Traitement du signal S22P032
Séries et Transformée de Fourier

Hossein Abbaspour

Table des matières

1 Suites Numériques

Définitions, vocabulaires et critères

Définition 1.1. (1) Une *suite* numérique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(2) On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* vers $l \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

Dans ce cas on écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. La limite, si elle existe, est unique.

(3) $(u_n)_{n\in N}$ *diverge* si elle ne converge pas.

(4) $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$ si pour tout $A > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > N \Rightarrow |u_n| > A$$

(5) $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ si pour tout $A > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > N \Rightarrow u_n > A$$

(6) $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ si pour tout $A < 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > N \Rightarrow u_n < A$$

Exemple 1.2.

(1) $u_n = 1/n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(2) $u_n = (-1)^n n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$.

(3) $u_n = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(4) $u_n = (-1)^n$ diverge.

Définition 1.3. (i) Une suite $(u_n)_{n\in N}$ est *majorée* s'il existe A tel que

$$\forall n, \quad u_n \leq A.$$

De façon similaire, $(u_n)_{n\in N}$ est dite *minorée* s'il existe B tel que pour tout n, $B \leq u_n$

(ii) Une suite est *bornée* si elle est minorée et majorée.

(iii) $(u_n)_{n\in N}$ est *croissante* (resp. *décroissante*), indiqué par $u_n \nearrow$ (resp. $u_n \searrow$), si pour tout n, $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n \geq u_{n+1}$).

Une difficulté pour montrer qu'une suite est convergente est qu'il faut d'abord avoir un candidat l pour la limite. Les deux critères suivants ont l'avantage de ne pas requérir la connaissance de l.

Théorème 1.4. *Toute suite croissante (resp. décroissante) majorée (resp. minorée) est convergente.*

Définition 1.5. Une suite est dite *de Cauchy* si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que, pour tout $n, m > N$, on ait :

$$|u_n - u_m| < \varepsilon.$$

Théorème 1.6. *(Critère de Cauchy pour les suites) Une suite $(u_n)_{n\in N}$ converge* ***si et seulement si*** *elle est de Cauchy.*

Théorème 1.7. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans I, i.e. $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \in I$ alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.*

La suite géométrique

Pour $a \in \mathbb{R}$ la suite $n \mapsto a^n$ est la suite géométrique définie par a.

(i) Si $a > 1$ alors $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$

Démonstration. Comme $a > 1$, on peut écrire $a = 1 + h$ où $h > 0$. Alors

$$a^n = (1+h)^n = 1 + nh + \binom{n}{2}h^2 + \binom{n}{3}h^3 + \cdots > 1 + nh,$$

mais évidement $nh \to \infty$ quand $n \to +\infty$, et donc $a^n \to +\infty$. □

(ii) Si $|a| < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$.

Démonstration. Si $a = 0$ alors l'énoncé est évidemment correcte. Supposons donc $a \neq 0$. Soit $b = \frac{1}{|a|}$ alors $b > 1$ et donc, par le cas précédent $b^n = \frac{1}{|a|^n} \to +\infty$, ou de façon équivalente $|a|^n \to 0$ quand $n \to +\infty$; on en déduit que $a^n \to 0$. □

Conséquence : On maintient l'hypothèse $|a| < 1$.
Soit $S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$. Alors

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a},$$

et par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a},$$

ou autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty} (1 + a + a^2 + \cdots + a^n) = \frac{1}{1 - a}.$$

2 Séries Numériques

Définitions, vocabulaires et critères

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, $a_i \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). La suite $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ est appelée la *série numérique* de terme général a_n et est notée

$$a_0 + a_1 + a_2 \cdots$$

ou

$$\sum_{i\geq 0} a_i.$$

et S_n est appelée la somme partielle de l'ordre n.

Définition 2.1. La série $\sum_{i\geq 0} a_i$ est dite convergente de somme S (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) si la suite des sommes partielles S_n converge vers S, et on écrit

$$\sum_{i\geq 0} a_i = S.$$

Dans le cas contraire, on dit que $\sum_{i\geq 0} a_i$ diverge.

Exemple 2.2. Soit $a_n = \frac{1}{2^n}$, alors $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge (voir section 1). De plus

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to+\infty}(1+1/2+1/4+\cdots+1/2^n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-1/2^{n+1}}{1-1/2} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Exemple 2.3. Soit $a_n = (-1)^n$, où $n \neq 0$. Alors, $S_0 = 1$, $S_1 = 0$, $S_2 = 0\cdots$, plus généralement

$$S_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}, \tag{1}$$

Evidement S_n ne converge pas et alors la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ diverge.

Remarque 2.4. Notez que la convergence d'une série dépend seulement de la queue de la série. En conséquence, si on change un nombre fini des termes d'une série convergente, le résultat est encore convergent. Par exemple, la série $\sum_{i\geq 0} a_i$ est convergente si et seulement si $\sum_{i\geq 10} a_i$ est convergente.

Dans ce qui suit on donnera des conditions nécessaires ou suffisantes pour la convergence d'une série.

Théorème 2.5. *Si la série $\sum a_n$ converge alors $a_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.*

Démonstration. Par définition $\sum a_n$ converge si et seulement si S_n converge. Par le critère de Cauchy (Théorème 1.6), si S_n converge, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N t.q. $\forall n, m > N$,

$$|S_m - S_n| < \varepsilon.$$

Soit $m = n+1$ où $n > N$, alors

$$|a_{n+1}| = |S_{n+1} - S_n| < \varepsilon,$$

i.e. $a_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. $\square$

Exemple 2.6. (1) La série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n = 1-1+1-1\cdots$ ne converge pas car $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(-1)^n$ n'existe.

(2) Soit $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, où $n \geq 0$. Evidemment $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 0$ mais $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ ne converge pas car

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1-n)} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n},$$

et donc $S_n = (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \sqrt{n+1}-\sqrt{1}$. Nous avons $S_n \to +\infty$

Une conséquence simple du critère de Cauchy pour les suites et de la définition de convergence des séries est :

Théorème 2.7. *(Critère de Cauchy pour les séries) $\sum a_n$ converge si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N t.q. $\forall p > q > N$, $|a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_q| < \varepsilon$.*

Démonstration. Appliquer le théorème 1.6 à la suite des sommes partielles $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. □

Application

Exemple 2.8. La série $\sum_{n>1} 1/n$ diverge. Soient $p = n$ et $q = 2n$; alors

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = 1/2 \not< \varepsilon$$

pour ε assez petit, et par le critère de Cauchy la série $\sum_{n>1} 1/n$ diverge.

Définition 2.9. $\sum_n a_n$ est dite *absolument* convergente si la série $\sum_n |a_n|$ converge.

Proposition 2.10. *Si $\sum_n a_n$ est absolument convergente alors $\sum_n a_n$ converge.*

Remarque 2.11. Méfiez-vous que le contraire de Proposition 2.10 n'est pas correct ! Par exemple la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais pas absolument convergente (voir Exemple 2.8)

Séries à termes positifs

Théorème 2.12. *La séries $\sum_n a_n$ avec $a_n > 0$ converge si et seulement les sommes partielles sont majorées.*

Exemple 2.13. Les séries $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ convergent. On a

$$a_n = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

et donc $S_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_n = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Alors $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge. Ainsi que $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2}$ car

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} \Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 - \frac{1}{n}$$

et ses sommes partielles sont majorées. Par le théorème 2.12, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Théorème 2.14. *Soient $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ deux séries à termes positifs. On suppose qu'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,*

$$a_n \leq b_n.$$

(i) Si $\sum_n b_n$ converge $\sum_n a_n$ converge.

(ii) Si $\sum_n a_n$ diverge $\sum_n b_n$ diverge aussi.

Exemple 2.15. (a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+\sin^2 n}$ converge car $\frac{1}{n^2+\sin^2 n} \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

(b) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge comme $\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

(c) $\sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n^2}$ converge parce que $\sin \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ pour n assez grand.

(d) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge car $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

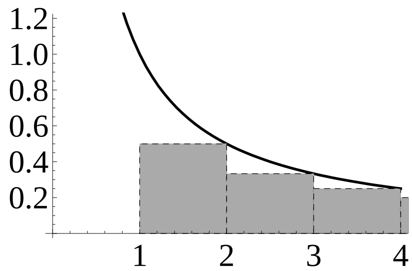
Séries de Riemann

Dans cette section on étudie la convergence des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$ où $p \geq 0$ est fixé.

(i) si $0 \leq p \leq 1$, alors pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$ diverge.

(ii) si $2 \leq p$ alors pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n^p} < \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ converge et donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$ converge.

(iii) si $1 < p \leq 2$: On compare les somme partielles avec l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$.



$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} = 1 + \text{ l'aire hachurée} \leq 1 + \text{ l'aire sous le graphe} \\ &= 1 + \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = 1 + \frac{1}{p-1}(1 - \frac{1}{n^{p-1}}) < 1 + \frac{1}{p-1} \end{aligned} \tag{2}$$

On voit que la suite des sommes partielles est majorée et on conclut que $\sum_{n\geq} \frac{1}{n^p}$. converge.

On résume :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^p} = \begin{cases}\text{diverge si } 0\leq p\leq 1\\ \text{converge si } 1<p\end{cases} \tag{3}$$

L'argument du calcul en(iii) peut être utilisé pour démontrer le théorème suivant.

Théorème 2.16. *Soit $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ une application continue et décroissante alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\sum_{n\geq 1} f(n)$ converge.

(2) La suite $(\int_1^n \frac{1}{x^p}dx)_{n\geq 1}$ est majorée.

(3) $\int_1^n \frac{1}{x^p}dx$ converge quand $n\to\infty$ i.e. $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ existe et est fini.

Deux critères importants

On finit ce chapitre par deux critères très importants.

Théorème 2.17. *(Critère de Cauchy) Soit $\sum_n a_n$ une suite à termes positifs. On suppose que $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = l$*

(1) Si $l<1$ alors $\sum_n a_n$ converge.

(2) Si $l>1$ alors $\sum_n a_n$ diverge.

(3) Si $l=1$ on ne peut pas conclure.

Exemple 2.18. (1) $\sum_{n=0}^\infty x^n$ converge absolument si $|x|<1$ car $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|x|^n} = |x|$.

(2) Pour la série $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n^p}$, $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(\frac{1}{n^p})} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^p} = 1$ donc dans ce cas, le test de Cauchy n'est pas concluant !

(3) La série $\sum_n nx^n$ converge pour $0<x<1$ car $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{nx^n} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}x = x < 1$.

Théorème 2.19. *(Critère de d'Alembert) Soit $\sum_n a_n$ une suite à termes positifs. On suppose que $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l$*

(1) Si $l<1$ alors $\sum_n a_n$ converge.

(2) Si $l>1$ alors $\sum_n a_n$ diverge.

(3) Si $l=1$, on ne peut pas conclure.

Exemple 2.20. (1) Pour $0<x<1$, la série $\sum_n nx^n$ converge car

$$\lim_{n\to+\infty}((n+1)x^{n+1})/(nx^n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}x = x<1.$$

(2) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la série $\sum_{n>0} x^n/n!$ converge car

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!}x = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}x = 0<1.$$

(3) Pour tout $x < 1$, la série $\sum_n x^n/n^2$ diverge,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}/(n+1)^2}{x^n/n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2}x = \lim_{n\to+\infty} (\frac{n}{n+1})^2 x = x > 1.$$

3 Séries de Fonctions

On sait que si $f_1, f_2, \cdots f_n$ sont continues alors $\sum_{i=1}^n f_i$ est continue. De la même manière si $f_1, f_2, \cdots f_n$ sont dérivables alors $\sum_{i=1}^n f_i$ est dérivable et

$$(\sum_{i=1}^n f_i)' = \sum_{i=1}^n f_i'.$$

Que se passe-t-il pour une somme infinie ? C'est la question que nous adressons dans ce chapitre.

Rappel : Une fonction f est dite de classe C^p si pour $0 \leq k \leq p$, f est k fois dérivable et la $k^{\text{ième}}$ dérivée, $f^{(k)}$, est continue.

Suites de fonctions

Définition 3.1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *simplement* vers f sur I si pour tout $x \in I$ $f_n(x) \to f(x)$ quand n tend vers $+\infty$.

(ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *uniformément* vers f sur I si $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ quand n tend vers $+\infty$.

La *convergence uniforme* est plus forte que la convergence *simple*.

Exemple 3.2. Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases} \tag{4}$$

Il est clair que

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases} \tag{5}$$

et donc f_n converge simplement vers une fonction qui n'est pas continue. D'autre part,

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} |x^n - 0| = \sup_{x\in[0,1)} |x^n| = 1,$$

et donc $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \nrightarrow 0$ et la convergence de la suite (f_n) vers f n'est pas uniforme.

Exemple 3.3. Soit $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$, où $x \geq 1$. On a pour $x \in [1, \infty[$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+nx} = 0$$

Nous montrons que cette convergence est en effet uniforme :
$\sup_{x\in[1,+\infty[} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[1,+\infty[} |\frac{1}{1+nx}| = \frac{1}{n+1}$

Théorème 3.4. *Soit $(f_n)_{n\geq 1})$ une suite de fonctions continues sur $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur I vers f. Alors*

(i) f est continue sur I.

(ii) Pour $[a, b] \subset I$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Théorème 3.5. *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions dérivables sur $]a, b[$. On suppose*

(i) (f'_n) sont continues sur I.

(ii) (f'_n) converge uniformément sur $]a, b[$ vers g.

(iii) Il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Alors (f_n) converge uniformément sur $]a, b[$ vers f une fonction dérivable et $f' = g$.

Séries de fonctions

Dans cette section on répond à la question que nous avons posée dans l'introduction du chapitre.

Définition 3.6. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I. Le *domaine de convergence* D de la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ est l'ensemble des points $c \in I$ pour lesquels la série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge.

Exemple 3.7. (i) Pour $\sum_{n\leq 0} x^n$ le domaine de convergence est $D = \{x \in \mathbb{R} | |x| < 1\}$.

(ii) $\sum_{n\geq 0} x^n/n!$ le domaine de convergence est $D = \mathbb{R}$.

Définition 3.8. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions réelles définies sur $I \subset \mathbb{R}$

(i) La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge *simplement (resp. uniformément)* vers $S : I \to \mathbb{R}$ si la suite des sommes partielles $S_n(x) = f_0(x) + \cdots + f_n(x)$ converge *simplement (resp. uniformément)* S.

(ii) La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge *normalement* sur I s'il existe une série numérique convergente $\sum_n a_n$ telle que

$$\forall n \quad \forall x \in I, |f(x)| \leq a_n.$$

Le théorème suivant est un simple exercice.

Théorème 3.9. *Si la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement alors elle converge uniformément.*

Démonstration. Pour $x \in I$ fixe on a,

$$|S_n(x) - S_m(x)| = |f_{m+1}(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x)| \leq a_{m+1} + \cdots + a_n.$$

où $S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x)$. Comme $\sum_i a_i$ converge alors $\lim_{n,m \to +\infty} a_{m+1} + \cdots + a_n = 0$, donc par le théorème 2.7 la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge pour tout x, ce qui veut dire $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement. Maintenant on peut définir $S(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x)$. Montrons que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge vers S uniformément.

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in I} |S_n(x) - S(x)| &= \sup_{x\in I} |f_0(x + \cdots +)(x) f_n(x) - S(x)| \\
&= \sup_{x\in I} |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots| \\
&\leq \sup_{x\in I} (|f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots) \leq \sum_{i\geq n+1} a_i = \lim_{m\to+\infty} (a_{n+1} + \cdots + a_m),
\end{aligned} \tag{6}$$

mais par le critère de Cauchy pour les séries (théorème 2.7), $\lim_{n\to+\infty} \lim_{m\to+\infty} (a_{n+1} + \cdots + a_m) = 0$. Alors, $\sup_{x\in I} |S_n(x) - S(x)| \to 0$, i.e. $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément vers S.

□

Exemple 3.10. (i) $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}$ converge normalement, et donc uniformément, sur $\mathbb{R}$ grâce à

$$|\frac{\cos nx}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$$

et la convergence de $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}$.

(ii) Pour $M > 0$ fixe, $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge normalement sur $[-M, M]$ car

$$|\frac{x^n}{n!}| \leq \frac{M^n}{n!},$$

et $\sum_{n\geq 0} \frac{M^n}{n!} = e^M$ converge.

Une conséquence directe du théorème 3.4 est :

Théorème 3.11. *Soit $\sum_{n\geq 1} f_n$ une série de fonctions sur $I \subset \mathbb{R}$. Si chaque f_n est continue sur $I \subset \mathbb{R}$ et si $\sum_{n\geq 1} f_n$converge uniformément sur I vers f. Alors*

(i) f est continue sur I.

(ii) Pour $[a, b] \subset I$,

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{n\geq 1} \int_a^b f_n(t)dt.$$

Exemple 3.12. Par l'exercice 3.10, $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos nx}{n^2}$ converge uniformément alors,

$$\int_0^{2\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\cos nx}{n^2}=\sum_{n\geq 1}\int_0^{2\pi}\frac{\cos nx}{n^2}=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi}\cos nx dx=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}[\frac{\sin nx}{n}]_0^{2\pi}=\sum_{n\geq 1}0=0$$

Le résultat suivant est une conséquence directe du théorème 3.5.

Théorème 3.13. *Soit $\sum_{n\geq 1} f_n$ une série de fonctions dérivables sur $]a,b[$. On suppose*

(i) (f'_n) sont continues sur I.

(ii) $\sum_{n\geq 1} f'_n$ converge uniformément sur $]a,b[$ vers g.

(iii) Il existe $x_0\in]a,b[$ tel que $\sum_{n\geq 1} f_n(x_0)$ converge.
Alors $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $]a,b[$ vers une fonction dérivable f et $f'=\sum_{n\geq 1} f'_n$.

Exemple 3.14. Soit $g_n(x)=\frac{\cos nx}{n^3}$. On a

$$|g_n(x)|=|\frac{\cos nx}{n^3}|\leq 1/n^3$$

et

$$|g'_n(x)|=|\frac{-\sin nx}{n^2}|\leq 1/n^2$$

Alors , $\sum_{n\geq 1} g_n$ et $\sum_{n\geq 1} g'_n$ convergent uniformément, donc $\sum_{n\geq 1} g_n$ est dérivables et

$$(\sum_{n\geq 1}\frac{\cos nx}{n^3})'=(\sum_{n\geq 1} g_n)'=\sum_{n\geq 1} g'_n=\sum_{n\geq 1}\frac{-\sin nx}{n^2}=-\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{n^2}.$$

4 Séries de Fourier

Dans ce chapitre on explique que certaines fonctions périodiques peuvent s'écrire sous la forme d'une séries particulière dite *trigonométrique*. Cette série est appelée *la série de Fourier* de la fonction. Nous posons plusieurs questions sur le comportement de cette série.

Rappel

Dans ce chapitre les coefficients sont parfois dans $\mathbb{C}$. Pour $z=a+ib\in\mathbb{C}$, le *module* de z est

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Par exemple $|e^{i\theta}|=|\cos\theta+i\sin\theta|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$. Remarquons que si $z\in\mathbb{R}$, *i.e.* $b=0$, le module de z correspond à sa valeur absolue.

Par conséquent les résultats sur les convergences de séries dans le chapitre 2 se généralisent aux séries avec des coefficients dans $\mathbb{C}$. Il faut tout simplement remplacer la valeur absolue par le module dans les énoncés.

Séries trigonométriques

Définition 4.1. Une série trigonométrique est une série de la forme

$$\frac{b_0}{2} + (b_1 \cos x + c_1 \sin x) + \cdots + (b_n \cos nx + c_n \sin nx) + \cdots$$

où les coefficients b_i et c_i sont réels.

Remarquons que toute série trigonométrique peut s'écrire sous la forme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx}$. Soient $a_0 = \frac{b_0}{2}$ et pour $n \in \mathbb{N}, n > 0$,

$$a_n = \frac{b_n - ic_n}{2} \quad a_{-n} = \frac{b_n + ic_n}{2}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} e^{inx} = 1/2 b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} e^{-inx} \\
&= 1/2 b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [1/2(b_n - ic_n) e^{inx} + 1/2(b_n + ic_n) e^{-inx}] \\
&= 1/2 b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [1/2(b_n - ic_n)(\cos nx + i \sin nx) + 1/2(b_n + ic_n)(\cos nx - i \sin nx)] \\
&= 1/2 b_0 + (b_1 \cos x + c_1 \sin x) + \cdots + (b_n \cos nx + c_n \sin nx) + \cdots
\end{aligned} \tag{7}$$

Exemple 4.2. La série trigonométrique $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{2^n}$ converge normalement :

$$a_n(x) = |\frac{e^{inx}}{2^n}| = \frac{1}{2^n}.$$

Par conséquent, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{2^n}$ est une fonction continue par le théorème 3.11. $f(x)$ est 2π-périodique car chaque terme $\frac{e^{inx}}{2^n}$ l'est. De plus

$$a_n'(x) = \frac{inxe^{inx}}{2^n},$$

et donc

$$|a_n'(x)| = |\frac{inxe^{inx}}{2^n}| = \frac{n}{2^n}.$$

On note que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ converge car $\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = 1/2 \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n} = 1/2 < 1$ (voir le théorème 2.19, le critère de d'Alembert).

Exemple 4.3. Pour la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n^{3/2}}$, on a

$$|\frac{e^{inx}}{n^{3/2}}| \leq \frac{1}{n^{3/2}},$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge car $3/2 > 1$ (voir section 3.2). Alors $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n^{3/2}}$ converge normalement (et uniformément) et est continue et 2π-périodique. D'autre part

$$|(\frac{e^{inx}}{n^{3/2}})'| = |\frac{ine^{inx}}{n^{3/2}}| = \frac{n}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{1/2}}$$

et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge car $1/2 < 1$, et donc $f(x)$ n'est pas dérivable.

Les deux exemples précédents se généralisent au théorème suivant.

Théorème 4.4. *Soit k un entier tel que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{k-1} a_n$ converge. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ converge sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue et 2π-périodique f. De plus f est $(k-1)$ fois dérivable et pour $l \in \{1, \cdots, k-1\}$, la l-ième dérivée $f^{(l)}$ est donnée par la formule*

$$f^{(l)}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |in|^l a_n e^{inx}.$$

Coefficients de Fourier

Soit $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ une série trigonométrique qui converge uniformément.

Question :

Comment on calcule les coefficients a_n à partir de f ?

Lemme 4.5. *Pour tous les entiers n, p*

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ipx} e^{-inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(p-n)x} dx = \begin{cases} 2\pi & si\ p = n \\ [\frac{1}{i(p-n)} e^{i(p-n)x}]_{-\pi}^{\pi} = 0 & si\ p \neq n \end{cases}$$

Proposition 4.6. *Soit $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ une série qui converge normalement (ou même uniformément) sur $[-\pi, \pi]$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$,*

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \tag{8}$$

Démonstration. La série converge normalement (et uniformément) et alors f est intégrable et on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sum_{p\in\mathbb{Z}} a_p e^{ipt}) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{p\in\mathbb{Z}} a_p \int_{-\pi}^{\pi} e^{ipt} e^{-int} dt$$
$$= \frac{1}{2\pi} a_n \text{ (par le lemme précédent)}$$

$\square$

Notez que l'expression de la formule (8) a un sens si f est intégrable (pas forcément continue) pour cette raison désormais on travaille avec une classe plus importante que la classe des fonctions continues.

Définition 4.7. Une fonction f est dite *continue par morceaux* sur $[-\pi, \pi]$ s'il existe une subdivision

$$\alpha_0 = -\pi < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \alpha_{n+1} = \pi$$

tel que

(1) Pour tout i, f est continue sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$.

(2) Pour tout i, f admet les limites à droite en α_i, et à gauche en α_{i+1}.
En particulier f est intégrable sur $[-\pi, \pi]$ ..

Rappel :

On rappele que la limite à gauche $f(m-) := \lim_{(x<m)\to m} f(x)$, la limite à droite $f(m+) := \lim_{(x>m)\to m} f(x)$ et $f(m)$ peuvent être distincts.

Définition 4.8. On considère une fonction 2π-périodique et continue par morceaux $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Le nombre

$$a_n = \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

est appelé le *n-ème coefficient de Fourier* de f. La *série de Fourier* de f est $S(f, x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$. La suite des sommes partielles de cette série est notée par

$$S_n(f, x) := \sum_{k=-n}^{k=n} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Propriétés :

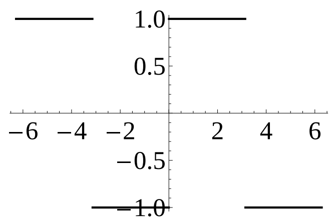
- Si f est paire, alors pour n, $a_n = a_{-n}$ (et $c_n = 0$).
- Si f est paire, alors pour n, $a_n = -a_{-n}$ (et $b_n = 0$).

Remarque 4.9. Comme f est 2π-périodique, avec un changement de variable on voit que

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Exemple 4.10. (Signal carré) Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique f

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ sur }]0, \pi] \\ -1 \text{ sur }]-\pi, 0[\\ \alpha \text{ en } 0 \end{cases}$$



$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}(-\int_{-\pi}^{0} dt + \int_{0}^{\pi} dt) = \frac{1}{2\pi}(-[t]_{-\pi}^{0} + [t]_{0}^{\pi}) = 0.$$

Si $k \neq 0$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t)e^{-ikt}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-ikt}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-ikt}dt = -\frac{1}{2\pi}(\frac{1}{-ik})[e^{-ikt}]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi}(\frac{1}{-ik})[e^{-ikt}]_{0}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi ik}(1 - e^{i\pi k}) - \frac{1}{2\pi ik}(e^{-i\pi k} - 1) = \frac{1}{2\pi ik}(2 - 2(-1)^k) = \begin{cases} 0 & \text{k pair} \\ \frac{2}{\pi ik} & \text{k impair} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Comme $\hat{f}(k) = 0$ pour k pair, alors

$$\begin{aligned}
S_{2n+1}(f,x) = S_{2n+1}(f,x) &= \sum_{-(2n+1)}^{-2n+1} \hat{f}(k)e^{ikx} = \sum_{-(2n+1)}^{-2n+1} \hat{f}(k)e^{ikx} = \sum_{-n-1}^{n} \hat{f}(2l+1)e^{i(2l+1)x} \\
&= \sum_{l=0}^{n} \frac{2}{i\pi(2l+1)}(e^{i(2l+1)x} - e^{-i(2l+1)x}) \\
&= \sum_{l=0}^{n} \frac{2}{i\pi(2l+1)}(2i\sin(2l+1)x) = \frac{4}{\pi}\sum_{l=0}^{n} \frac{\sin(2l+1)x}{2l+1}.
\end{aligned}$$

La série $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sin(2l+1)x}{2l+1}$ converge uniformément.

Exemple 4.11. $f(x) = \sin 3x = \frac{1}{2!}e^{3ix} - \frac{1}{2!}e^{-3ix} = S(f,x)$.

Exemple 4.12. Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique f donnée par

$$f(x) = x, \quad x \in]-\pi, \pi[.$$

Pour $k \neq 0$,

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} te^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}([\frac{te^{-ikt}}{-ik}]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ikt}}{-ik}dt)\\ &= \frac{1}{-2\pi ik}(\pi(-1)^k - (-\pi)(-1)^k) = \frac{2\pi(-1)^k}{-2\pi ik} = \frac{i(-1)^k}{k}\end{aligned}$$

et

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt = \frac{1}{2\pi}[\frac{1}{2}t^2]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

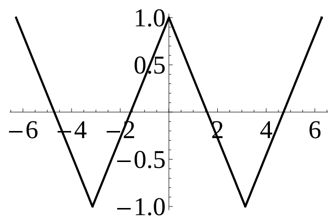
Alors

$$S(f,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{i(-1)^k e^{ikx}}{k} = i\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k e^{ikx}}{k}.$$

$S(f,x)$ converge sur $]-\pi,\pi[$ et $S(f,x) = f(x) = x$. Par contre en $x = 0$, $S(f,0)$ diverge!

Exemple 4.13. (Signal triangulaire) Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique f

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(-t+\frac{\pi}{2}) \text{ sur }]0,\pi] \\ \frac{2}{\pi}(t+\frac{\pi}{2}) \text{ sur }]-\pi,0[\end{cases}$$



$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t)e^{-ikt}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{2}{\pi}(t+\frac{\pi}{2})e^{-ikt}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{2}{\pi}(-t+\frac{\pi}{2})e^{-ikt}dt\\ &= \frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}dt + \frac{2}{\pi}(\int_{-\pi}^{0} te^{-ikt}dt - \int_{0}^{\pi} te^{-ikt}dt))\end{aligned}$$

Si $k = 0$, alors

$$\hat{f}(0) = 1 + \frac{1}{\pi^2}(\int_{-\pi}^{0} tdt - \int_{0}^{\pi} tdt) = 1 + \frac{1}{\pi^2}(-\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}) = 0$$

Si $k \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}(0 + \frac{2}{\pi}(\int_{-\pi}^{0} te^{-ikt}dt - \int_{0}^{\pi} te^{-ikt}dt)) \\
&= \frac{1}{\pi^2}([\frac{te^{-ikt}}{-ik}]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0} \frac{e^{-ikt}}{-ik}dt - [\frac{te^{-ikt}}{-ik}]_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi} \frac{e^{-ikt}}{-ik}dt) \\
&= \frac{1}{\pi^2}(-(\frac{-\pi(-1)^k}{-ik}) - [\frac{e^{-ikt}}{(-ik)^2}]_{-\pi}^{0} - (\frac{\pi(-1)^k}{-ik}) + [\frac{e^{-ikt}}{(-ik)^2}]_{0}^{\pi}) \\
&= \frac{1}{\pi^2}(-\frac{\pi(-1)^k}{ik} - [\frac{e^{-ikt}}{(-ik)^2}]_{-\pi}^{0} + \frac{\pi(-1)^k}{ik} + [\frac{e^{-ikt}}{(-ik)^2}]_{0}^{\pi}) \\
&= \frac{1}{\pi^2}(-[\frac{e^{-ikt}}{(-ik)^2}]_{-\pi}^{0} + [\frac{e^{-ikt}}{(-ik)^2}]_{0}^{\pi}) \\
&= \frac{1}{k^2\pi^2}(1 - (-1)^k - (-1)^k + 1) = \frac{1}{k^2\pi^2}(1 - (-1)^k - (-1)^k + 1) = \frac{1}{k^2\pi^2}(2 - 2(-1)^k) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{k pair} \\ \frac{4}{\pi^2 k^2} & \text{k impair} \end{cases}
\end{aligned}$$

Comme $\hat{f}(k) = 0$ pour k pair, alors

$$\begin{aligned}
S_{2n}(f,x) = S_{2n+1}(f,x) &= \sum_{-(2n+1)}^{2n+1} \hat{f}(k)e^{ikx} = \sum_{-(2n+1)}^{2n+1} \hat{f}(k)e^{ikx} = \sum_{l=-n-1}^{n} \hat{f}(2l+1)e^{i(2l+1)x} \\
&= \sum_{l=0}^{n} \frac{4}{\pi(2l+1)^2}(e^{i(2l+1)x} + e^{-i(2l+1)x}) = \sum_{l=0}^{n} \frac{4}{\pi(2l+1)^2}(2\cos(2l+1)x) \\
&= \frac{8}{\pi}\sum_{l=0}^{n} \frac{\cos(2l+1)x}{(2l+1)^2}.
\end{aligned}$$

Pour $l > 0$, $|\frac{\cos(2l+1)x}{(2l+1)^2}| \leq \frac{1}{(2l+1)^2} \leq \frac{1}{4l^2}$ et $\sum_{l>1} \frac{1}{4l^2}$ converge, alors $S(f,x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\cos(2l+1)x}{(2l+1)^2}$ converge normalement et uniformément.

Convergence de séries de Fourier

Dans ce qui suit on répondra aux questions suivantes.

Questions :

Soit f est une fonction 2π-périodique et continue par morceaux

(1) Est-ce que la série de Fourier de f converge ?

(2) Si la série converge vers $S(x)$, il y a-t-il un lien entre $S(x)$ et $f(x)$?

(3) Quel est le lien entre la dérivabilité de f et la taille des coefficients de la série de Fourier de f ?

Proposition 4.14. *Soit f une fonction de classe C^p* i.e. *f est p fois dérivable et les dérivées $f^{(}l)$, $0 < l \leq p$, sont continues. Alors $\hat{f}(k) = O(\frac{1}{k^p})$ quand $k \to \pm\infty$.*

Rappel

$\hat{f}(k) = O(\frac{1}{k^p})$ veut dire $|\hat{f}(k)| \leq C\frac{1}{k^p}$ pour une constante C et k assez grand.

Démonstration. L'intégrale par parties nous fournit :

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}([\frac{f(t)e^{-ikt}}{-ik}]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{f'(t)e^{-ik}}{-ik}dt) \\
&= \frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f'(t)e^{-ik}}{-ik}dt) = \frac{1}{-2ik\pi}(\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-ik}dt) \\
&= \frac{1}{(-ik)}(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-ik}dt) = \frac{1}{(-ik)}\hat{f'}(k).
\end{aligned}$$

En repétant le même argument on obtient

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(-ik)^p}\widehat{f^{(p)}}(k)$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{(-ik)^p}\widehat{f^{(p)}}(k)| &\leq \frac{1}{k^p}|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(p)}(t)e^{-ikt}dt| \leq \frac{1}{k^p}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f^{(p)}(t)e^{-ikt}|dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi k^p}\int_{-\pi}^{\pi}|f^{(p)}(t)|dt \leq \frac{1}{2\pi k^p}2\pi\sup_{t\in[-\pi,\pi]}|f^{(p)}(t)| = \frac{\sup_{t\in[-\pi,\pi]}|f^{(p)}(t)|}{k^p}
\end{aligned}$$

Et donc $\hat{f}(k) \leq C\frac{1}{(-ik)^p}$, où $C = \sup_{t\in[-\pi,\pi]}|f^{(p)}(t)|$

□

Définition 4.15. Soit f une fonction continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. f est dite de *classe C^p par morceaux* s'il existe une subdivision

$$-\pi = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \cdots \leq \alpha_n \leq \alpha_{n+1} = \pi$$

tel que :

(1) f est k fois dérivable sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$,
(2) la dérivée de l'ordre l, $0 \leq l \leq k$, est continue sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ et a une limite à droite en α_i et à gauche en α_{i+1}.

Un corollaire immédiat du résultat précédent est

Corollaire 4.16. *(Dirichlet simplifié) Si f est 2π-périodique et C^2, alors sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Par la proposition précédente $|\hat{f}(k)e^{ikx}| = |\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{k^2}$ et $\sum_{k\neq 0} \frac{1}{k^2}$ est convergente, $S(f,x) = \sum_k \hat{f}(k)e^{ikx}$ converge donc normalement. $\square$

Théorème 4.17. *(Dirichlet) Soit f une fonction de classe C^1 par morceaux, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f,t) \to f(t)$$

en tout point de $\mathbb{R}$ où f est continue.

Même si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente elle peut converger en moyenne *i.e.* la série $\tilde{a}_n := \frac{a_1+a_2\cdots a_n}{n}$ peut être convergente. Un exemple typique de cette situation est $a_n = (-1)^n$ pour la quelle on a $\tilde{a}_{2n} = \frac{1}{2n+1}$ et $\tilde{a}_{2n+1} = 0$, on voit clairement que $\tilde{a}_n \to 0$. Celle-ci est l'idée principale du théorème suivant.

Soit

$$\sigma_n(f,t) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} S_j(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{n+1-|k|}{n+1}\hat{f}(k)e^{ikt}.$$

Théorème 4.18. *(Théorème de Féjer) On suppose que f est 2π-périodique et continue par morceaux alors $\sigma_n(f,t)$converge $f(t)$ en tout point où f est continue. De plus, si f est continue sur $[a,b]$, alors la convergence est uniforme.*

Conséquences

Une conséquence très importante pour les applications de séries de Fourier est l'unicité de la série.

Corollaire 4.19. *(Unicité de coefficients de Fourier)*

Si f et g sont 2π-périodiques et continues et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$, alors $f = g$.

Démonstration. Si pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$, alors pour tout n, $\sigma_n(f,t) = \sigma_n(g,t)$. Par l'unicité de limite, $g(t) = f(t)$ pour tout t. $\square$

Corollaire 4.20. *Soit f 2π-périodiques et continue et $\varepsilon > 0$. Alors il existe un polynôme trigonométrique tel que*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |P(t) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

Rappel :

Un polynôme trigonométrique est de la forme $\sum_{k=-n}^{k=n} a_k e^{ikt}$.

Égalité de Parseval-Bessel

Soit $f_k(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$. Pour n fixe on considère E_n l'espace vectoriel engendré par k, $-n \leq k \leq n$, *i.e.*

$$E_n = Vect\{f_k : -n \leq k \leq n\},$$

et $\dim E_n = 2n+1$. E_n est munit du produit hermitien

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Par le lemme 4.5 on a

$$\langle f_k, f_l\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}})(\overline{\frac{e^{ilt}}{\sqrt{2\pi}}})dt. = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{-ilt}dt = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq l \\ 1 \text{ si } k = l \end{cases} \tag{9}$$

On conclut que $\{f_k, -n \leq k \leq n\}$ est une base orthonormée. On a aussi pour $f = \sum_k m_k f_k$,

$$\begin{aligned} |f|^2 = \langle f, f\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{f(t)}dt &= \int_{-\pi}^{\pi} (\sum_k m_k f_k(t))(\overline{\sum_k m_k f_k(t)})dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\sum_k m_k f_k(t))(\sum_k \overline{m_k}\overline{f_k(t)})dt \\ &= \sum_k |m_k|^2. \end{aligned}$$

On observe également que pour tout k,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt = \frac{m_k}{\sqrt{2\pi}},$$

et l'identité précédente s'écrit

$$\frac{1}{2\pi}|f|^2 = \frac{1}{2\pi}\sum_k |m_k|^2 = \sum_k |\hat{f}(k)|^2.$$

Ce calcul se généralise à l'espace de fonctions C^1 par morceaux.

Théorème 4.21. *(Égalité Parseval-Bessel) Soit f une fonction C^1 par morceaux et 2π-périodique. Alors*

$$\frac{1}{2\pi}|f|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2$$

Démonstration. On remarque pour $-N \leq p \leq N$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - S_N(f,t)]e^{-ipt}dt &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - \sum_{-N}^{N} \hat{f}(k)e^{ikt}]e^{-ipt}dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ipt}dt - \sum_{k=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(k)e^{ikt}e^{-ipt}dt \\
&= \hat{f}(p) - \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{-ipt}dt = 2\pi\hat{f}(p) - 2\pi\hat{f}(p) = 0 \\
&\text{(par le lemme 4.5)}
\end{aligned} \tag{10}$$

et donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - S_N(f,t)|^2 dt + \int_{-\pi}^{\pi} |S_N(f,t)|^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - S_N(f,t))(\overline{f(t) - S_N(f,t)})dt$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} S_N(f,t)\overline{S_N(f,t)}dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - S_N(f,t))\overline{S_N(f,t)}dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{f(t)}dt + \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - S_N(f,t))(\overline{f(t) - S_N(f,t)})dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - S_N(f,t))\overline{S_N(f,t)}dt + \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt + \overline{\int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - S_N(f,t))\overline{S_N(f,t)}dt} +$$

$$= \sum_{p=-N}^{n} \hat{f}(p) \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - S_N(f,t))e^{-ipt}dt + \overline{\sum_{p=-N}^{n} \hat{f}(p) \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - S_N(f,t))e^{-ipt}dt} + \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \text{ (par le calcul précédent).}$$

D'autre part $S_N(f,t)$ converge uniformément vers f, alors $\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - S_N(f,t)|^2 dt \to 0$ quand $N \to +\infty$. On conclut donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \lim_{N \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |S_N(f,t)|^2 dt,$$

mais un simple calcul montre que $\int_{-\pi}^{\pi} |S_N(f,t)|^2 dt = 2\pi \sum_{k=-N}^{N} |\hat{f}(k)|^2$, et on en déduit l'énoncé. □

On termine ce chapitre avec un exemple.

Exemple 4.22. On considère f de l'exercice 4.10. Nous savons que

$$\hat{f}(k) = \begin{cases} 0 & \text{k pair} \\ \frac{2}{\pi i k} & \text{k impair} \end{cases}$$

Alors
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(k)|^2=\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\frac{2}{\pi i(2l+1)}|^2$$
et
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1dt=1.$$
On obtient l'identité
$$\sum_{l\in\mathbb{Z}}\frac{4}{\pi^2(2l+1)^2}=1$$
$$\sum_{l\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2l+1)^2}=\frac{\pi^2}{4}$$
ou
$$\sum_{l\geq 0}\frac{1}{(2l+1)^2}=1/2\sum_{l\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(2l+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

De la même manière, en appliquant l'égalité Parseval-Bessel à l'exercice 4.12 on trouve
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

5 Transformée de Fourier

Définitions, exemples et propriétés fondamentaux

Dans ce chapitre on définit la transformation de Fourier et on donne des applications. On travaille avec l'espace de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ *i.e.*

$$L^1=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\text{ continue par morceaux t.q.}\|f\|_{L^1}:=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}|f(x)|dx\in\mathbb{R}\text{ existe}\}$$

Pour $f\in L^1$, on définit la *transformée de Fourier* de f par la formule
$$\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix\xi}dx.$$

Proposition 5.1. *Si $f\in L^1$, alors $\hat{f}$ est bien définie et*
$$\|\hat{f}\|_\infty:=\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|\hat{f}(\xi)|\leq\|f\|_{L^1}$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi)| = |\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx| \leq |\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}|dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-ix\xi}|dx \\
\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \cdot |e^{-ix\xi}|dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = \|f\|_{L^1}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

□

Exemple 5.2. (Fonction gaussienne) Soit $f(x) = e^{-x^2/2}$.

D'abord on montre que $f \in L^1$ et pour ceci on montre que $\|f\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}$. Comme conséquence, on obtient $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}$.

Soit $C = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}$, on a

$$
\begin{aligned}
C^2 &= (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2})^2 dx = (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx)(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx) \\
&= (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2})(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}dy) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2/2}e^{-y^2/2}dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2/2}drd\theta = 2\pi \int_0^{\infty} re^{-r^2/2}dr = 2\pi[-e^{-r^2/2}]_0^{\infty} = 2\pi
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Alors $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} = C = \sqrt{2\pi}$.

Si on dérive $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}e^{-ix\xi}dx$ par rapport à ξ on obtient,

$$
\begin{aligned}
\hat{f}'(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}(-ix)e^{-ix\xi}dx = i\int_{-\infty}^{\infty} -xe^{-x^2/2}e^{-ix\xi}dx = i\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} -xe^{-x^2/2}e^{-ix\xi}dx \\
&= i\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{d}{dx}(e^{-x^2/2})e^{-ix\xi}dx = i\lim_{R\to\infty}([e^{-x^2/2}e^{-i\xi x}]_{-R}^{R} + i\xi\int_{-R}^{R} e^{-x^2/2}e^{-i\xi x}dx) \\
&= i\lim_{R\to\infty} i\xi\int_{-R}^{R} e^{-x^2/2}e^{-i\xi x}dx = -\xi\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{-x^2/2}e^{-i\xi x}dx \\
&= -\xi\hat{f}(\xi).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

On conclut que $\hat{f}$ est une solution de l'équation différentielle

$$
\begin{cases}
x'(\xi) = -\xi x(\xi) \\
x(0) = \sqrt{2\pi}
\end{cases}
\tag{14}
$$

dont l'unique solution est $x(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\xi^2/2}$, et donc

$$
\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\xi^2/2} = \sqrt{2\pi}f(\xi).
$$

Exemple 5.3. Soit $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Alors

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{|x|}e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{2}(\int_{-\infty}^{0} e^{x}e^{-ix\xi}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{-ix\xi}dx) \\
&= \frac{1}{2}(\int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{ix\xi}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{-ix\xi}dx) \\
&= \frac{1}{2}(\int_{0}^{+\infty} e^{-x}(e^{-ix\xi} + e^{ix\xi})dx = \frac{1}{2}(\int_{0}^{+\infty} e^{-x}(2Re(e^{-ix\xi}))dx \\
&= Re\int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{-ix\xi}dx = Re[\frac{e^{-x(1+i\xi)}}{-(1+i\xi)}]_{0}^{+\infty} = Re\frac{1}{1+i\xi} = \frac{1}{1+\xi^2}
\end{aligned} \tag{15}$$

Théorème 5.4. *(1) Si $f, g \in L^1$ et $a, b \in \mathbb{R}$ alors, $\widehat{af+bg} = a\hat{f} + b\hat{g}$.*

(2) Si f et sa dérivée $f' \in L^1$ et $\lim_{R\to\pm\infty} f(R) = 0$ alors

$$\widehat{f'}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi).$$

(3) Si f et $x \mapsto xf(x) \in L^1$, alors

$$(\hat{f})'(\xi) = -\widehat{(xf)}(\xi).$$

Démonstration. (1) est facile. La preuve de (2) est similaire à celle de la proposition 4.14,

$$\begin{aligned}
\widehat{f'}(\xi) = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f'(x)e^{-ix\xi}dx &= \lim_{R\to+\infty}([f(x)e^{-ix\xi}]_{-R}^{R} - \int_{-R}^{R} f(x)(-i\xi e^{-ix\xi})dx) \\
&= \lim_{R\to+\infty}([f(x)e^{-ix\xi}]_{-R}^{R} + i\xi\int_{-R}^{R} f(x)e^{-ix\xi}dx).
\end{aligned} \tag{16}$$

$\widehat{f'}(\xi) = i\xi f(\xi)$ puisque $\lim_{R\to\pm\infty} f(x) = 0$. Pour (2)

$$\begin{aligned}
(\hat{f})'(\xi) = \frac{d}{d\xi}[\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx] &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\xi}[f(x)e^{-ix\xi}]dx = \int_{\mathbb{R}} -ixf(x)e^{-ix\xi}dx \\
&= -i\int_{\mathbb{R}}(xf(x))e^{-ix\xi} = -i\widehat{(xf)}(\xi)
\end{aligned} \tag{17}$$

□

Injectivité et inversion

Théorème 5.5. *Si f et $g \in L^1$, et $\hat{f} = \hat{g}$ alors $f = g$ où f et g sont continues.*

Théorème 5.6. *Si $f \in L^1$ et $\hat{f} \in L^1$ alors*

$$\hat{\hat{f}}(-x) = 2\pi f(x).$$

Application

Soit $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, alors $\hat{f}(\xi) = e^{-|\xi|}$ puisque

$$\widehat{e^{-|x|}}(\xi) = \frac{2}{1+x^2} \text{ (voir l'exemple 5.3)}$$

Convolution

La *convolution* $f * g$ des fonctions $f, g \in L^1$ est une fonction définie par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

Par un changement de variables on trouve que

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy = (g * f)(x)$$

Théorème 5.7. *Si $f, g \in L^2$, alors*

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\widehat{(f * g)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy\Big)e^{-ix\xi}dx = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)e^{-i(x-y)\xi}dx\Big)g(y)e^{-iy\xi}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\xi}dt\Big)g(y)e^{-iy\xi}dy = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)g(y)e^{-iy\xi}dy = \hat{f}(\xi)\int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-iy\xi}dy \\ &= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)\end{aligned} \tag{18}$$

□

Applications

Exemple 5.8. Résoudre l'équation différentielle

$$-u'' + u = f$$

où $f \in L^1$.

En appliquant la transformée de Fourier des deux côtés, on obtient,

$$(\widehat{-u'' + u}) = \hat{f}.$$

Par le théorème 5.4,

$$\xi^2 \hat{u}(\xi) + \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi).$$

Nous avons donc

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{1+\xi^2} = \hat{f}(\xi) \times \frac{1}{1+\xi^2} = \hat{f}(\xi) \times \frac{\widehat{e^{-|x|}}}{2} = f * \frac{\widehat{e^{-|x|}}}{2} \tag{19}$$

et donc

$$u(x) = 1/2 \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|} f(y) dy.$$

Exemple 5.9. (Circuit RLC) On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} Lf'' + Rf' + Cf = e'(t) \\ f(t) = 0 \quad \forall t < 0 \end{cases} \tag{20}$$

pour R, L et C (resp. résistance, intensité, capacité) dans $\mathbb{R}$. Ici $e(t)$ désigne la tension et $e(t) = 0$ pour $t < 0$. On cherche tel que, f, f'et f'' sont dans L^1.

Nous avons $f(t) = f'(t) = f''(t) = 0$ pour $t < 0$, et donc

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(\xi) &= \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-i\xi t} dt \\ &= [f(t)e^{-i\xi t}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)(-i\xi) e^{-i\xi t} dt = -f(0) + i\xi \int_0^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt = -f(0) + i\xi \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

et de façon similaire

$$\widehat{f''}(\xi) = -f'(0) + i\xi \hat{f}'(\xi) = -f'(0) + i\xi(-f(0) + i\xi \hat{f}(\xi)) = -f'(0) - i\xi f(0) - \xi^2 \hat{f}(\xi)$$

$$\begin{aligned} \widehat{e'}(\xi) &= (Lf'' \widehat{+ Rf'} + Cf)(\xi) = L\widehat{f''}(\xi) + R\widehat{f'}(\xi) + C\widehat{f}(\xi) \\ &= L(-f'(0) - i\xi f(0) - \xi^2 \hat{f}(\xi)) + R(-f(0) + i\xi \hat{f}(\xi)) + C\widehat{f}(\xi) \\ &= (-L\xi^2 + iR\xi + C)\hat{f}(\xi) + (-iL\xi - R)f(0) - Lf'(0). \end{aligned}$$

On obtient,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{-L\xi^2 + iR\xi + C}(\widehat{e'}(\xi) + (iL\xi + R)f(0) + Lf'(0)).$$

Par exemple si $f(0) = f'(0) = 0$ et $L = 1$ et $R = C = 2$,

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) =& \frac{1}{-\xi^2+2i\xi+2}\widehat{e'}(\xi) = \widehat{e'}(\xi) \times \frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{1+i+i\xi} + \frac{1}{1-i+i\xi}\right)\\
&= \widehat{e'}(\xi) \times \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}(-e^{-(1+i+i\xi)t} + e^{-(1-i+i\xi)t})dt\\
&= \widehat{e'}(\xi) \times \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} e^{-t}(e^{it} - e^{-it})e^{-i\xi t}dt\\
&= \widehat{e'}(\xi) \times \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} e^{-t}(2i\sin t)e^{-i\xi t}dt\\
&= \widehat{e'}(\xi)\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t e^{-i\xi t}dt = \widehat{e'}(\xi)\widehat{g}(\xi),\end{aligned}$$

où $g(t) = \begin{cases} e^{-t}\sin t, \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \qquad \text{sinon}\end{cases}$.

Alors $\hat{f} = \widehat{e'}\widehat{g} = \widehat{e' * g}$ d'où on trouve

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-s)e'(s)ds = \int_0^t e^{-(t-s)}\sin(t-s)e'(s)ds.$$