

# Les champs aléatoires à longue mémoire

Frédéric Lavancier

Université Lille 1  
LS-CREST Paris

12 décembre 2005

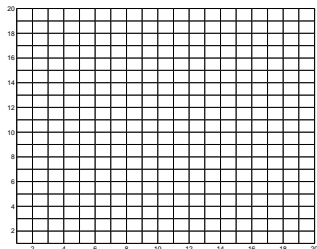
## 1 Introduction

- Les champs aléatoires à longue mémoire
- Motivations
- Travaux préexistants : la longue mémoire isotrope
- Ma thèse

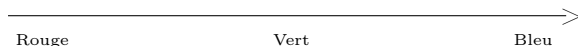
# Les champs aléatoires stationnaires sur le réseau $\mathbb{Z}^d$

Champ aléatoire **discret** : processus prenant des valeurs aléatoires sur le réseau  $\mathbb{Z}^d$

En dimension 2 : réseau=grille

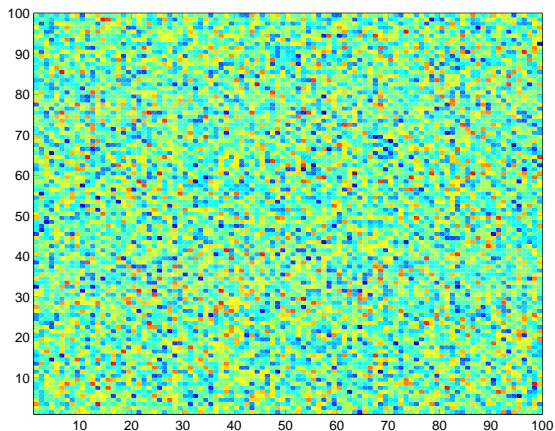


La valeur en un point du réseau est modélisée par une couleur :

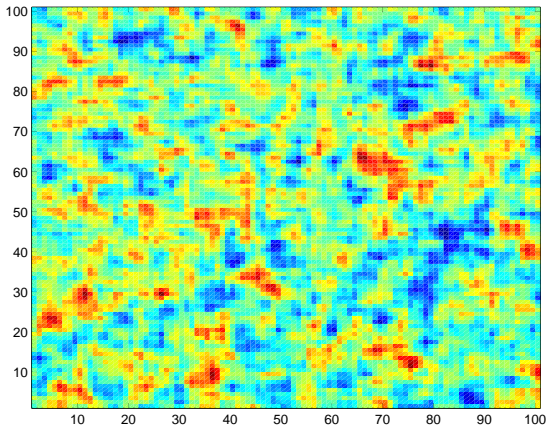


Champ aléatoire **stationnaire** : la loi générant les couleurs est invariante par translation.

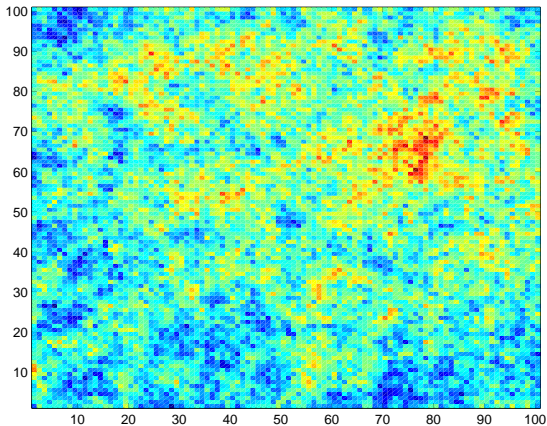
# Un champ aléatoire stationnaire sur $\mathbb{Z}^2$ : le bruit blanc



Un champ aléatoire  $\left\{ \begin{array}{l} \text{faiblement dépendant} \\ \text{à courte mémoire} \end{array} \right.$



Un champ aléatoire  $\left\{ \begin{array}{l} \text{fortement dépendant} \\ \text{à longue mémoire} \end{array} \right.$



# Quantification de la dépendance du champ $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$

# Quantification de la dépendance du champ $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$

La dépendance d'un champ aléatoire stationnaire  $X$  entre deux points distants de  $h \in \mathbb{Z}^d$  est quantifiée par **la fonction de covariance**

$$r(h) = \text{cov}(X_k, X_{k+h}) = \text{cov}(X_0, X_h).$$

Autre outil d'étude de la dépendance : **la densité spectrale**  $f$  définie sur  $[-\pi, \pi]^d$  par

$$r(h) = \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle \lambda, h \rangle} f(\lambda) d\lambda.$$

## Remarque

Les deux approches sont très liées mais pas équivalentes



# La longue mémoire

## Définition

Un champ aléatoire  $X$  est à longue mémoire si sa fonction de covariance est non sommable, i.e.

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}^d} |r(h)| = \infty.$$

## Proposition

Si la densité spectrale  $f$  de  $X$  est non-bornée alors  $X$  est à longue mémoire.

## Exemple

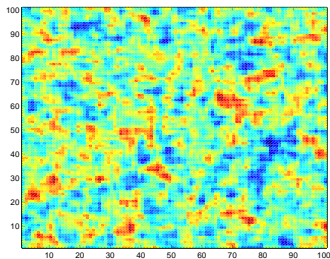
En dimension  $d = 2$ ,

$$f(x, y) = |x|^\alpha |y|^\beta, \quad -1 < \alpha < 0, \quad -1 < \beta < 0;$$

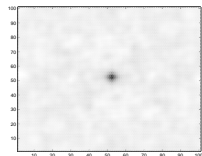
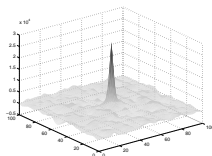
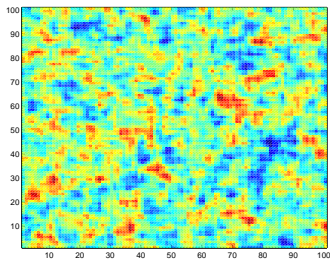
$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha, \quad -1 < \alpha < 0;$$

$$f(x, y) = |x - y|^\alpha, \quad -1 < \alpha < 0.$$

# Exemple : champ à courte mémoire

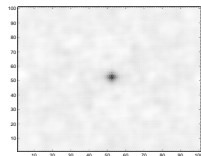
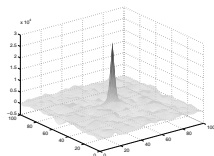
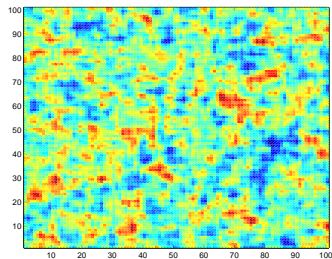


# Exemple : champ à courte mémoire

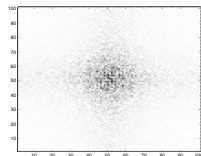
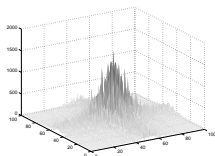


Sa fonction de covariance.

# Exemple : champ à courte mémoire

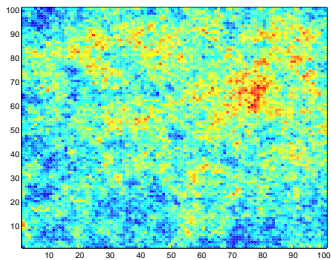


Sa fonction de covariance.

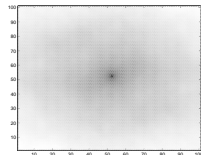
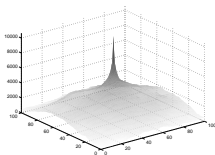
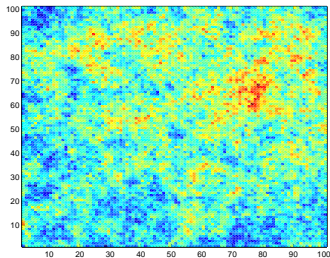


Son périodogramme.

# Exemple : champ à longue mémoire isotrope

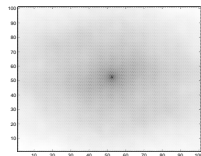
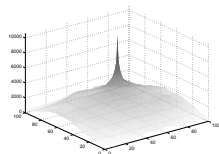
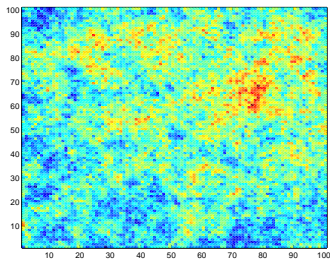


# Exemple : champ à longue mémoire isotrope

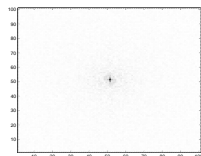
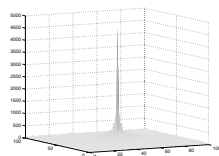


Sa fonction de covariance.

# Exemple : champ à longue mémoire isotrope

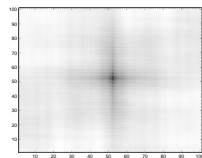
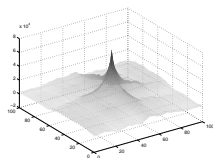
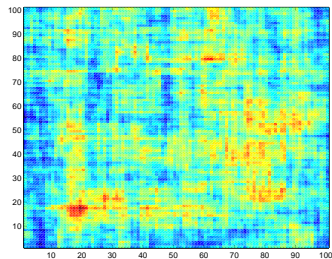


Sa fonction de covariance.

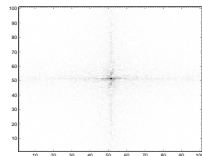
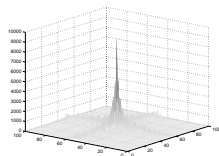


Son périodogramme.

# Exemple : champ à longue mémoire de type produit



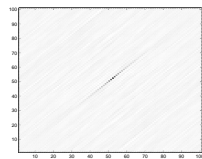
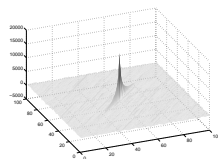
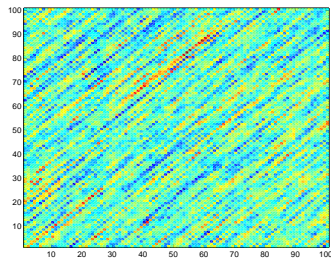
Sa fonction de covariance.



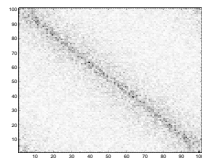
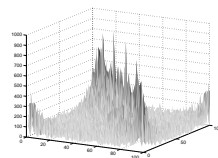
Son périodogramme.



# Exemple : champ à longue mémoire non isotrope



Sa fonction de covariance.



Son périodogramme.

# Motivations

- Existe-t-il des modèles mathématiques “naturels” conduisant à des champs à longue mémoire ?
- Etant donné une réalisation d’un champ à longue mémoire,
  - peut-on tester la propriété de forte dépendance ?
  - peut-on estimer la longue mémoire (direction, intensité,...) ?
- Peut-on utiliser les méthodes statistiques usuelles (en régression, en prévision,...) ?
- Comment se comportent les outils théoriques de base de la statistique asymptotique (sommes partielles, processus empirique,...) ?

# Travaux préexistants

- En analyse d'images :
  - Quelques modèles de textures d'images (Kashyap et Lapsa, 1984, Bennett et Khotanzad, 1998 et Eom, 2001 ).
- En statistique asymptotique, sous l'hypothèse de **longue mémoire isotrope** :
  - Etude des sommes partielles (Dobrushin et Major, 1979 et Surgailis, 1982 ).
  - Etude du processus empirique (Doukhan, Lang et Surgailis, 2002 ).
  - Etude des formes quadratiques (Heyde et Gay, 1993 et Doukhan, Leon et Soulier, 1996 ).
  - Etude des temps locaux (Doukhan et Leon, 1996 ).

# Travaux préexistants : la longue mémoire isotrope

## Définition

*Un champ aléatoire stationnaire est à longue mémoire isotrope si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée*

- *sa fonction de covariance vérifie*

$$r(n) = \|n\|^{-\alpha} b \left( \frac{n}{\|n\|} \right) L(\|n\|), \quad 0 < \alpha < d.$$

- *sa densité spectrale est continue partout sauf en l'origine où elle vérifie :*

$$f(x) \underset{0}{\sim} \|x\|^{\alpha-d} b \left( \frac{x}{\|x\|} \right) L \left( \frac{1}{\|x\|} \right), \quad 0 < \alpha < d.$$

*où  $L$  est une fonction à variation lente à l'infini et  $b$  est une fonction continue sur la sphère unité de  $\mathbb{R}^d$ .*

# Travaux préexistants en longue mémoire isotrope

Soit  $X_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} a_j \xi_{k-j}$  où  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  est un bruit blanc fort et où

$$a_j = |j|^{-\beta} L(|j|) b \left( \frac{j}{|j|} \right), \quad \frac{d}{2} < \beta < d.$$

**Théorème** (Dobrushin and Major (1979), Surgailis (1982), Avram et Taquq (1987) )

$$\frac{1}{n^{d-m(\beta-\frac{d}{2})} L(n)^m} \sum_{k_1=1}^{[nt_1]} \dots \sum_{k_d=1}^{[nt_d]} P_m(X_{k_1, \dots, k_d}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{fidi} Z_m(t),$$

où  $P_m$  est le polynôme d'Appell de degré  $m$  et  $Z_m$  le processus de Hermite d'ordre  $m$ .

# Travaux préexistants en longue mémoire isotrope

Soit  $X_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} a_j \xi_{k-j}$  où  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  est un bruit blanc fort et où

$$a_j = |j|^{-\beta} L(|j|) b \left( \frac{j}{|j|} \right), \quad \frac{d}{2} < \beta < d.$$

**Théorème** (Dobrushin and Major (1979), Surgailis (1982), Avram et Taquq (1987) )

$$\frac{1}{n^{d-m(\beta-\frac{d}{2})} L(n)^m} \sum_{k_1=1}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=1}^{[nt_d]} P_m(X_{k_1, \dots, k_d}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{fidi} Z_m(t),$$

où  $P_m$  est le polynôme d'Appell de degré  $m$  et  $Z_m$  le processus de Hermite d'ordre  $m$ .

**Théorème** (Doukhan, Lang et Surgailis (2002) )

$$\frac{1}{n^{3d/2-2\alpha}} \sum_{k_1=1}^n \cdots \sum_{k_d=1}^n [\mathbb{1}_{\{X_k \leq x\}} - F(x)] \xrightarrow{\mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}})} cF'(x)Z,$$

où  $F$  est la fonction de répartition de  $X$  et  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

# Ma thèse

- 1 Introduction
- 2 Modélisation
- 3 Etude asymptotique des sommes partielles
- 4 Tester la longue mémoire
- 5 Asymptotique du Processus Empirique
- 6 Perspectives

# Modélisation de champs à longue mémoire

- **Modélisation par filtrage**

- Dès que le filtre est non borné, le champ filtré est à longue mémoire
- Un champ ARMA peut être à longue mémoire

- **Modélisation par agrégation**

- **Modélisation en mécanique statistique**

- Le modèle d'Ising conduit à un champ à longue mémoire isotrope en la température critique
- Dans les systèmes homogènes gaussiens :

Transition de phase  $\iff$  Longue mémoire



### 3 Etude asymptotique des sommes partielles

- Approche spectrale
- Application aux sommes partielles
- Critère d'équitension

**Théorème** (Dobrushin and Major (1979), Surgailis (1982), Avram et Taqqu (1987) )

Soit  $X_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} a_j \xi_{k-j}$  où  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  est un bruit blanc fort et où  $a_j = |j|^{-\beta} L(|j|) b\left(\frac{j}{|j|}\right)$ ,  $\frac{d}{2} < \beta < d$ .

$$\frac{1}{n^{d-m(\beta-\frac{d}{2})} L(n)^m} \sum_{k_1=1}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=1}^{[nt_d]} P_m(X_{k_1, \dots, k_d}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{fidi} Z_m(t),$$

où  $P_m$  est le polynôme d'Appell de degré  $m$  et  $Z_m$  le processus de Hermite d'ordre  $m$ .

# Approche spectrale pour des champs linéaires

Soit

$$X_{k_1, \dots, k_d} = \sum_{j_1, \dots, j_d} \hat{a}_{j_1, \dots, j_d} \xi_{k_1 - j_1, \dots, k_d - j_d},$$

où  $\hat{a}$  est la transformée de Fourier d'un filtre  $a$  et où  $\xi$  est un bruit blanc de représentation spectrale :

$$\xi_k = \int e^{i\langle k, x \rangle} dW(x).$$

Les sommes partielles de  $X$ ,

$$S_n^X(t_1, \dots, t_d) = n^{-d/2} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]-1} \dots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]-1} X_{k_1, \dots, k_d},$$

peuvent se réécrire

$$S_n^X(t) = \int_{[-n\pi, n\pi]^d} a\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{j=1}^d \frac{e^{ix_j[nt_j]/n} - 1}{n(e^{ix_j/n} - 1)} dW_n(x),$$

où  $W_n(A) = n^{d/2} W(n^{-1}A)$ .

**H 1.** Soit  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  un champ aléatoire stationnaire centré. On suppose qu'il admet une densité spectrale bornée par  $M > 0$  et que

$$S_n^\xi(t) = n^{-d/2} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} \xi_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{fidi} B(t_1, \dots, t_d).$$

**Théorème** (Lang et Soulier (2000) pour  $d = 1$ , Lavancier pour  $d \geq 1$ )

Sous **H 1**, il existe une application linéaire  $I$  de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  dans  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  telle que :

- (i) Si  $\Phi_n \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}^d)} \Phi$ , alors  $\int \Phi_n(x) dW_n(x) \xrightarrow{\mathcal{L}} I(\Phi)$ .
- (ii)  $\forall \Phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $\mathbb{E}(I(\Phi))^2 \leq (2\pi)^d M \|\Phi\|_2^2$
- (iii)  $I\left(x \mapsto \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_j x_j} - 1}{ix_j}\right) = B(t_1, \dots, t_d)$
- (iv) Si  $\xi$  est un bruit blanc fort, quelque soit  $\Phi$  dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $I(\Phi) = \int \Phi dW_0$ , où  $W_0$  est la mesure spectrale associée au bruit blanc gaussien.

# Application aux sommes partielles pour $d \leq 2$

Rappel :  $X_k = \sum \hat{a}_j \xi_{k-j}$  où  $\hat{a}$  sont les coefficients de Fourier de  $a$ .  
D'où  $f_X(x) = f_\xi(x) |a|^2(x)$ .

**Proposition** (Lavancier, CLT)

Si  $a$  est continue en 0 et  $a(0) \neq 0$ ,

$$\frac{1}{n^{d/2}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{fidi} a(0)B(t),$$

où  $B$  est la limite des sommes partielles de  $\xi$ .

## Remarque

Le résultat concerne

- Des champs à courte mémoire (lorsque  $a$  est continue partout)
- Des champs à longue mémoire dont la singularité spectrale est hors de l'origine (ex :  $a(x, y) = |xy - 1|^\alpha$ ,  $-1/2 < \alpha < 0$ )

# Application aux sommes partielles pour $d \leq 2$

## Proposition (Lavancier, Non-CLT)

Si  $a(x) \sim \tilde{a}(x)$  en 0 avec  $\tilde{a}(\lambda x) = |\lambda|^\alpha \tilde{a}(x)$  ( $-1 < \alpha < 0$ ),

$$\frac{1}{n^{d/2-\alpha}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{fidi} I \left( x \mapsto \tilde{a}(x) \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_j x_j} - 1}{ix_j} \right).$$

Si  $\xi$  est un bruit blanc fort, le champ limite s'écrit

$$\int \tilde{a}(x) \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_j x_j} - 1}{ix_j} dW_0(x).$$

## Remarque

Ce résultat concerne des champs à longue mémoire

- isotrope, ex :  $\tilde{a}(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha$ ,  $-1 < \alpha < 0$ .
- non-isotrope, ex :  $\tilde{a}(x, y) = |x + \theta y|^\alpha$ ,  $-1/2 < \alpha < 0$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

# Application aux sommes partielles pour $d \geq 3$

## Remarque

En dimension  $d \geq 3$ , il faut renforcer les hypothèses sur  $a$ . Le contrôle de  $a$  en l'origine ne suffit plus.

## Proposition (Lavancier, CLT)

Si  $a$  est bornée et est continue en 0 tel que  $a(0) \neq 0$ , alors

$$\frac{1}{n^{d/2}} \sum_{k_1=0}^{\lfloor nt_1 \rfloor} \cdots \sum_{k_d=0}^{\lfloor nt_d \rfloor} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{fidi}} a(0)B(t),$$

où  $B$  est la limite des sommes partielles de  $\xi$ .

### Proposition (Lavancier, Singularité spectrale sur un sous-espace linéaire)

Si

$$a(x) = \left| \sum_{i=1}^d c_i x_i \right|^\alpha,$$

où  $-\frac{1}{1\vee(d-2)} < 2\alpha < 0$ , alors

$$\frac{1}{n^{d/2-\alpha}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{fidi} I \left( x \mapsto a(x) \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_j x_j} - 1}{ix_j} \right).$$

### Proposition (Lavancier, Convergence vers le Drap Brownien Fractionnaire)

Si le bruit est un bruit blanc fort et si

$$a(x) = \prod_{j=1}^d |x_j|^{\alpha_j},$$

où, pour tout  $j$ ,  $-1/2 < \alpha_j < 0$ , alors

$$\frac{1}{n^{(d/2 - \sum_j \alpha_j)}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{fidi} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_j x_j} - 1}{ix_j |x_j|^{-\alpha_j}} dW_0(x).$$

# Critère d'équitension dans $\mathcal{D}([0, 1]^d)$

Proposition (Lavancier, Adaptation du critère de Bickel et Wichura, 1971)

Soit le champ aléatoire stationnaire  $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  et soit

$$S_n(t) = d_n^{-1} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d}, \quad t \in [0, 1]^d.$$

Si  $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{fidi} Y$  et s'il existe  $c > 0$  et  $\beta > 1$  tels que pour tout  $p_1, \dots, p_d \in \{1, \dots, n\}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \prod_{i=1}^d \frac{p_i}{n} \right)^{-\beta} \mathbb{E} \left( d_n^{-1} \sum_{k_1=0}^{p_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{p_d} X_{k_1, \dots, k_d} \right)^2 \leq c,$$

alors

$$S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}([0, 1]^d)} Y.$$



- 4 Tester la longue mémoire
- Hypothèses et Statistique du test
  - Consistance du test
  - Simulations en dimension  $d = 2$

# Hypothèses du test

## Hypothèse nulle : courte mémoire

On suppose  $\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |r(j)| < \infty$ , des hypothèses de moments et

$$\frac{n^{-d/2}}{\sigma} \sum_{k_1=1}^{[nt_1]} \dots \sum_{k_d=1}^{[nt_d]} X_k \xrightarrow{\mathcal{D}([0,1]^d)} B(t),$$

où  $\sigma^2 := \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} r(j)$  et où  $B$  est le drap brownien sur  $[0, 1]^d$ .

## Hypothèse alternative : longue mémoire

On suppose qu'il existe  $d_n = n^\gamma L(n)$  où  $\gamma > d/2$  et où  $L$  est une fonction à variation lente à l'infini tel que

$$d_n^{-1} \sum_{k_1=1}^{[nt_1]} \dots \sum_{k_d=1}^{[nt_d]} X_k \xrightarrow{\mathcal{D}([0,1]^d)} Y(t),$$

où  $Y$  est un champ aléatoire non dégénéré mesurable.

# Statistique du test

Soit  $q_n$  un entier dans  $[1, n]$ , un estimateur de  $\sigma^2 := \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} r(j)$  est

$$\hat{s}_{q_n, n}^2 = \sum_{j \in \{-q_n, \dots, q_n\}^d} \omega_{q_n, j} \hat{r}(j), \quad \text{où } \begin{cases} \hat{r} : \text{fonction de covariance empirique} \\ \omega_{q_n, j} = \prod_{i=1}^d (1 - \frac{|j_i|}{q_n}) \end{cases}$$

Soit  $S_j^* = \sum_{i_1=1}^{j_1} \dots \sum_{i_d=1}^{j_d} (X_{i_1, \dots, i_d} - \bar{X}_n).$

Définition (Extension de la statistique V/S au cas  $d > 1$ )

Soit  $A_n = \{1, \dots, n\}^d$ , la statistique V/S est définie par

$$M_n = n^{-d} \frac{\widehat{Var}(S_j^*, j \in A_n)}{\hat{s}_{q_n, n}^2},$$

soit en développant

$$M_n = \frac{n^{-2d}}{\hat{s}_{q_n, n}^2} \left[ \sum_{j \in A_n} S_j^{*2} - n^{-d} \left( \sum_{j \in A_n} S_j^* \right)^2 \right].$$

# Consistance du test

## Proposition (Lavancier, Sous l'hypothèse nulle)

Sous l'hypothèse nulle, en choisissant  $q_n$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n/n = 0$ , on a

$$M_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_{[0,1]^d} \left( B(t) - \left( \prod_{i=1}^d t_i \right) B(1) \right)^2 dt - \left[ \int_{[0,1]^d} \left( B(t) - \left( \prod_{i=1}^d t_i \right) B(1) \right) dt \right]^2,$$

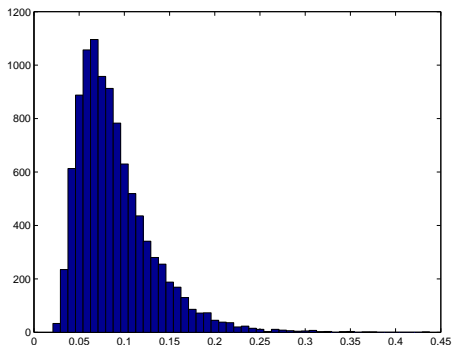
où  $B$  est le drap brownien standard sur  $[0, 1]^d$ .

## Proposition (Lavancier, Sous l'hypothèse alternative)

Sous l'hypothèse alternative, en choisissant  $q_n$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$  et pour tout  $\delta > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n/n^\delta = 0$ ,

$$M_n \xrightarrow{P} \infty.$$

# Simulation de la loi asymptotique sous l'hypothèse nulle lorsque $d = 2$



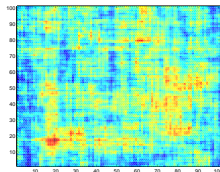
*Moyenne* = 0,0897

*Variance* = 0,0018

$c_{90\%}$  = 0,1448

$c_{95\%}$  = 0,1692

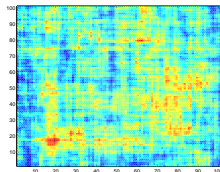
# Simulations sur des champs $50 \times 50$ avec $q = 8$



$$f(\lambda_1, \lambda_2) \propto |\lambda_1|^{-\gamma} |\lambda_2|^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

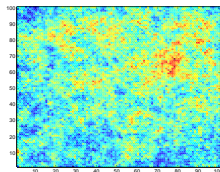
$\gamma$	0,75	0,5	0,25
$\hat{p}$	81%	75,4%	62,4%

# Simulations sur des champs $50 \times 50$ avec $q = 8$



$$f(\lambda_1, \lambda_2) \propto |\lambda_1|^{-\gamma} |\lambda_2|^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

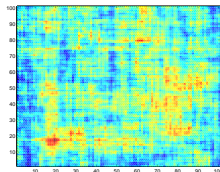
$\gamma$	0,75	0,5	0,25
$\hat{p}$	81%	75,4%	62,4%



$$f(\lambda_1, \lambda_2) \propto (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

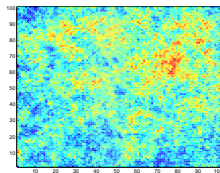
$\gamma$	0,96	0,7	0,4
$\hat{p}$	75%	58,1%	32,7%

# Simulations sur des champs $50 \times 50$ avec $q = 8$



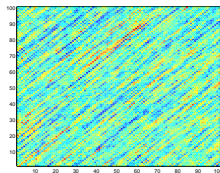
$$f(\lambda_1, \lambda_2) \propto |\lambda_1|^{-\gamma} |\lambda_2|^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

$\gamma$	0,75	0,5	0,25
$\hat{p}$	81%	75,4%	62,4%



$$f(\lambda_1, \lambda_2) \propto (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

$\gamma$	0,96	0,7	0,4
$\hat{p}$	75%	58,1%	32,7%



$$f(\lambda_1, \lambda_2) \propto |\lambda_1 - \lambda_2|^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

$\gamma$	0,75	0,5	0,25
$\hat{p}$	27%	27%	24,5%



## 5 Asymptotique du Processus Empirique

- Principe de réduction uniforme
- Convergence sous différentes situations de longue mémoire

Théorème (Doukhan, Lang et Surgailis (2002) )

Soit  $X_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} a_j \xi_{k-j}$  où  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  est un bruit blanc fort et où  $a_j = |j|^{-\beta} L(|j|) b\left(\frac{j}{|j|}\right)$ ,  $\frac{d}{2} < \beta < d$ .

$$\frac{1}{n^{3d/2-\alpha}} \sum_{k_1=1}^n \cdots \sum_{k_d=1}^n [\mathbb{1}_{\{X_k \leq x\}} - F(x)] \xrightarrow{\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}})} cF'(x)Z,$$

où  $F$  est la fonction de répartition de  $X$  et  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

# Processus empirique doublement indexé

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$  un champ gaussien stationnaire avec  $r(0) = 1$ .  
Soit  $G$  une fonction mesurable.

## Définition

Le processus empirique doublement indexé de  $G(X_n)$  est défini à une renormalisation près par

$$\sum_{k_1=1}^{[Nt_1]} \cdots \sum_{k_d=1}^{[Nt_d]} [\mathbb{1}_{\{G(X_k) \leq x\}} - F(x)],$$

où  $F$  est la fonction de répartition de  $G(X_n)$ .

Soit le développement suivant dans la base des polynômes de Hermite

$$\mathbb{1}_{\{G(X_j) \leq x\}} - F(x) = \sum_{q=m}^{\infty} \frac{J_q(x)}{q!} H_q(X_j).$$

# Principe de réduction uniforme

Soit  $A_n = \{1, \dots, n\}^d$  et

$$R_n(x) = \sum_{j \in A_n} \left[ \mathbb{1}_{\{G(X_j) \leq x\}} - F(x) - \frac{J_m(x)}{m!} H_m(X_j) \right].$$

## Théorème (Lavancier)

Si

$$d_N^2 := m! \sum_{j, k \in A_N^2} r^m(k - j) \longrightarrow \infty \quad \text{lorsque } N \rightarrow \infty,$$

alors, pour tout  $\delta > 0$  et pour tout  $n \leq N$ ,

$$P \left( \sup_x d_N^{-1} |R_n(x)| > \eta \right) \leq CN^\delta \frac{1}{d_N^2} \sum_{j, k \in A_N^2} |r(k - j)|^{m+1} + \frac{d_n^2}{N^{2d}}.$$

# Application en longue mémoire isotrope

Corollaire (Lavancier, Généralisation de Dehling et Taquq (1989) à  $d \geq 1$ )

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$  un champ gaussien stationnaire de fonction de covariance

$$r(k) = |k|^{-\alpha} L(|k|) b \left( \frac{k}{|k|} \right),$$

avec  $r(0) = 1$  et  $0 < m\alpha < d$ .

Alors

$$\frac{1}{n^{d-m\alpha/2} (L(n))^{m/2}} \sum_{j_1=1}^{[nt_1]} \cdots \sum_{j_d=1}^{[nt_d]} [\mathbb{1}_{\{G(X_j) \leq x\}} - F(x)]$$

converge dans  $\mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}} \times [0, 1]^d)$  vers

$$\frac{J_m(x)}{m!} Z_m(t),$$

où  $Z_m$  est le processus de Hermite d'ordre  $m$ .

# Application en longue mémoire non-isotrope

Corollaire (Lavancier, Singularité spectrale sur un sous espace linéaire)

Soit  $X_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \epsilon_{n-k}$  où  $\epsilon$  est un bruit blanc gaussien. Supposons que le rang de Hermite de  $\mathbb{1}_{\{G(X_n) \leq x\}} - F(x)$  vaut 1. Si

$$a(\lambda) = \left| \sum_{i=1}^d c_i \lambda_i \right|^\alpha,$$

où  $(c_1, \dots, c_d) \in \mathbb{R}^d$  et  $-\frac{1}{1 \vee (d-2)} < 2\alpha < 0$ , alors

$$\frac{1}{n^{d/2-\alpha}} \sum_{k_1=1}^{[nt_1]} \dots \sum_{k_d=1}^{[nt_d]} \left( \mathbb{1}_{\{G(X_j) \leq x\}} - F(x) \right) \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0,1]^d)} J_1(x) Z(t)$$

où

$$Z(t) = \int_{\mathbb{R}^d} a(u) \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_j u_j} - 1}{iu_j} dW_0(u).$$

# Application en longue mémoire non-isotrope

## Corollaire (Lavancier, Structure produit)

Soit  $X_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \epsilon_{n-k}$  où  $\epsilon$  est un bruit blanc gaussien. Supposons que le rang de Hermite de  $\mathbb{1}_{\{G(X_n) \leq x\}} - F(x)$  vaut 1. Si

$$a(\lambda) = \prod_{j=1}^d s(\lambda_j) |\lambda_j|^{\alpha_j},$$

où, pour tout  $j$ ,  $-1/2 < \alpha_j < 0$  et où  $s_j$  est borné, continue en 0 tel que  $s_j(0) \neq 0$ . Alors

$$\frac{1}{n^{d/2 - \sum_{j=1}^d \alpha_j}} \sum_{j_1=1}^{[nt_1]} \cdots \sum_{j_d=1}^{[nt_d]} (\mathbb{1}_{\{G(X_{j_d}) \leq x\}} - F(x)) \xrightarrow{\mathcal{D}(\bar{\mathbb{R}} \times [0,1]^d)} J_1(x) B_f(t),$$

où

$$B_f(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d s_j(0) |\lambda_j|^{\alpha_j} \frac{e^{it_j \lambda_j} - 1}{i \lambda_j} dW_0(\lambda).$$

# Conclusion sur le processus empirique

## Remarque

- Dans toutes les situations de forte dépendance étudiées, le processus empirique est asymptotiquement dégénéré.
- Les résultats de convergence précédents permettent d'obtenir la loi limite de toute statistique s'écrivant comme une fonction continue du processus empirique.

Ex : les U-statistiques

$$U_n(h) = \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_k) \in A_n^k \\ j_p \neq j_q \text{ si } p \neq q}} h(X_{j_1}, \dots, X_{j_k}),$$

où  $h$  est une fonction invariante par permutation des variables et où  $X$  est un champ à longue mémoire.

## 6 Perspectives

- Sortir du cadre étudié :
  - non-linéarité,
  - échantillonnage irrégulier,
  - longue mémoire anisotrope particulière.
- Estimer les paramètres de la longue mémoire : Whittle, à partir **des formes quadratiques**.



### Définition (Formes quadratiques de $X$ )

Soit  $g(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} g_j e^{-i \langle j, x \rangle}$ ,  $I_n$  le périodogramme de  $X$  et  $E = [-\pi, \pi]^d$  :

$$J_n(g) = \sum_{k \in A_n} \sum_{l \in A_n} g_{k-l} X_k X_l = \int_E g(t) I_n(t) dt.$$

Si  $X$  est linéaire, i.e.

$$X_n = \int_E a(x) e^{i \langle n, x \rangle} dW(x),$$

$$J_n(g) - \mathbb{E} J_n(g) = n^{-d} \iint_{(nE)^2} a\left(\frac{x}{n}\right) a\left(\frac{y}{n}\right) \left[ \frac{1}{n^d} \int_E g(t) H_n\left(\frac{x}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n} + t\right) dt \right] dW_n(x) dW_n(y),$$

où pour tout borélien  $A$ ,  $W_n(A) = n^{d/2} W(n^{-1}A)$ .

# ANNEXE

# Modélisation par filtrage

- **Champs ARMA** :  $P(L_1, \dots, L_d)X_{n_1, \dots, n_d} = Q(L_1, \dots, L_d)\epsilon_{n_1, \dots, n_d}$ .

## Exemple

$$X_{n_1, \dots, n_5} - \frac{1}{5}(X_{n_1-1, n_2, \dots, n_5} + \dots + X_{n_1, \dots, n_5-1}) = \epsilon_{n_1, \dots, n_5}$$

admet une solution stationnaire de densité spectrale

$$f_X(\lambda_1, \dots, \lambda_5) \propto \frac{1}{|1 - \frac{1}{5}(e^{i\lambda_1} + \dots + e^{i\lambda_5})|^2}.$$

- **Filtrage d'un bruit blanc** : Si

$$X_n = \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle n, \lambda \rangle} a(\lambda) dZ(\lambda).$$

où  $Z$  est la mesure spectrale d'un bruit blanc, alors

$$f_X(\lambda) \propto |a(\lambda)|^2.$$

## Exemple

En dimension  $d = 2$ ,  $a(\lambda_1, \lambda_2) = |\lambda_1 - \lambda_2|^\alpha$  où  $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$ .

# Exemple : longue mémoire anisotrope particulière

Le champ

$$X_{n_1, n_2} = \left(1 - \frac{L_1 + L_2}{2}\right)^\alpha \epsilon_{n_1, n_2}, \quad -1/2 < \alpha < 0,$$

admet la densité spectrale

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \left(4 \sin^2 \frac{\lambda_1}{2} \sin^2 \frac{\lambda_2}{2} + \sin^2 \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)\right)^\alpha.$$

Le comportement de  $f$  à l'origine dépend des directions d'approche : il dépend du comportement de  $\lambda_1 + \lambda_2$  par rapport à  $\lambda_1 \lambda_2$ .

# Modélisation par agrégation

On construit indépendamment  $N$  champs autorégressifs à paramètres aléatoires

$$P(L_1, L_2)X_{n_1, n_2}^{(k)} = \epsilon_{n_1, n_2}^{(k)}, \quad k = 1 \dots N,$$

où  $P$  est un polynôme à coefficients aléatoires.

Le champ agrégé est obtenu par le TCL classique :

$$Z_{n,m} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N X_{n,m}^{(k)}.$$

Le champ gaussien  $Z$  admet la densité spectrale :

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{(2\pi)^d} \mathbb{E} |P^{-1}(e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2})|^2.$$

**Si la loi sur les coefficients de  $P$  est choisie convenablement,  $Z$  est un champ gaussien à longue mémoire.**

## Exemple (Modélisation d'une l.m. de type produit)

$$P(L_1, L_2) = (1 - \beta_1 L_1)(1 - \beta_2 L_2)$$

où  $\beta_1$  et  $\beta_2$  suivent une loi de densité  $\sqrt{1-x}$ .

On a alors

- $f(\lambda_1, \lambda_2) \propto \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1||\lambda_2|}}$  en  $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$
- $r(h, l)$  non sommable.

## Exemple (Modélisation d'une l.m dans une direction privilégiée)

$$P(L_1, L_2) = 1 - \beta L_1 L_2$$

où  $\beta$  suit une loi de densité  $\sqrt{1-x}$ .

On a alors

- $f(\lambda_1, \lambda_2) \propto \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1 + \lambda_2|}}$  en  $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$
- $r(h, l) = 0$  si  $h \neq l$  et  $r(h, h)$  non sommable.

# Modélisation en mécanique statistique

**Le modèle d'Ising** : Les spins sont à valeurs dans  $\{-1, 1\}$  et le potentiel d'interactions est

$$\Phi_{i,j}(x_i, x_j) = \begin{cases} \beta x_i x_j & \text{si } \sum_{k=1}^d |i_k - j_k| = 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $\beta > 0$  représente l'inverse de la température.

Lorsque  $d \geq 2$ , il y a transition de phase si  $\beta \geq \beta_c$  et

$$r(h) \underset{h \rightarrow \infty}{\sim} |h|^{-(d-2+\mu)}, \quad \text{en } \beta = \beta_c,$$

où  $\mu \in [0, 2]$  est un paramètre qui dépend de  $d$ .

# Modélisation en mécanique statistique

-Les systèmes gaussiens homogènes :  $x_i \in \mathbb{R}$  et

$$\Phi_{i,j}(x_i, x_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}J(0)x_i^2 & \text{si } i = j \\ J(i-j)x_i x_j & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

où  $(J(i))_{i \in \mathbb{Z}^d}$  est une suite paire définie positive de  $l^1(\mathbb{Z}^d)$ .

**Théorème** (Dobrushin 1980, Künsch 1980)

*Si*

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} \hat{J}^{-1}(\lambda) d\lambda < \infty,$$

*alors phases pures sont gaussiennes de mesures spectrales  $\hat{J}^{-1}$ ."*

*De plus, il y a transition de phase ssi  $\hat{J}$  admet une racine.*

Pour les systèmes homogènes gaussiens,

**Système en transition de phase  $\iff$  Champ à longue mémoire.**



## Exemple (Le potentiel harmonique en dimension $d \geq 3$ )

$$J(n) = \begin{cases} -\frac{1}{2d} & \text{si } |n| = 1 \\ 1 & \text{if } n = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$\hat{J}(\lambda)^{-1} \sim \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \lambda_k^2 \right)^{-1}, \quad \text{lorsque } \lambda \rightarrow 0.$$

## Exemple (En dimension $d = 2$ , direction privilégiée)

$$J(k, \ell) = \begin{cases} \prod_{0 < j \leq k} \frac{j-1+\alpha}{j-\alpha} & \text{si } \ell = \theta k, \quad |k| > 1 \\ 1 & \text{if } k = \ell = 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $\alpha \in ]-1/2, 0[$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . On montre que

$$\hat{J}(\lambda_1, \lambda_2)^{-1} \propto \left| 2 \sin \left( \frac{\lambda_1 + \theta \lambda_2}{2} \right) \right|^{2\alpha}.$$

# Formes quadratiques. Définition.

Soit  $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$  et  $A_n = \{1, \dots, n\}^d$ , on étudie

$$J_n(g) = \sum_{k \in A_n} \sum_{l \in A_n} g_{k-l} X_k X_l,$$

qui peut se réécrire

$$J_n(g) = \int_E g(t) I_n(t) dt.$$

où  $g(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} g_j e^{-i \langle j, x \rangle}$  et

$$I_n(x) = \frac{1}{n^d} \left| \sum_{k \in A_n} X_k e^{i \langle k, x \rangle} \right|^2 = \frac{1}{n^d} \sum_{k, l \in A_n^2} X_k X_l e^{-i \langle k-l, x \rangle}.$$

## Remarque

$J_n(g)$  : outil de base pour l'étude des covariances empiriques et de l'estimateur de Whittle des paramètres de longue mémoire.

# Écriture sous forme d'intégrale double

Si  $X$  est un champ linéaire, i.e. en posant  $E = [-\pi, \pi]^d$ ,

$$X_n = \int_E a(x) e^{i\langle n, x \rangle} dW(x),$$

$$J_n(g) - \mathbb{E}J_n(g) =$$

$$n^{-d} \iint_{(nE)^2} a\left(\frac{x}{n}\right) a\left(\frac{y}{n}\right) \left[ \frac{1}{n^d} \int_E g(t) H_n\left(\frac{x}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n} + t\right) dt \right] dW_n(x) dW_n(y),$$

où pour tout borélien  $A$ ,  $W_n(A) = n^{d/2} W(n^{-1}A)$ .

## Remarque

Dans l'état actuel des travaux, l'écriture n'est valable que si les cumulants d'ordre 4 de  $W$  sont nuls ( $\approx$  cas gaussien).

# Théorème limite non-central

## Théorème (Lavancier)

Soit

$$X_n = \int_E a(x) e^{i\langle n, x \rangle} dW(x),$$

où  $W$  admet des cumulants d'ordre 4 nuls.

Si  $a$  est homogène de degré  $\alpha < 0$ , telle que  $a(-x) = \overline{a(x)}$  et telle que

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} a^2(x) a^2(y) \prod_{i=1}^d 1 \wedge (x_i + y_i)^{-2} dx dy < \infty.$$

Si  $g$  vérifie  $g(-t) = \overline{g(t)}$ , si  $g$  est de module borné et si  $g$  est continue en 0 tel que  $g(0) \neq 0$  et si de plus la suite de ses coefficients de Fourier est sommable, alors

$$n^{d+2\alpha} (J_n(g) - \mathbb{E}J_n(g)) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(0) \iint_{\mathbb{R}^{2d}} a(x) a(y) \prod_{j=1}^d \frac{e^{i(x_j + y_j)} - 1}{i(x_j + y_j)} dW_0(x) dW_0(y).$$

Soit la fonction de covariance empirique :

$$\hat{r}_n(h) = \frac{1}{n^d} \sum_{k_1=1}^{n-h_1} \dots \sum_{k_d=1}^{n-h_d} X_k X_{k+h}.$$

Corollaire (Lavancier, Non-TCL pour les covariances empiriques)

*Sous les mêmes hypothèses,*

$$n^{d+2\alpha} [\hat{r}_n(h) - E(\hat{r}_n(h))] \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(2\pi)^d} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} a(x)a(y) \prod_{j=1}^d \frac{e^{i(x_j+y_j)} - 1}{i(x_j + y_j)} dW_0(x)dW_0(y).$$

Preuve : Il suffit de prendre  $g(t) = (2\pi)^{-d} e^{i\langle h, t \rangle}$  dans le théorème précédent.

### Remarque

La condition sur le filtre  $a$  inclut

- $a(x) = |x|^\alpha$ , où  $-d/2 < \alpha < -d/4$  (l.m. isotrope : on retrouve un résultat de Doukhan et Soulier, 1996) ;
- $a(x) = \prod_{j=1}^d |x_j|^{\alpha_j}$ , où  $-1/2 < \alpha_j < -1/4$  ;
- En dimension  $d = 2$ ,  $a(x_1, x_2) = |x_1 + \theta x_2|^\alpha$ , où  $-1/2 < \alpha < -1/4$ .