0$.

$\square$

2 Multiplicativité forte

2.1 Variétés virtuelles

Soit M une variété orientée compacte de dimension $2n$. A toute classe de cohomologie u dans $H^2(M, \mathbb{Z})$ on peut associer une sous-varieté[1] U de M de codimension 2 telle que $i^*([U]) \in H_{2n-2}(M, \mathbb{Z})$ soit le dual de Poincaré de u, où i est l'inclusion de U dans M et $[U]$ désigne la classe fondamentale de U. La classe u est appelée sous-variété virtuelle. Après avoir muni M d'une métrique

[1] Il s'agit d'un résultat de R. Thom cf. [Tho54]

Riemannienne on peut identifier $TM|_U$ et $TU \oplus NU$ où NU désigne le fibré normal à M dans U. Ce dernier est un fibré en plans réel qui peut naturellement être muni d'une structure de fibré en droites complexes dont la première classe de Chern est $i^*(u)$. Alors

$$c(NU) = 1 + c_1(NU) = 1 + i^*(u)$$

d'où

$$p(NU) = 1 + i^*(u^2)$$

Puis, en utilisant que $TU \oplus NU = i^*(TM)$:

$$\begin{aligned}
& p(U) \cdot p(NU) = i^* p(M) \\
\Rightarrow \quad & p(U) \cdot i^*(1 + u^2) = i^* p(M) \\
\Rightarrow \quad & p(U) = i^*(p(M) \cdot (1 + u^2)^{-1}) \\
& = i^*((1 + p_1(M) + p_2(M) + \cdots)(1 - u^2 + u^4 - u^6 + \cdots))
\end{aligned}$$

Par ailleurs, nous savons que pour tout élément $a \in H^*(M, \mathbb{Z})$

$$i^*(a)[U] = (a \cdot u)[M]$$

Ainsi, il apparait que les nombres de Pontrjagin de U peuvent être exprimés comme l'évaluation d'un polynome homogène de degré $2n$ en u et en les $p_i(M)$ evalué sur le cycle fondamental de M, $[M]$.

La construction précédente peut être généralisée à tout r-uplet $(u_1, u_2, \cdots, u_r)$ de classes de cohomologie $u_i \in H^2(M, \mathbb{Z})$ pour obtenir une sous-variété U_r telle que $[U_r]$ soit le dual de Poincaré de $u_1 \cdots u_r$ et dont la classe de Pontrjagin totale $p(U_r)$ vérifie alors

$$p(U_r) \cdot i^*((1 + u_1^2) \cdots (1 + u_r^2)) = i^* p(M)$$

Si φ est un genre de logarithme g, de série caractéristique Q, de loi de groupe formelle $F(y_1, y_2) := \sum_{r,s \geqslant 0} a_{r,s} y_1^r y_2^s$ et de suite multiplicative $K := (K_j)_{j \geqslant 0}$, la proprieté $(**)$ implique par multiplicativité de K :

$$\begin{aligned}
& K(\sum_{j \geqslant 0} p_j(U_r) z^j) \prod_{k=1}^{r} i^* K(1 + u_k^2 z) = i^* K(\sum_{j \geqslant 0} p_j(M) z^j) \\
\Leftrightarrow\ & K(\sum_{j \geqslant 0} p_j(U_r) z^j) = i^*(K(\sum_{j \geqslant 0} p_j(M) z^j) \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{Q(u_k^2 z)}) \\
\Rightarrow\ & K(U_r) = i^*(K(M) \prod_{k=1}^{r} \frac{g^{-1}(u_k)}{u_k})
\end{aligned}$$

d'où, en évaluant sur $[U_r]$:

$$\varphi(U_r) = (K(M) \cdot g^{-1}(u_1) \cdots f(u_r))[M] \quad (***)$$

Considérons maintenant deux classes u et v dans M, le but étant d'exprimer $\varphi(u + v)$ en fonction des valeurs prises φ sur les sous-varietés virtuelles de type

$(\underbrace{u, u, \cdots, u}_{r}, \underbrace{v, v, \cdots, v}_{s})$ lorsque r et s parcourent $\mathbb{N}$. C'est le contenu du lemme suivant :

Lemme 2.1.1

$$\varphi(u+v) = \sum_{r,s \geqslant 0} a_{r,s} \cdot \varphi(\underbrace{u, u, \cdots, u}_{r}, \underbrace{v, v, \cdots, v}_{s})$$

Preuve du lemme : Posons $f = g^{-1}$ et rappelons le lien entre f, g et F :

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(g(f(u)) + g(f(v))) \\ &= F(f(u), f(v)) \\ &= \sum_{r,s \geqslant 0} a_{r,s} f(u)^r f(v)^s \end{aligned}$$

En vertu de l'identité $(***)$ établie précédemment :

$$\begin{aligned} \varphi(u+v) &= (K(M) \cdot f(u+v))[M] \\ &= \sum_{r,s \geqslant 0} a_{r,s} (K(M) \cdot f(u)^r f(v)^s)[M] \\ &= \sum_{r,s \geqslant 0} a_{r,s} \cdot \varphi(\underbrace{u, u, \cdots, u}_{r}, \underbrace{v, v, \cdots, v}_{s}) \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme.

□

2.2 Variétés de Milnor et genre universel

Définition 2.2.1 *Le genre universel est l'application identité* $\underline{\varphi} := Id : \Omega_*^{SO} \otimes \mathbb{Q} \to \Omega_*^{SO} \otimes \mathbb{Q}$. *Son logarithme est noté* $\underline{g}$ *et sa loi de groupe formelle* $\underline{F}(y_1, y_2) := \sum_{r,s \geqslant 0} \underline{a}_{r,s} y_1^r y_2^s$.

L'égalité du lemme 2.1.1 appliquée au genre universel est une identité dans $\Omega_*^{SO} \otimes \mathbb{Q}$:

$$(u+v) = \sum_{r,s \geqslant 0} \underline{a}_{r,s} \cdot (\underbrace{u, u, \cdots, u}_{r}, \underbrace{v, v, \cdots, v}_{s})$$

Définition 2.2.2 *Soient* i *et* j *deux entiers tels que* $i \leqslant j$. *La varieté de Milnor* $H_{i,j}$ *est la sous-varieté de* $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$ *dont les points ont des coordonnées homogènes* $((u_0 : u_1 : \cdots : u_i), (v_0 : v_1 : \cdots : v_j))$ *vérifiant*

$$u_0 v_0 + u_1 v_1 + \cdots u_i v_i = 0$$

Soient i et j deux entiers tels que $i \leqslant j$. Considérons les deux générateurs (en tant qu'anneaux) $u \in H^2(\mathbb{C}P^i)$ et $v \in H^2(\mathbb{C}P^j)$. Identifions u et v avec leurs tirés en arrière dans $H^2(\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j)$ via les projections canoniques. En remarquant que pour tout entier r, $(\underbrace{u, u, \cdots, u}_{r})$ est représentée par $\mathbb{C}P^{i-r} \subset \mathbb{C}P^i$, il vient

$$\begin{aligned} H_{i,j} &= \underline{\varphi}(H_{i,j}) \\ &= \sum_{r,s \geqslant 0} \underline{a}_{r,s}(\underbrace{u, u, \cdots, u}_{r}, \underbrace{v, v, \cdots, v}_{s}) \\ &= \sum_{r=0}^{i} \sum_{s=0}^{j} \underline{a}_{r,s} \mathbb{C}P^{i-r} \mathbb{C}P^{j-s} \end{aligned}$$

Posons

$$H(y_1, y_2) := \sum_{i,j \geqslant 0} H_{i,j} y_1^i y_2^j$$

Proposition 2.2.3 *Les séries formelles H et $\underline{F}$ sont reliées par*

$$H(y_1, y_2) = \underline{F}(y_1, y_2) \cdot \underline{g}'(y_1) \cdot \underline{g}'(y_2)$$

Preuve de la proposition :

$$\begin{aligned} H(y_1, y_2) &= \sum_{i,j \geqslant 0} H_{i,j} y_1^i y_2^j \\ &= \sum_{i,j \geqslant 0} \sum_{r=0}^{i} \sum_{s=0}^{j} \underline{a}_{r,s} \mathbb{C}P^{i-r} \mathbb{C}P^{j-s} y_1^i y_2^j \\ &= \sum_{r,s \geqslant 0} \underline{a}_{r,s} y_1^r y_2^s \sum_{i \geqslant r} \mathbb{C}P^{i-r} y_1^{i-s} \sum_{j \geqslant s} \mathbb{C}P^{j-s} y_2^{j-s} \\ &= \underline{F}(y_1, y_2) \cdot g'(y_1) \cdot g'(y_2) \end{aligned}$$

□

2.3 Multiplicativité forte

Définition 2.3.1 *Un genre φ est dit fortement multiplicatif si*

$$\varphi(E) = \varphi(B)\varphi(F)$$

pour toute fibration spin

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ & & \downarrow \\ & & B \end{array}$$

de groupe strucural G compact et connexe.

Proposition 2.3.2 *Un genre φ est elliptique si et seulement si il s'annule sur toutes les varietés de Milnor $H_{3,2i}$ pour $i \geqslant 2$.*

Preuve de la proprieté : Soit φ un genre de loi de groupe formelle F et de genre g avec $f := g^{-1}$. Notons $h_{i,j} := \varphi(H_{i,j})$ et $h(y,z) := \varphi_* H(y,z) = \sum_{i,j \geqslant 0} h_{i,j} y^i z^j$. Par universalité du genre $\underline{\varphi}$ la proposition 2.2.3 implique que

$$h(y,z) = F(y,z) \cdot g'(y_1) \cdot g'(y_2) \quad (1)$$

Notons $r(y) := \sum i \geqslant 1 h_{3,2i} y^{2i}$. Développons F en série de Taylor par rapport à la variable z pour obtenir

$$F(y,z) = y + \frac{\partial F}{\partial z}(y,0) z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(y,0) z^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial z^3}(y,0) z^3 + \cdots$$

ce qui donne, en utilisant (1) et la relation $g'(y) \frac{\partial F}{\partial z}(y,0) = 1$:

$$\begin{aligned} h(y,z) &= g'(y) g'(z) (y + \frac{\partial F}{\partial z}(y,0) z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(y,0) z^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial z^3}(y,0) z^3 + \cdots) \\ &= g'(z) \left(g'(y) y + z + \frac{1}{2} g'(y) \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(y,0) z^2 \right) + \frac{1}{6} g'(y) g'(z) \frac{\partial^3 F}{\partial z^3}(y,0) z^3 + \cdots \end{aligned}$$

En constatant que $g'(z)$ est paire et que $r(y)$ est le coefficient de z^3 dans $h(y,z)$ (car $H_{3,2i+1}$ est nulle dans $\Omega_*^{SO} \otimes \mathbb{Q}$ d'après le théorème 1.1.10) il vient :

$$r(y) = \frac{1}{6} g'(y) \frac{\partial^3 F}{\partial z^3}(y,0) \quad (2)$$

Il est naturel de considérer $b(y) := \frac{\partial F}{\partial z}(y,0) = 1/g'(y)$. En partant de la définition de F par $F(y,z) := g^{-1}(g(y) + g(z))$ et en différentiant tois fois par rapport à z il vient successivement

$$\frac{\partial F}{\partial z}(y,z) = \frac{g'(z)}{g'(F(y,z))} = \frac{b(F(y,z))}{b(z)}$$

puis

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(y,z) = \frac{b(F(y,z))(b'(F(y,z)) - b(z) b'(z))}{b(z)^3}$$

et enfin, en utilisant que $b'(0) = 0$ et $b(0) = 1$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial z^3}(y,0) = b(y)(b''(y) b(y) + b'(y)^2 - b''(0))$$

En combinant cette égalité et (2) on obtient

$$6r(y) = \frac{[b(y)^2]'' - b''(0)}{2}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \varphi(H_{3,2i}) = 0 \quad \forall i \geqslant 2 &\Leftrightarrow r(y) = h_{3,2} y^2 \\ &\Leftrightarrow \exists \delta,\, \varepsilon \,/\, b(y)^2 = 1 - 2\delta y^2 + \varepsilon y^4 \end{aligned}$$

Ce qui prouve la proposition.

$\square$

Remarque 2.3.3 *Dans la démonstration précédente on voit que* $\varepsilon = h_{3,2}$ *et* $\delta = \varphi(\mathbb{C}P^2)$.

Corollaire 2.3.4 *Tout genre fortement multiplicatif est elliptique.*

Preuve du corrolaire : $H_{3,2i}$ est fibré par $\mathbb{C}P^{2i-1}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}P^{2i-1} \arrow[r] & H_{3,2i} \arrow[d] \\ & \mathbb{C}P^3 \end{tikzcd}$$

La multiplicativité forte nous donne donc

$$\varphi(H_{3,2i}) = \varphi(\mathbb{C}P^{2i-1})\varphi(\mathbb{C}P^3) = 0$$

car $\mathbb{C}P^{2i-1}$ est bordante. En appliquant la proposition 2.3.2, φ est donc elliptique.

3 Genre et formes modulaires

Définition 3.0.5 *Le genre elliptique universel* $\varphi^{SO} : \Omega_*^{SO} \otimes \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}[\delta, \varepsilon]$ *est donné par le logarithme*

$$\log_{\varphi^{SO}}(x) :=$$

où $\mathbb{Q}[\delta, \varepsilon]$ *est l'anneau des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{Q}$ *en les indeterminées libres* δ *et* ε *de degrés respectifs* 4 *et* 8.

Proposition 3.0.6 *L'image de la composée* $\Omega_*^{SO} \to \Omega_*^{SO} \otimes \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}[\varepsilon, \delta]$ *est le sous-anneau* $\mathbb{Z}[1/2, \delta, \varepsilon]$.

On note Γ_0 le sous-groupe de $SL(2, \mathbb{Z})$ constitué des matrices triangulaires supérieurs modulo 2. On a

Proposition 3.0.7 *L'anneau des formes modulaires pour* Γ_0 *est* $\mathbb{C}[\delta, \varepsilon]$.

Remarque 3.0.8

$$\delta(\tau) = -1/8 - 3\sum_{n\geqslant 0}(\sum_{d|n, d\ pair} d)q^n$$

et

$$\varepsilon(\tau) = \sum_{n\geqslant 1}(\sum_{d|n, d\ pair} d^3)q^n$$

avec $q = \exp^{2\pi i\tau}$.

$$\sigma(z, \tau) = -2\frac{\mathcal{P}(z, \tau) - \mathcal{P}(\frac{1+\tau}{2})}{\mathcal{P}'(z, \tau)}$$

Théorème 3.0.9 $\mathbb{Z}[1/2, \delta, \varepsilon]$ *est constitué des formes modulaires pour* Γ_0 *dont la série de Fourier est à coefficient dans* $\mathbb{Z}[1/2]$.

Références

[Tho54] R. Thom. Quelques propriétés globales des variétés différentiables. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 28(1) :17–86, 1954.