GROUPE DE TRAVAIL
COHOMOLOGIE ELLIPTIQUE ET THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS
13-17 DÉCEMBRE, NANTES

ORGANISATEURS: HOSSEIN ABBASPOUR & FRIEDRICH WAGEMANN

Nous proposons un groupe de travail sur la cohomologie elliptique et la théorie quantique des champs. Une première partie du groupe de travail sera consacrée aux fondamentaux : la définition du genre elliptique, et de la cohomologie elliptique classique. Une seconde partie sera consacrée aux développements récents d'un programme visant, au moyen d'idées de la théorie quantique des champs, à donner une interprétation géométrique de la cohomologie elliptique.

Un *genre* à valeurs dans un anneau Λ est une application qui à toute variété M (éventuellement munie d'une structure orientée, presque-complexe, ...) associe un élément $g(M) \in \Lambda$ de sorte que

$$g(\partial M) = 0, \quad g(M \amalg N) = g(M) + g(N), \quad \text{et} \quad g(M \times N) = g(M) \cdot g(N).$$

Se donner un tel genre revient formellement à se donner un morphisme $g : \Omega_* \to \Lambda$ sur l'anneau Ω des classes de bordismes des variétés M. On considère dans la suite l'anneau des classes de bordisme des variétés orientées $\Omega_* = \Omega_*^{SO}$. Le *genre elliptique* d'Ochanine [8] est un genre, à valeurs dans l'anneau des formes modulaires, dont le logarithme $log_g(x) = \sum \frac{1}{2n+1} g(\mathbb{CP}^n) x^{2n+1}$ est donné par une intégrale elliptique

$$E(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - 2\delta t^2 + \varepsilon t^4}},$$

pour des constantes complexes δ, ε. La motivation initiale était de caractériser les genres qui vérifient la relation de multiplicativité forte $g(E \times_G V) = g(B).g(F)$ pour un G-fibré principal $E \to B$ et V une G-variété spin fermée (avec G compact connexe et B fermée orientée).

La cohomologie elliptique classique, que l'on étudiera, est définie à partir du genre elliptique par un produit tensoriel $Ell^*(X) = \Omega^*_{SO}(X) \otimes_{\Omega_*^{SO}} \Lambda$ (voir [5, 7]), en appliquant le théorème des cohomologies exactes au sens de Landweber que l'on révisera dans le cours du groupe de travail. Le problème consiste à trouver une interprétation géométrique de cette théorie $Ell^*(X)$, qui est définie de façon purement algébrique jusqu'à présent. Un programme a été proposé par Segal [13], en partant des idées de la théorie des champs et d'une intuition de Witten, selon laquelle le genre elliptique doit se comprendre comme l'indice d'un opérateur de Dirac sur un espace de lacets libres. Le but final du groupe de travail sera de comprendre la définition des EFT (euclidean field theories), proposées par Stolz et Teichner [4, 14], comme un candidat pour boucler le programme de Segal. Parmi les résultats obtenus, dont l'énoncé pourra être présenté en toute fin de groupe de travail, citons : la réalisation de la cohomologie de de Rham par des classes de concordances de EFT de (super)dimension $0|1$ [4], la construction d'un spectre représentant la K-théorie complexe périodique par des espaces de EFT de dimension 1.

On propose les sujets d'exposé suivants. La première partie s'appuie sur un corpus classique. Les exposés (1.1-5) sont ainsi recommandés pour les doctorants.

(1.1) Lois de groupe formel, l'anneau de Lazard.

(1.2) Théories de cohomologie complexe-orientées, MO, MU etc.

(1.3) Formes modulaires et courbes elliptiques (pour les topologues), et leurs groupes formels [3], [2, Chapitre 2].

(1.4) Le genre elliptique et ses propriétés, formes modulaires [17], [2, Chapitre 5].

(1.5) Cohomologie elliptique (foncteur exact de Landweber, construction de Bass-Sullivan) [17, Chapitre II].

(1.6) Cohomologie de groupe généralisée, des calculs de $Ell(BG)$ pour G un groupe fini et ses sous-groupes de Sylow [17, Chapitre VI].

(1.7) Cohomologie elliptique équivariante et le théorème de complétion (Atiyah-Segal) [17, Chapitre VII].

L'objectif proposé pour la seconde partie serait de comprendre les énoncés des théorèmes 1.0.1 et 1.0.2 de [14]. Stolz et Teichner ont un deuxième article [15] de survol sur ce sujet qui pourra servir de guide de lecture.

(2.1) Objets elliptiques à la Segal : les objectif et les défis [13] ou [17, Chapitre VIII], [14, section 1.1].

(2.2) Théories des champs [14, Section 2.1].

(2.3) algèbres de Clifford et modules de Fock [14, Section 2.2]

(2.4) Définir les théories conformes des champs (cliffordienne linéaire de dimension n) [14, Section 2.3]

(2.5) Rappel sur les super-variétés, définition des théories de champs super-symétriques, la démonstration théorème 1.0.1 [14, Sections 3.1, 3.2]

(2.6) La théorie conforme des champs et les formes modulaires ([14] section 3.3)

(2.7) Objets elliptiques : reprise [14, Section 4.2]

(2.8) Une possibilité pour conclure le groupe de travail sera d'énoncer le théorème de Hohnhold, M. Kreck, S. Stolz, & P. Teichner – la représentation de la cohomologie de de Rham par des classes de concordances de $0|1-EFT$, et d'esquisser sa démonstration.

(2.9) Autre possibilité : objets elliptiques enrichis [14, Section 4.4]

Certaines références sont accessibles sur la page :
`http ://www.math.sciences.univ-nantes.fr/∼hossein/GdT-Elliptique/GdT-elliptique`

Références

[1] Bott, Raoul ; Taubes, Clifford On the rigidity theorems of Witten. J. Amer. Math. Soc. 2 (1989), no. 1, 137–186.

[2] Greenberg master thesis.

[3] Hirzebruch, Friedrich ; Berger, Thomas ; Jung, Rainer. Manifolds and modular forms. With appendices by Nils-Peter Skoruppa and by Paul Baum. Aspects of Mathematics, E20.

[4] H. Hohnhold, M. Kreck, S. Stolz, & P. Teichner. Differential forms and 0-dimensional super symmetric field theories `http://math.berkeley.edu/~teichner/Papers/DimZero.pdf`

[5] P. Landweber. Elliptic cohomology and modular forms. Elliptic curves and modular forms in algebraic topology (Princeton, NJ, 1986), 55–68, Lecture Notes in Math., 1326, Springer, Berlin, 1988.

[6] Landweber, Peter S. ; Stong, Robert E. Circle actions on Spin manifolds and characteristic numbers. Topology 27 (1988), no. 2, 145–161.

[7] Landweber, Peter S. ; Ravenel, Douglas C. ; Stong, Robert E. Periodic cohomology theories defined by elliptic curves. The Cêch centennial (Boston, MA, 1993), 317–337, Contemp. Math., 181, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995

[8] Ochanine, Serge Sur les genres multiplicatifs définis par des intégrales elliptiques. (French) [On multiplicative genera defined by elliptic integrals] Topology 26 (1987), no. 2, 143–151

[9] Ochanine, Serge Elliptic genera. In Encyclopedia Mathematica, Suppl. Vol. 1, pages 236-239. Kluwer, 1997.

[10] Ochanine, Serge Elliptic cohomology.In Encyclopedia Mathematica, Suppl. Vol. 1, page 236.Kluwer, 1997.

[11] Ochanine, Serge What is ... an elliptic genus ? Notices Amer. Math. Soc. 56 (2009), no. 6, 720–721.

[12] Segal, Graeme Elliptic cohomology (after Landweber-Stong, Ochanine, Witten, and others). Séminaire Bourbaki, Vol. 1987/88. Astérisque, No. 161-162 (1988), Exp. No. 695, 4, 187–201 (1989).

[13] Segal, Graeme What is an elliptic object ? Elliptic cohomology, 306–317, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 342, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.

[14] S. Stolz & P. Teichner, What is an elliptic object ? Topology, geometry and quantum field theory, 247–343, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 308, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[15] S. Stolz & P. Teichner Super-symmetric Euclidean field theories and generalized cohomology, a survey. `http://web.me.com/teichner/Math/Reading_files/Survey.pdf`

[16] Taubes, Clifford Henry. S^1-actions and elliptic genera. Comm. Math. Phys. 122 (1989), no. 3, 455–52

[17] C. Thomas, Elliptic cohomology, The University Series in Mathematics. Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 1999.