Groupe de Travail
Cohomologie Elliptique
et
Théorie Quantique des Champs

Nantes, 13-17 décembre 2010

Genre Elliptique

Ω_{SO} : anneau de cobordisme orienté

Ω_U : anneau de cobordisme complexe

R : $\mathbb{Q}$-algèbre commutative

$$\boxed{\textbf{R. Thom} : \Omega_{SO} \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^4, \mathbb{C}P^6, \cdots]}$$

R-**genre orienté** : Un morphisme d'anneaux

$$g : \Omega_{SO} \to R$$

(1) : $g(M \coprod N) = g(M) + g(N)$
(2) : $g(M \times N) = g(M)g(N)$
(3) $g(M) = g(N)$ si M est cobordante à N.

R-**genre complexe** : Un morphisme d'anneaux

$$g : \Omega_U \to R$$

Exemple : Signature.
non-Exemple : Caractéristique d'Euler

Définition Soit $E \to M$ un G fibré principal et V une G-variété, avec G connexe.

g vérifie la relation multiplicativité forte si

$$g(E \otimes_G V) = g(M) g(V).$$

Exemples :

Théorème (Chern-Hirzebruch-Serre, 1957) : Signature vérifie la relation multiplicativité forte.

Théorème (Atiyah) : $\hat{A}$ vérifie la relation multiplicativité forte.

Une conséquence : Soit $\xi \to M$ un fibré complexe de dimension k.

Fibré projectivisé $\mathbb{C}P(\xi) = (\xi \setminus M)/S^1$

$$g(\mathbb{C}P(\xi)) = g(\mathbb{C}P^{k-1}) g(M)$$

Question 1 : Caractériser tout genre qui vérifie la relation de multiplicativité forte ?

Réponse (Ochanine, Taubes 1985) : Genres elliptiques

Théorème (Atiyah-Hirzebruch 1970) : Pour une variété spinorielle avec une S^1-symétrie, $\hat{A}$ s'annule.

Question 2 : Déterminer les genres qui s'annulent pour toute variété, compacte spinorielle munie d'une action de S^1.

Réponse (Ochanine 198, Bott-Taubes 1989) : Genres elliptiques

Alors, qu'est-ce qu'un genre elliptique ?

Logarithme d'un genre :

$$\log_g(x) := x + g(\mathbb{C}P^2)\frac{x^3}{3} + g(\mathbb{C}P^4)\frac{x^5}{5} + \cdots g(\mathbb{C}P^{2n})\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

Définition : g est elliptique si pour certains $\delta, \epsilon \in \mathbb{C}$,

$$\log_g(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - 2\delta t^2 + \epsilon t^4}}$$

Exemples :

$\delta = \epsilon = 1$: Signature σ ; $\quad \log_\sigma(x) = \tanh^{-1}(x)$

$\delta = -1/8$, $\epsilon = 0$: $\hat{A}$; $\quad \log_{\hat{A}}(x) = 2\sinh^{-1}(x/2)$

Théorème (Ochanine, Taubes) Les trois énoncés suivants sont équivalentes :

(1) g est elliptique.

(2) g vérifie la relation de multiplicativité forte.

(3) $g(\mathbb{C}P(\xi)) = 0$, si $\dim \xi$ impaire.

Pourquoi elliptique ? Quel est le rapport avec les courbe elliptiques ? La réponse s'appuie sur la notion de *la loi de groupe formel.*

Loi Groupe formel : est une série $F(x,y) \in R[[x,y]]$ t.q.

(1) $F(x, F(y,z)) = F(F(x,y), z)$
(2) $F(x,y) = F(y,x)$
(3) $F(x,0) = F(0,x) = x$

Exemple :

(1) $F(x,y) = x + y$ (cohomologie singulière)
(2) $F(x,y) = x + y + xy$ (K-théorie)

Une courbe elliptique $E = \mathbb{C}/\Lambda$ nous fournit une loi de groupe formel sur $\mathbb{Z}[1/2, \delta, \epsilon]$.

Ici $\Lambda = \mathbb{Z}\langle 1, \tau\rangle$ est un réseau dans le plan complexe.

Voici une formule explicite

$$F^{ell}(x,y) = \frac{x\sqrt{R(y)} + y\sqrt{R(x)}}{1 - \epsilon x^2 y^2} \in [1/2, \delta, \epsilon][[x,y]]$$

$$R(x) = 1 - 2\delta t^2 + \epsilon t^4$$

Les paramètres δ et $\epsilon \in \mathbb{C}$ sont les coefficients de la forme quartique de E,

$$y^2 = R(x) = 1 - 2\delta x^2 - \epsilon x^4$$

et sont définis à l'aide de la fonction de Weierstrass de Λ.

Les fonctions $\tau \mapsto \delta(\tau)$ et $\tau \mapsto \epsilon(\tau)$ sont modulaires.

Formule d'Euler :

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = \int_0^{F(x,y)} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

Question : Comment obtenir une loi de groupe formel ?

Une réponse : A partir des "bonnes" théories de cohomologie :

Bonne $\Longrightarrow h^*(\mathbb{C}P^\infty) = R[[x]]$, où $R = h(*)$.
Soit $l \to \mathbb{C}P^\infty$ fibré en droite universel.

∞

$$
\begin{tikzcd}
& p_1^*(l) \otimes p_2^*(l) \arrow[r] \arrow[d] & l \arrow[d] \\
& \exists \quad m : \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \arrow[r] \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \mathbb{C}P^\infty \\
\mathbb{C}P^\infty & & \mathbb{C}P^\infty
\end{tikzcd}
$$

$$h^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) = R[[y, z]]$$

Alors $m^*(x) = F(y, z)$.

$$\boxed{F(y, z) \text{ définit une loi de groupe formel.}}$$

Exemples : : Cohomologie de Rham $H^*_{dR}(M)$, K-théorie $K(X)$, cobordisme complexe $MU(X)$,...

(1) $F^{H_{dR}}(x, y) = x + y$

(2) $F^K(x, y) = x + y + xy$

Théorème (Quillen, 1969) F^{MU} est universelle (pour les $\mathbb{Z}$-algèbres)

$MU(*) = \mathbb{Z}[x_2, x_4, \cdots]$.

Alors, il existe un homomorphisme

$$\phi^{ell} : MU(*) \to \mathbb{Z}[1/2, \delta, \epsilon]$$

t.q. $\phi^{ell}_*(F^{MU}) = F^{ell}$

On appelle ϕ^{ell} le genre elliptique *complexe universel* et prend ses valeurs dans l'espace des formes modulaires.

Avec un peu de travail on peut aussi définir le genre elliptique orienté.

Cohomologie Elliptique

Question : Est-ce que le genre elliptique provient d'une "bonne" théorie de cohomologie ?

Réponse : (Landweber-Ravenel-Stong 1988) : Oui,

$$Ell^*(X) = MU(X)^* \otimes_{MU(*)} \mathbb{Z}[1/2, \delta, \epsilon]$$

- Il existe même une théorie équivariante et un théorème de complétion (comme celui d'Atiyah-Segal pour la K-théorie) qui nous permet de la calculer à l'aide d'une complétion par rapport aux puissances d'un idéal (I-adic completion).

-On verra plus tard des calculs pour le cas BG d'un espace classifiant d'un groupe fini.

Représentation géométrique de cohomologie elliptique

What we won't touch !

Cohomologie Elliptique à la Lurie-Hopkins-Miller.... i.e. TMF

Thm. de représentabilité de Brown s'énonce :

Sous certaines conditions un foncteur sur la catégorie homotopique de CW est représentable par un spectre $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples :
- Espaces d'Eilenberg-McLane représente la cohomologie singulière.
- K-théorie complexe est represénté par $\mathbb{Z}\times BU, U, ...$ [périodicité de Bott]. -$MU(-)$ représenté par le spectre de Thom.

TMF= Topological Modular Form :
- Un spectre qui représente $Ell(X)$.

- Un spectre en anneau E^{∞} car Ell est une théorie cohomologique multiplicative.

What we will try to understand !

Objets elliptiques à la Segal-Stolz-Teichner...Hu : SUSY-QFT

I'idée de Segal :

Penser à un fibré vectoriel $E \to X$ avec une connexion comme une théorie de champs de dim 1 sur X.
Cette théorie des champs représente un élément de $K(X)$.

Segal avait proposé de consider les théories des champs conformes sur X pour une représentation géométrique de la cohomologie elliptique. Il faut donc :

(1) Associer un espace de Hilbert à un lacet.

(2) Associer à une surface conforme un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Programme de Stolz-Teichner vise à rendre rigoureuse l'idée l'idée de Segal. En, particulier ils essayent de montrer des différentes théories cohomologique sont représentable par les espaces de module des théorie des champs.

Théories des champs :

Une théorie des champs topologique de dimension d (d-TFT) est un foncteur monoidal symétrique $E : \mathcal{B}^d \to Hilb$.

Hilb : Catégorie des $\mathbb{C}$-espaces de Hilbert avec les opérateurs de Hilber-Schmidt comme morphismes.

$\mathcal{B}_d$ est la catégorie de cobordisme :

$$\text{Objets} = \text{ variétés fermées compactes de dimension } d-1,$$
$$\text{Morphismes } B^d(M_1, M_2) = \text{"cobordismes" entre } X, Y$$

On suppose également que par F, la transformation naturelle

$$B^d(\emptyset, M \coprod N) \mapsto B^d(\bar{M}, N)$$

correspond à

$$Hilb(\mathbb{C}, F(M) \otimes F(N)) \mapsto Hilb(F(\bar{M}), F(N)).$$

Variations : structures géométriques supplémentaires sur les variétés.

(i) $\mathcal{CB}^2$ théorie conforme des champs CFT : $d = 2$, Morphismes= surfaces conformes

(ii) $\mathcal{EB}^1$ théorie des champs euclidienne : $d = 1$

(iii) $\mathcal{EB}^1_n$, $\mathcal{CB}^2_n$ théorie des champs de Clifford de degré n : en présence d'un structure de spin.

(iv) SUSY- $(1|1) - \mathcal{EB}^1_n$, théorie des champs super-symétrique : variétés de dimension 1 sont remplacées par les $(1|1)$-super-variétés munie d'une structure qui remplace la métrique.

(v) Théories des champs sur une variété X : Dans cette version, les objets et les morphismes sont équipés d'une application dans X avec les relations de compatibilité.
$\mathcal{EB}^1(X)$, $\mathcal{EB}^1_n(X)$, $\mathcal{CB}^2(X)$, ...

> Objets elliptiques de Segal : $\mathcal{CB}^2(X)$, avec "Rigging" ne définit pas une théorie cohomologique, car il ne vérifie pas la condition d'excision.

On va essayer de comprendre deux théorèmes :

(Stolz-Teichner) $(1|1) - \mathcal{EB}^1_n$ est un Ω-spectre pour la K-théorie.

et

(Hohnholt-Kreck-Stolz-Teichner) $(0|1) - TFT$ correspond à la cohomologie de De Rham.

Et éventuellement,

La notion d'objet elliptique enrichi qui répondra, j'espère, à la question de représentation géométrique de la cohomologie elliptique.