[PE-TO] M. Peshkin - A. Tonomura, *The Aharonov-Bohm effect* , Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, (1989)

[RO] D. Robert, *Autour de l'approximation semi-classique* , Progress in mathematics, Vol. 68, Birkhäuser, Basel, (1987)

[RU] S.N.M. Ruijsenaars, *The Aharonov-Bohm effect and scattering theory* , Annals of Physics 146, 1-34, (1983)

[YA] K. Yajima, *Schrödinger evolution equations with magnetic fields* , University of Tokyo, Preprint

Références bibliographiques

[AH-BO] Y. Aharonov - D. Bohm, *Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory*, The physical review, second series Vol. 115, n°3, (1959)

[AR] V.I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics,* Springer-Verlag, (1978)

[BA] G. Baym - Benjamin - Cumming, *Lectures on quantum mechanics,* Publishing Company Inc.

[B-G-O] T.P. Branson - P.B. Gilkey- B. Orsted, *Leading terms in the heat invariant* , Proceedings of the american mathematical society, Vol. 109, 437-449, (1990)

$[FU]_1$ D. Fujiwara, *Remarks on convergence of the Feynman path integrals* , Duke mathematical journal, Vol. 47, n°3, 559-601, (1980)

$[FU]_2$ D. Fujiwara, *A construction of the fundamental solution for the Schrödinger equation* , Journal d'analyse mathématique, Vol. 35, 41-96, (1979)

[HE] B. Helffer, *Effet d'Aharonov-Bohm sur un état borné de l'équation de Schrödinger* , Commun. Math. Phys. 119, 315-329, (1988)

$[HO]_{1,4}$ L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators* , Springer, tomes 1 à 4

[KU] H. Kumanogo, *Pseudo-differential operator of multiple symbol and the Calderòn-Vaillancourt theorem* , J. Math. Soc. Japan 27, 113-120, (1975)

[NI] F. Nicoleau, *Théorie de la diffusion pour l'opérateur de Schrödinger en présence d'un champ magnétique* , Thèse de Doctorat de l'université de Rennes 1, (1991)

Lemme B.2.4 : [RO]$_1$ Th IV.24

Soient $a \in B^{\infty}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_q)$, $b \in B^{\infty}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi \times \mathbb{R}^n_y)$.

Alors : il existe des amplitudes $c(t)$ et $c'(t)$ *telles que*

$$J_h(t,c(t)) = J_h(t,a).Op_h b \quad (resp.\ J_h(t,c'(t)) = Op_h b.J_h(t,a)).$$

et $\| c(t) \| + \| c'(t) \| \leqslant C_4(p) \| a \|_{M(p)} \| b \|_{M(p)}$.

On en déduit :

Corollaire B.2.5

Il existe des amplitude $b(t)$ *dans* B^{∞} *telles que :*

$$J_h(t,1).\ J_h(t,b(t))^* = 1 \quad et\ vérifiant \| b(t) \|_p \leqslant C_5(p).$$

On peut maintenant conclure :

Démonstration du théorème B.2 : On part de :

$$J_h(t,a(t)) = \int_{0 \leqslant s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_{L-1} \leqslant t} J_h(t - s_{L-1}, a_L).J_h(s_{L-1} - s_{L-2}, a_{L-1})\ldots$$

$$J_h(s_2 - s_1, a_2).J_h(s_1, a_1)\, ds_1 \ldots ds_{L-1}\ .$$

D'après le corollaire B.2.5, on construit b_j telle que :

$$J_h(s_j, 1).J_h(s_j, b_j)^* = 1.$$

Soit c_j définie par :

$$J_h(s_j, c_j) = J_h(s_j - s_{j-1}, a_j).J_h(s_{j-1}, 1) \quad (cf.\ démonstration\ du\ Th.\ B.1).$$

Enfin, soit g_j définie par le lemme B.2.1 par :

$$Op_h g_j = J_h(s_j, b_j)^* J_h(s_j, c_j).$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} J_h(t,a(t)) = \int\ & J_h(t - s_L, a_L).J_h(s_{L-1},1).J_h(s_{L-1}, b_{L-1})^* \\ & J_h(s_{L-1} - s_{L-2}, a_L).J_h(s_{L-2},1).J_h(s_{L-2}, b_{L-2})^* \\ & \ldots \\ & J_h(s_2 - s_1, a_L).J_h(s_1,1).J_h(s_1, b_1)^* \\ & J_h(s_1, a_1)\ \ \Pi\, ds_j\ . \\ = \int\ & J_h(t - s_{L-1}, a_L).J_h(s_{L-1}, 1).Op_h g_{L-1} \ldots Op_h g_1\ \Pi ds_j\ . \\ = \int\ & J_h(t, \hat{a}_L).Op_h g_{L-1} \ldots Op_h g_1\ \Pi ds_j\ . \end{aligned}$$

On conclut à l'aide des estimations des lemmes B.2.1-B.2.4 . ■

$q \to \xi(t,x,y,q) = \int_0^1 \partial_x S_A(t, y+s(x-y), q)\, ds$ est un difféomorphisme C^∞ d'inverse $q(\xi)$ tel que :

$$\partial_q \xi = \int_0^1 \partial^2_{x,q} S_A(t,...)\, ds = \int_0^1 \partial_q p_A(t,...)\, ds = 1 + O(t).$$

On pose alors : $a(t,x,y,\xi,h) = |\text{dét}\ (\partial_q \xi)_{|q=q(\xi)}|^{-1} - 1$. D'où le résultat. ■

Lemme B.2.2 : [KU], [FU]$_1$

Soit $a_1(x,\xi,y),....,a_L(x,\xi,y)$ *une suite de fonctions de* $B^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi \times \mathbb{R}^n_y)$.

On définit :

$$b(x,\xi,y,h) = (2\pi h)^{-n(L-1)} \int ... \int \Pi_{1 \leqslant j \leqslant L} a_j(y+z_j, \xi+\eta_j, y+z_{j-1}) . \exp\left(\frac{i}{h} (\Sigma_{1 \leqslant j \leqslant L-1} y_j \eta_j)\right) \Pi_{1 \leqslant j \leqslant L-1} d\eta_j\, dy_j .$$

où $z_j = y_1 + ... + y_j \quad (1 \leqslant j \leqslant L-1)$, $z_L = x - y$, $\eta_L = 0$.

Alors : $Op_h b = Op_h a_L \, ... Op_h a_1$.

De plus, $\exists C_2 > 0$ *indépendante de* L *telle que :* $\forall \alpha,\beta,\nu$, $|\alpha|+|\beta|+|\nu| = m$,

$$\| \partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi \partial^\nu_y b \|_0 \leqslant (C_2)^L \Sigma_{m_1+...+m_L = m} \Pi_{1 \leqslant j \leqslant L} \| a_j \|_{3n+6+m_j} .$$

Lemme B.2.3

Avec les notations du lemme B.2.1, il existe une amplitude $\hat{a}(t,x,\xi,y,h)$ *telle que* $(1 - Op_h a(t))^{-1} = Op_h \hat{a}(t)$ *vérifiant* $\| \hat{a} \|_p \leqslant C_3(p)$.

Démonstration : D'après le lemme B.2.1, nous avons formellement :

$$(1 - Op_h a(t))^{-1} = 1 + \Sigma_{k \geqslant 1} (Op_h a(t))^k .$$

Nous allons montrer que le terme de droite est un opérateur pseudodifférentiel. D'après le lemme B.2.2, il existe amplitude $a_k(t,x,\xi,y,h)$ dans B^∞ telle que : $Op_h a_k = (Op_h a(t))^k$.

De plus, on a les estimations suivantes : $\forall \alpha,\beta,\nu$, $|\alpha|+|\beta|+|\nu| = m$

$$\| \partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi \partial^\nu_y a_k \|_0 \leqslant (C_2)^k \Sigma_{m_1+...+m_k = m} \| a(t) \|^{k-m}_{3n+6} . \| a(t) \|^m_{3n+6+m_j} \cdot$$
$$\leqslant (C_2)^k (k+1)^m [C_1(3n+6)]^{k-m} [C_1(3n+6+m)]^m |t|^k .$$

On choisit T assez petit pour que :

$$\| \partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi \partial^\nu_y a_k \|_0 \leqslant \tfrac{1}{2} \text{ pour } k \geqslant k(m).$$

Par conséquent : $1 + \Sigma_{k \geqslant 1} a_k(t,x,\xi,y,h)$ converge vers $\hat{a}(t)$ dans B^∞, et on a :

$$\| \hat{a}(t) \|_m \leqslant C_3(m).$$

D'où le résultat. ■

$$\{ \dots \} = \exp(\tfrac{i}{h} S_A(t,x,\eta)) \, . \, \hat{c}(t,\tau,x,\eta,h)$$

avec $\| \hat{c} \|_p \leqslant K_p \| a \|_{m(p)} \, . \, \| b \|_{m(p)}$. On conclut en posant $c(t,x,\eta,h) = \int_0^t \hat{c}(t,\tau,x,\eta,h) \, d\tau$. ■

A l'aide du théorème B.1, étant donnée une famille $(a_j)_{j=1,\dots,L} \in B^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_q)$, on construit par récurrence l'amplitude a(t) telle que :

$$J_h(t,a(t)) = J_h(\,.,a_L) * \dots * J_h(\,.,a_1)\,(t).$$

Nous allons améliorer le théorème B.1, de façon à obtenir des estimations uniformes sur a(t) "uniformes en L". C'est l'objet du théorème suivant :

Théorème B.2

$\forall \, p \geqslant 0, \exists \, K_p$, $m(p)$ *indépendants de* L , *des* a_j *et de* t *tels que :*

$$\| a(t) \|_p \leqslant (K_p)^L \, |t|^{L-1} \, \Gamma(L-1)^{-1} \Pi_{1 \leqslant j \leqslant p} \| a_j \|_{m(p)} \, .$$

La démonstration est assez longue. Nous allons modifier les techniques de [KU] pour les adapter au produit des opérateurs Fourier intégraux.

Notations

On posera $\quad Op_h a \, \Psi \, (x) = \iint \exp(\tfrac{i}{h} < x-y,\xi >) \, a(x,y,\xi) \, \Psi(y) \, dy \, d_h\xi$.

Lemme B.2.1

Soient $a_1, a_2 \in B^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_q)$.

Alors : il existe $b(t,x,y,\xi,h) \in B^\infty$ $\quad$ (*resp.* $b'(t,x,y,\xi,h)$) $\quad$ *telle que*

$J_h(t,a_1) J_h(t,a_2)^* = Op_h b(t)$, $\quad$ (*resp.* $J_h(t,a_1)^* J_h(t,a_2) = Op_h b'(t)$)

et on a : $\|b(t)\|_p + \|b'(t)\| \leqslant C_1(p) \, . \, \|a_1\|_p \, . \|a_2\|_p$.

En particulier : il existe $a(t,x,y,\xi,h)$ *telle que* $J_h(t,1) . J_h(t,1)^* = 1 - Op_h(a(t))$

et on a : $\|a(t)\|_p \leqslant C_1(p) . |t|$.

Démonstration : Nous renvoyons le lecteur à $[RO]_1$, th IV.21, en ce qui concerne le premier point. En ce qui concerne le second, avec les notations de la démonstration du th IV.21, il suffit de voir que

D'où :

$$M_{12} = M_{21} = -1$$

$$M_{11} = \partial_y p_A(\tau, y_A(\tau,y,\eta),\eta).\partial_y y_A(\tau,y,\eta)$$

$$M_{22} = \partial_q y_A(t-\tau,x,q)$$

Estimons ces deux derniers termes ; d'après le lemme 3.1, on a : $|M_{11}| = O(1)$. En ce qui concerne le dernier terme, on part de la relation :

$$x_A(t, y_A(t,x,q), q) = x$$

que l'on différentie par rapport à q :

$$\partial_q x_A(t) + \partial_y x_A(t).\partial_q y_A(t) = 0$$

En utilisant les estimations du lemme 3.1 , ($|\partial_q x_A(t)| = O(t)$, $|\partial_y x_A(t) - 1| = O(t)$), on obtient : $|M_{22}| = O(t)$. Par conséquent, $|\det M| = 1 + O(t) \geqslant \frac{1}{2}$ pour $|t| \leqslant T$ assez petit. D'où l'assertion (A_3).

On en déduit en particulier : $\exists$! point critique $(y_c, q_c) = (y_c(t,\tau,x,\eta), q_c(t,\tau,x,\eta))$ tel que

$$p_A(\tau, y_A(\tau, y_c, \eta), \eta) = q_c \qquad (B.1)$$

$$y_A(t-\tau, x, q_c) = y_c \qquad (B.2)$$

De (B.2) et de la relation $y_A(t,x,q_A(t,x,y)) = y$, on tire :

$$q_c = q_A(t-\tau, x, y_c) \quad , \ 0 \leqslant \tau < t, \qquad (B.3)$$

Calculons maintenant la phase au point critique (y_c, q_c) pour $0 \leqslant \tau < t$, et montrons que :

$$\Phi(t,\tau,x,y_c,q_c,\eta) = S_A(t,x,\eta) \qquad (B.4)$$

(par continuité, (B.4) se prolongera pour $0 \leqslant \tau \leqslant t$).

D'après (B.3), il vient aussitôt :

$$\Phi(t,\tau,x,y_c,q_c,\eta) = S_A(\tau,y_c,\eta) + \hat{S}_A(t-\tau,x,y_c) \qquad \text{(cf. notations § 4.3).}$$

Commençons par montrer (B.4) pour $\tau = 0$:

$$S_A(0,y_c,\eta) + \hat{S}_A(t,x,y_c) = y_c.\eta + S_A(t,x,q_A(t,x,y_c)) - y_c.q_A(t,x,y_c)$$

Or, (B.1) et (B.3) pour $\tau = 0$ nous donnent $\eta = q_A(t,x,y_c)$. D'où le résultat. Pour conclure, il suffit de dériver (B.4) par rapport à τ et de montrer que cette dérivée est nulle.

$$\partial_\tau[S_A(\tau,y_c,\eta) + \hat{S}_A(t-\tau,x,y_c)] = \partial_\tau S_A(\tau,y_c,\eta) + \partial_x S_A(\tau,y_c,\eta).\partial_\tau y_c - \partial_t \hat{S}_A(t-\tau,x,y_c) + \partial_y \hat{S}_A(t-\tau,x,y_c).\partial_\tau y_c$$

Or, $\partial_x S_A(\tau,y_c,\eta) = q_c$ et $\partial_y \hat{S}_A(t-\tau,x,y_c) = -q_A(t-\tau,x,y_c) = -q_c$ car (y_c,q_c) point critique.

Donc :

$$\partial_\tau[S_A(\tau,y_c,\eta) + \hat{S}_A(t-\tau,x,y_c)] = \partial_\tau S_A(\tau,y_c,\eta) - \partial_t \hat{S}_A(t-\tau,x,y_c)$$

$$= a(y_c, \partial_x S_A(\tau,y_c,\eta)) - a(x, \partial_x \hat{S}_A(t-\tau,x,y_c)) \quad \text{(équation de Hamilton-Jacobi)}$$

$$= a(y_c, q_A(t-\tau,x,y_c)) - a(x, p_A(t-\tau,y_c,q_A(t-\tau,x,y_c))$$

$$= 0 \quad \text{(conservation de l'énergie).}$$

Ceci termine la démonstration de (B.4). En appliquant le théorème A.1, on a :

Appendice 2 : produits d'opérateurs Fourier intégraux

Notations

Pour $|t| \leqslant T$, on définit :

$$\hat{\Psi}(q) = \mathcal{F}_h \Psi(q) = \int e^{-i/h\, y.q}\, \Psi(y)\, dy$$

$$J_h(t,a)\, \Psi(x) = \int \exp(\tfrac{i}{h} S_A(t,x,q))\, a(x,q,h)\, \hat{\Psi}(q)\, d_h q \quad \text{où } h \in]0,1].$$

$$J_h(.,a) * J_h(.,b)\,(t) = \int_0^t J_h(t-\tau,a)\, J_h(\tau,b)\, d\tau.$$

Théorème B.1

On suppose que : $a,b \in B^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_q)$.

Alors : il existe une fonction amplitude $c(t) \in B^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_q)$ *telle que*

$$J_h(t,c(t)) = J_h(.,a) * J_h(.,b)\,(t)$$

et : $\|c(t)\|_p \leqslant K_p \|a\|_{m(p)} \|b\|_{m(p)} |t|$.

où $m(p)$ et K_p *sont indépendants de* a,b,t,h.

Démonstration : Soit $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On a : $J_h(\tau,b)\Phi(y) = \int \exp(\tfrac{i}{h} S_A(\tau,y,\eta))\, b(y,\eta,h)\, \hat{\Phi}(\eta)\, d_h\eta$

Donc : $\mathcal{F}_h\, J_h(\tau,b)\Phi(q) = \iint \exp(\tfrac{i}{h}(S_A(\tau,y,\eta) - y.q))\, b(y,\eta,h)\, \hat{\Phi}(\eta)\, d_h\eta\, dy$.

Par conséquent :

$$J_h(t-\tau,a)\, J_h(\tau,b)\Phi(x) = \int \{ \iint \exp(\tfrac{i}{h}(S_A(\tau,y,\eta) + S_A(t-\tau,x,q) - y.q)) \; a(x,q,h)\, b(y,\eta,h)\, dy\, d_h q \}\, \hat{\Phi}(\eta)\, d\eta.$$

Explicitons $\{....\}$.

Notons $\Phi(t,\tau,x,y,q,\eta) = S_A(\tau,y,\eta) + S_A(t-\tau,x,q) - y.q$. Nous voulons appliquer le théorème A.1 , (phase stationnaire en les variables y,q) ; par hypothèse, l'assertion (A_1) est trivialement vérifiée et d'après la proposition 3.3, il en est de même pour (A_2). Vérifions maintenant l'assertion (A_3) :

Notons $M = (M_{jk})$ la matrice définie par blocs : $M_{11} = \partial_y^2 \Phi$, $M_{12} = M_{21} = \partial_{y,q}^2 \Phi$, $M_{22} = \partial_q^2 \Phi$.

Nous voulons montrer que $|\det M| > C > 0$ uniformément en toutes les variables.

On a d'après (3.5) :

$$\partial_y \Phi(t,\tau,x,y,q,\eta) = \partial_y S_A(\tau,y,\eta) - q = p_A(\tau, y_A(\tau,y,\eta),\eta) - q$$

$$\partial_q \Phi(t,\tau,x,y,q,\eta) = \partial_q S_A(t-\tau,x,q) - y = y_A(t-\tau,x,q) - y$$

Théorème A.1

Sous les hypothèses précédentes, $I(.,\nu) \in B^{\infty}(\mathbb{R}^m)$ *et* $\forall\ N \geqslant 1$:

$$I(x,\nu) = (2\pi/\nu)^{n/2} |\text{dét } Q(x)|^{-1/2} \exp(i[\tfrac{\pi}{4} \text{sign } Q(x) + \nu\Phi(x,y(x))])$$

$$\{ \sum_{0 \leqslant k \leqslant N-1} \nu^{-k}/k!\ R^k(x,z,\partial_z)\ \hat{a}(x,z,\nu)_{|z=0} + \nu^{-N} p_N(x,\nu) \}$$

avec $\| p_N(.,\nu)\|_p \leqslant C_{Np} \| a(.,.,\nu)\|_{m(p,N)}$.

Démonstration : Posons $\zeta = \partial_y \Phi(x,y)$. Comme l'application $y \to \zeta$ est un difféomorphisme, on en déduit que $\exists R > 0,\ |y| \geqslant R \Rightarrow |\zeta| \geqslant 1$.

Soit χ une fonction C^{∞} telle que :

$$\chi(y) = \begin{cases} 0 \quad \text{pour } |y| \geqslant 2R. \\ \\ 1 \quad \text{pour } |y| \leqslant R. \end{cases}$$

On écrit $I(x,\nu)$ sous la forme : $I(x,\nu) = I_1(x,\nu) + I_2(x,\nu)$ où

$$I_1(x,\nu) = \int a(x,y,\nu)\ \chi(y)\ e^{i\nu\Phi(x,y)} dy.$$

$$I_2(x,\nu) = \int a(x,y,\nu)\ (1-\chi(y))\ e^{i\nu\Phi(x,y)} dy.$$

On peut appliquer pour $I_1(x,\nu)$ les techniques usuelles de phase stationnaire :

$$I_1(x,\nu) = (2\pi/\nu)^{n/2} |\text{dét } Q(x)|^{-1/2} \exp(i[\tfrac{\pi}{4} \text{sign } Q(x) + \nu\Phi(x,y(x))])$$

$$\{ \sum_{0 \leqslant k \leqslant N-1} \nu^{-k}/k!\ R^k(x,z,\partial_z)\ \hat{a}(x,z,\nu)_{|z=0} + \nu^{-N} p_N^1(x,\nu) \}$$

$$\text{avec } \| p_N^1(.,\nu)\|_p \leqslant C_{Np} \| a(.,.,\nu)\|_{m(p,N)} . \quad (\text{cf. } [\text{HOR}]_{1,4})$$

Il reste à étudier $I_2(x,\nu)$. Sur supp $(1-\chi)$, $|\zeta| \geqslant 1$. Par conséquent, on peut définir l'opérateur différentiel $L = |\zeta|^{-2} \sum \zeta_j \partial_{y_j}$, de sorte que $(L - i\nu)\ e^{i\nu\Phi(x,y)} = 0$.

On intègre $I_2(x,\nu)$ N-fois par parties à l'aide de L :

$$I_2(x,\nu) = \nu^{-N} \int (L^*)^N\ (a(x,y,\nu)\ (1-\chi(y))\ e^{i\nu\Phi(x,y)} dy$$

où L^* est l'adjoint formel de L.

D'autre part, $|\ (L^*)^N\ (a(x,y,\nu)\ (1-\chi(y)))\ | \leqslant C_N |\zeta|^{-N} \| a(.,.,\nu)\|_N$.

Donc, $|\ I_2(x,\nu)| \leqslant C_N \nu^{-N} \int_{|y| \geqslant R} |\zeta|^{-N} dy\ .\ \| a(.,.,\nu)\|_N$.

On effectue le changement de variables $y \to \zeta$. On obtient :

$$|\ I_2(x,\nu)| \leqslant C_N \nu^{-N}\ \| a(.,.,\nu)\|_N \int_{|\zeta| \geqslant 1} |\zeta|^{-N} |\text{dét } \partial_y \zeta|^{-1} d\zeta$$

$$\leqslant C_N \nu^{-N} \| a(.,.,\nu)\|_N \quad \text{d'après (A.3).}$$

De la même façon, on estime $\partial_x^{\alpha} I_2(x,\nu)$. ■

Appendice 1 : un théorème de phase stationnaire

Nous énonçons ici un théorème global de phase stationnaire classique, inspiré de $[FU]_2$.

Notations

ν paramètre > 0.

U = ouvert de $\mathbb{R}^m$.

$I(x,\nu) = \int a(x,y,\nu)\, e^{i\nu\Phi(x,y)} dy$ où y parcourt $\mathbb{R}^n$.

Hypothèses

(A.1) $\forall \alpha,\beta$ multi-indices, $\exists C_{\alpha\beta} > 0$, $\forall x,y,\nu$, $|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta a(x,y,\nu)| \leqslant C_{\alpha\beta}$.

(A.2) Φ est à valeurs réelles et $\forall \alpha,\beta$ multi-indices, $|\alpha|+|\beta| \geqslant 2$, $\exists C_{\alpha\beta} \geqslant 0$,
$\forall\, x,y, |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \Phi(x,y)| \leqslant C_{\alpha\beta}$.

(A.3) $\exists\, C > 0$, $\forall x,y$, $|\det \partial^2_{y,y} \Phi(x,y)| > C$.

Remarque

L'hypothèse (A.3) implique que : $\forall x \in U$, l'application $y \to \partial_y \Phi(x,y)$ est un difféomorphisme global sur $\mathbb{R}^n$.

En particulier, il existe un unique point critique $y(x)$ solution de l'équation $\partial_y \Phi(x,y) = 0$.

Notations

$\| a(.,.,\nu) \|_p = \sup \{ \| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta a(x,y,\nu) \|$, $|\alpha|+|\beta| \leqslant p \}$.

$Q(x) = \partial^2_{y,y} \Phi(x,y)_{|y=y(x)}$.

Notons k l'inverse du difféomorphisme de Morse pour x fixé dans U, W étant un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} k : U \times W \to \mathbb{R}^n \\ \\ (x,z) \to k(x,z) \end{cases}$$

$R(x,z,\partial_z)$ = opérateur différentiel $\frac{i}{2} < Q^{-1}(x)\, \partial_z , \partial_z >$.

$\hat{a}(x,z,\nu) = a(x,k(x,z),\nu).|\, D_z k(x,z)|$.

Définition

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$A_1(x) = A(x) - \partial_x \varphi(x)$$

Remarques

(i) En utilisant les lemmes 3.1, 3.2, il est facile de voir que A_1 satisfait l'hypothèse (H_2).

(ii) D'autre part, en utilisant le lemme 4.3 (ii), ainsi que les difféomorphismes des lemmes 3.1 et 3.2, on obtient aisément : pour x dans un voisinage de x_0 et y dans un voisinage de y_0, $A_1 \equiv 0$ dans un voisinage de $\omega_{t,x,y}$.

On peut en déduire

Lemme 4.4

Pour x *dans un voisinage de* x_0, y *dans un voisinage de* y_0,

$\forall \alpha, \beta$ *multi-indices*, $\forall N \geqslant 0$, $\exists\ C_{\alpha\beta N} > 0$ *tels que :*

$$| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta (U_h^{A_1}(t)(x,y) - U_h^0(t)(x,y) | \leqslant C_{\alpha\beta N} h^N$$

Démonstration : D'après le théorème 2, nous avons le développement asymptotique suivant :

$$U_h^{A_1}(t)(x,y) = (2i\pi ht)^{-n/2} \Sigma\ h^j d_j^{A_1}(t,x,y) \cdot \exp\left(\frac{i}{h} \hat{S}_{A_1}(t,x,y)\right)$$

Or, il est facile de voir que les applications $d_j^{A_1}(t,x,y)$ et $\hat{S}_{A_1}(t,x,y)$ sont des fonctions locales de la 1-forme A_1 le long des orbitres $\omega_{t,x,y}$: il suffit pour cela de suivre la construction des fonctions b_j^A et du difféomorphisme de Morse. D'après la remarque (ii), $A_1 \equiv 0$ sur un voisinage de $\omega_{t,x,y}$. D'où le résultat. ■

On peut maintenant établir :

Démonstration du théorème 3 : D'après le théorème 2, $U_h^{A_1}(t)(x,y)$ et $U_h^A(t)(x,y) \in B^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y)$.

D'autre part, comme $dA = dA_1$, on a :

$$U_h^A(t)(x,y) = e^{i/h\,\varphi(x)} U_h^{A_1}(t)(x,y)\, e^{-i/h\,\varphi(y)}$$

$$= e^{i/h\,[\varphi(x) - \varphi(y)]}\ U_h^{A_1}(t)(x,y)$$

On conclut en utilisant le lemme 4.3 (i) et le lemme 4.4 . ■

Lemme 4.3

Pour x dans un voisinage de x_0 , y dans un voisinage de y_0 et $\tau \in [0,T]$, on a :

(i) $\varphi(z(\tau)) - \varphi(y) = c_A(t,z(\tau),y)$

(ii) $\partial_x \varphi(z(\tau)) = A(z(\tau))$

Démonstration : (i) découle immédiatement du théorème de Stokes et de l'hypothèse (H_4). En ce qui concerne (ii), en utilisant la relation (3.4) et le lemme 4.2, on obtient :

$$L_A(s,\tau,z(\tau),q_A(t,x,y)) = L_0(s,\tau,z(\tau),q_0(t,x,y)) + A(z(s)).\,\partial_s z(s)$$

Donc, de l'égalité :

$$S_A(\tau,z(\tau),q_A(t,x,y)) = y.q_A(t,x,y) + \int_0^\tau L_A(s,\tau,z(\tau),q_A(t,x,y))\,ds$$

on tire :

$$(4.3) \qquad S_A(\tau,z(\tau),q_A(t,x,y)) = S_0(\tau,z(\tau),q_0(t,x,y)) + c_A(\tau,z(\tau),y) - y.A(y)$$

où $c_A(\tau,z(\tau),y)$ représente la circulation du potentiel A le long de l'orbite classique $s \to z(s)$, $0 \leqslant s \leqslant \tau$.

Différentions (4.3) par rapport à x :

$$\partial_x S_A.\partial_x z + \partial_q S_A.\partial_x q_A = \partial_x S_0.\partial_x z + \partial_q S_0.\partial_x q_0 + \partial_x c_A.\partial_x z$$

Or, d'après le lemme 4.2 et (3.5) , on a :

$$\partial_q S_A(\tau,z(\tau),q_A(t,x,y)) = \partial_q S_0(\tau,z(\tau),q_0(t,x,y)) = y$$

$$\partial_x q_A(t,x,y) = \partial_x q_0(t,x,y)$$

Par conséquent :

$$\partial_x S_A.\partial_x z = \partial_x S_0.\partial_x z + \partial_x c_A.\partial_x z$$

D'autre part, en utilisant le lemme 3.2, ainsi que (3.3), on obtient facilement pour $\tau \neq 0$:

$$\frac{t}{\tau}\partial_x z(\tau) = 1 + 0\ (|\tau|)$$

Donc, $\partial_x z(\tau)$ est inversible pour τ petit non nul et on en déduit :

$$\partial_x S_A(\tau,z(\tau),q_A(t,x,y)) = \partial_x S_0(\tau,z(\tau),q_0(t,x,y)) + \partial_x c_A(\tau,z(\tau),y)$$

(résultat prolongé par continuité en 0).

Toujours d'après (3.5) :

$$\partial_x S_A(\tau,z(\tau),q_A(t,x,y)) = p_A(\tau,z(\tau),q_A(t,x,y)).$$

$$\partial_x S_0(\tau,z(\tau),q_0(t,x,y)) = p_0(\tau,z(\tau),q_0(t,x,y)).$$

De plus, $p_A(\tau,z(\tau),q_A(t,x,y)) = p_0(\tau,z(\tau),q_0(t,x,y)) + A(x)$, ([AR]). Par conséquent, on en déduit :

$\partial_x c_A(\tau,z(\tau),y) = A(z(\tau))$. Or, $c_A(\tau,z(\tau),y) = \varphi(z(\tau)) - \varphi(y)$ d'après (i). D'où le résultat. ■

Effectuons à présent la transformation de jauge annoncée :

mettant en lumière l'effet Aharonov-Bohm ([NI], [PE-TO]): nous montrons que le champ magnétique engendre une perturbation de phase exp $(\frac{i}{h} c_A(t,x,y))$, même dans une zone où il est identiquement nul, où $c_A(t,x,y)$ représente la circulation du potentiel A le long de l'unique orbite classique $\omega_{t,x,y}$ reliant y au temps 0, au point x au temps t.

Rappelons que les notions de circulation du potentiel et de flux du champ sont intimement liées grâce au théorème de Stokes.

Ce résultat est obtenu en effectuant une transformation de jauge sur le potentiel magnétique.

Dans toute la suite de ce paragraphe, on suppose vérifiée, pour $t \in]0,T]$ fixé, l'hypothèse (H_4) :

$$\forall \tau \in [0,t],\ x_A(\tau, y_0, q_A(t,x_0,y_0)) \in \mathcal{O} \text{ et } dA = 0 \text{ sur } \mathcal{O}.$$

Nous allons comparer les noyaux intégraux $U_h^A(t)(x,y)$ et $U_h^O(t)(x,y)$ pour x proche de x_0 et y proche de y_0, à l'aide du théorème 2.

Cela nous amène à étudier :

Lemme 4.2

Pour x *dans un voisinage de* x_0 , y *dans un voisinage de* y_0 , *on a :*

$$\forall\ \tau \in\ [0,t],\quad x_A(\tau,y,q_A(t,x,y)) = x_0(\tau,y,q_0(t,x,y)) \equiv z(\tau).$$

En particulier, $q_A(t,x,y) - A(y) = q_0(t,x,y)$.

Démonstration : C'est évident en utilisant l'équation d'Euler-Lagrange (cf. [AR])

$$d_t(\partial_v L_A) - \partial_x L_A = 0 \quad \text{où } L_A \text{ est le Lagrangien du système}$$

et les dépendances C^∞ des fonctions : $\tau \to x_A(\tau,..,.)$ et $\tau \to x_0(\tau,..,.)$ qui sont deux chemins vérifiant cette équation avec B = 0. On conclut par unicité. ■

Explicitons maintenant la transformation de jauge :

Définition

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$\varphi(x) = c_A(t,x,y_0) \quad \text{avec les notations du théorème 3.}$$

On obtient alors :

Notations

$g_A(t,x,y,.)$ l'inverse du difféomorphisme de Morse.

$\hat{b}_j^A(t,x,y,z) = b_j^A(t,x,g_A(t,x,y,z)/t)\ .\ |D_z g_A(t,x,y,z)|$.

L_A = opérateur $\frac{i}{2} < t\partial_y q_A(t,x,y).\partial_z\ ,\ \partial_z >$

sign $[\ (t\partial_y q_A(t,x,y))^{-1}]$ = signature de $(t\partial_y q_A(t,x,y))^{-1}$

$$\hat{S}_A(t,x,y) = \int_0^t \frac{1}{4}\partial_\tau\, \hat{x}_A(\tau)^2 + A(\hat{x}_A(\tau)).\,\partial_\tau\, \hat{x}_A(\tau) - V(\hat{x}_A(\tau))\, d\tau$$

où $\hat{x}_A(\tau) = x_A(\tau,y,q_A(t,x,y))$.

$$F_A(t,x,y) = |\text{ dét } t\partial_y q_A(t,x,y)|^{+1/2} \exp\left(\tfrac{i}{4}\pi \text{ sign } [\ (t\partial_y q_A(t,x,y))^{-1}]\right).$$

Remarque 3

D'après le lemme 3.2 :

$$(4.2) \qquad \| t\partial_y q_A(t,x,y) + \tfrac{1}{2} I \| = O(|t|)$$

On en déduit que : sign $[\ (t\partial_y q_A(t,x,y))^{-1}] = -n$ pour $t>0$.

On a donc la relation plus simple : $F_A(t,x,y) = i^{-n/2} |\text{ dét } t\partial_y q_A(t,x,y)|^{+1/2}$.

On peut maintenant démontrer le théorème 2. On considère le cas $t>0$ pour simplifier.

Démonstration du théorème 2 : On part de la relation : $b^A(t,x,q/t,h) = e_N^A(t,x,q/t,h) + [b^A(t,x,q/t,h) - e_N^A(t,x,q/t,h)]$. D'après le théorème 1 et le théorème A.1 de l'appendice 1, le noyau associé au dernier terme est un $O\ (\ t(th)^{N+1-n/2}\ )$ dans $B^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y)$. On applique ensuite de nouveau le théorème A.1 pour obtenir le développement asymptotique du noyau distribution associé à $e_N^A(t,x,q/t,h)$, (cette amplitude vérifie l'hypothèse (A.1) de l'appendice 1 d'après les estimations (3.7)). Les applications d_j^A du théorème 2 sont données par :

$$d_0^A(t,x,y) = |\text{ dét } t\partial_y q_A(t,x,y)\ |^{+1/2}$$

et pour $j \geqslant 1$:

$$d_j^A(t,x,y) = |\text{ dét } t\partial_y q_A(t,x,y)\ |^{+1/2}\ .\ [\ b_j^A(t,x,q_A(t,x,y)) + \sum_{k+\ell=j,\ k\geqslant 1} t^k\, \Gamma(k)^{-1} L_A^k(\hat{b}_\ell^A(t,x,y,z))_{|z=0}].$$

Les estimations se vérifient aisément grâce à la proposition 3.4 . ■

4.4 Phénomène de Aharonov-Bohm

Comme corollaire du théorème 2, nous allons faire apparaitre mathématiquement la règle de Feynman,

D'où : $|\det \partial_q y_A(t,x,q)| \geq 1$ pour T assez petit. Par conséquent, la condition (A.3) est vérifiée pour $t \neq 0$. ■

Remarque 1

En partant de la relation $q_A(t,x,y_A(t,x,q)) = q$ que l'on différentie par rapport à q, on obtient :

$$\partial_y q_A(t,x,y_A(t,x,q)).\, \partial_q y_A(t,x,q) = I$$

En particulier, pour $q = q_c$:

$$(4.1) \qquad \partial^2_{q,q} \Phi_A(t,x,y,tq_A(t,x,y)) = [\, t\partial_y q_A(t,x,y)]^{-1} \equiv Q_A(t,x,y).$$

Remarque 2

On se ramène au cas où Φ_A est une forme quadratique via un difféomorphisme de Morse de manière bien connue. Nous allons la rappeler de façon à expliciter sa dépendance par rapport au champ magnétique, dépendance qu'il faudra étudier dans le théorème 3.

La formule de Taylor avec reste intégral nous donne :

$$\Phi_A(t,x,y,q) - \Phi_A(t,x,y,tq_A(t,x,y)) = \tfrac{1}{2}\, {}^T(q - tq_A(t,x,y)).Q_A(t,x,y,q).(q - tq_A(t,x,y))$$

où $\quad Q_A(t,x,y,q) = \int_0^1 2(1-s)^2 \partial^2_{q,q} \Phi_A(t,x,y,tq_A(t,x,y) + s(q - tq_A(t,x,y)))\, ds$

et $\quad Q_A(t,x,y,tq_A(t,x,y)) = Q_A(t,x,y).$

Soit $\mathcal{S}_n$ le groupe des matrices (n,n) symétriques.

Notons $\quad G_A(t,x,y) :\ Q_A(t,x,y)^{-1}\mathcal{S}_n \ \to \mathcal{S}_n$

$$R \ \to \ {}^T R\, Q_A(t,x,y)\, R$$

On vérifie facilement que $G_A(t,x,y)$ est un difféomorphisme au voisinage de l'identité. L'application $h_A(t,x,y,q) = G_A(t,x,y)^{-1}.Q_A(t,x,y,q).(q - tq_A(t,x,y))$ est un difféomorphisme (de Morse) sur un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$, pour q dans un voisinage de $q_A(t,x,y)$.

Remarquons que ce difféomorphisme est contrôlé uniformément en t, d'après les lemmes 3.1, 3.2 et la proposition 3.3 .

4.3 développement asymptotique du propagateur

Le théorème de la phase stationnaire (cf. Appendice 1) nous amène à poser :

$$U_h^A(t)\,(x,y) = (2\pi h)^{-n} \int e^{i/h\,(S_A(t,x,q)-y.q)}\, b^A(t,x,q,h)\,dq$$

Notre but est de déterminer un développement asymptotique de ce noyau distribution, appelé propagateur, à l'aide d'un théorème de phase stationnaire global, donné dans l'appendice 1 et d'en déduire des résultats de régularité sur ce noyau. Nous retrouvons ainsi des résultats proches de ceux de Yajima avec une méthode différente.

On commence par remarquer que si l'on utilise directement le théorème de phase stationnaire de l'appendice 1 en variable q, il apparait alors une singularité en t = 0.

Pour éviter ce problème, on modifie légèrement l'écriture du noyau $U_h^A(t)\,(x,y)$ à l'aide d'un changement de variables sur l'impulsion q :

$$U_h^A(t)\,(x,y) = (2\pi th)^{-n} \int e^{i/th\ \ (tS_A(t,x,q/t)-y.q)}\, b^A(t,x,q/t,h)\,dq$$

et $\nu \equiv th$ sera considéré comme paramètre semi-classique.

4.2 Etude de la phase $\Phi_A(t,x,y,q) = tS_A(t,x,q/t) - y.q$

Lemme 4.1

$\forall t \in [-T,T]$, $t \neq 0$, $\forall x, y$, l'application $q \to \Phi_A(t,x,y,q)$ vérifie les conditions (A.2), (A.3) de l'appendice 1, et admet $q_c = tq_A(t,x,y)$ comme unique point critique.

Démonstration : Déterminons d'abord les points critiques. On doit résoudre : $\partial_q \Phi_A(t,x,y,q) = 0$, i.e $y_A(t,x,q/t) - y = 0$. D'après le lemme 3.2, l'unique solution est $q_c = tq_A(t,x,y)$.

La condition (A.2) découle immédiatement de la proposition 3.3 et des estimations du lemme 3.1 . En ce qui concerne (A.3),

estimons $\partial^2_{q,q}\Phi_A(t,x,y,q) = \frac{1}{t}\partial_q y_A(t,x,q/t)$, d'après (3.5). On part de la relation :

$x_A(t,y_A(t,x,q),q) = x$ que l'on dérive par rapport à q.

D'où : $\partial_y x_A(t,y_A(t,x,q),q).\partial_q y_A(t,x,q) + \partial_q x_A(t,y_A(t,x,q),q) = 0.$

i.e $\partial_q y_A(t,x,q) = -[\partial_y x_A(t,y_A(t,x,q),q)]^{-1}.\ \partial_q x_A(t,y_A(t,x,q),q).$

En particulier :

$$\frac{1}{t}\partial_q y_A(t,x,q/t) = -[\partial_y x_A(t,y_A(t,x,q/t),q/t)]^{-1}.\ \frac{1}{t}\partial_q x_A(t,y_A(t,x,q/t),q/t).$$

En utilisant les estimations (3.2) et (3.3), on en déduit que :

$$|\tfrac{1}{t}\partial_q y_A(t,x,q/t)| = [1+O(|t|)]^{-1}\,|t|^{-1}\,[|2t|+O(t^2)]$$

Précisons l'opérateur $V^N_{k,h}(t)$:

Lemme 3.8

$\forall\ t \in [-T,T],\ \forall N \geqslant 0,\ \forall k \geqslant 0$, *il existe une amplitude* $c_{N,k}(t)$ *telle que* :

$$V^N_{k,h}(t) = J_h(S_A, c_{N,k}(t))$$

et vérifiant : $\forall\ \alpha,\beta$ *multi-indices,* $\exists\ C_{\alpha\beta N} > 0$ *indépendante de* k, $\forall\ x,q \in \mathbb{R}^n$,

$$| \partial^\alpha_x \partial^\beta_q c_{N,k}(t,x,q,h) | \leqslant (C_{\alpha\beta N})^{k+1} h^{Nk} |t|^{k(N+1)} \Gamma(k)^{-1}.$$

Démonstration : On utilise les estimations précédentes et la formule de produit des O.F.I . On se reportera à l'Appendice 2, théorèmes B.1 et B.2 . ■

On peut maintenant conclure ce paragraphe :

Démonstration du théorème 1 : D'après le lemme 3.8 on peut définir

$$(3.15) \qquad b^A_N(t,x,q,h) = \sum_{k\geqslant 1} c_{N,k}(t,x,q,h) \in B^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_q),$$

et on a :

$$(3.16) \qquad J_h(S_A, b^A_N) = \Sigma_{k\geqslant 1} V^N_{k,h}(t)$$

Par conséquent, $U^A_h(t) = J_h(S_A, b^A)$ où la fonction b^Aest donnée par: $b^A = e^A_N + b^A_N$. En ce qui concerne les estimations demandées, de la relation

$$b^A_N = (e^A_M - e^A_N) + b^A_M \quad , \qquad M \geqslant N+1$$

on déduit d'après (3.7), (3.15) et le lemme 3.8 :

$$| \partial^\alpha_x \partial^\beta_q b^A_N (t,x,q,h) | \leqslant C_{\alpha\beta N} h^{N+1} |t|^{N+2+|\beta|} + C_{\alpha\beta M} h^M |t|^{M+1}$$

D'où le résultat, en prenant $M = N+1+|\beta|$. ■

IV DEVELOPPEMENT SEMI-CLASSIQUE DU PROPAGATEUR

4.1 introduction

Nous avons montré dans le paragraphe précédent que : $U^A_h(t) = J_h(S_A, b^A)$.

Par conséquent, le noyau distribution de $U^A_h(t)$ s'écrit formellement :

Lemme 3.5 : ([RO] Th. IV.30)

$$U_h^A(t) = U_h^N(t) - \frac{i}{h}\int_0^t U_h^A(t-\tau)\, R_h^N(\tau)\, d\tau\ ,\ \forall |t| \leqslant T.$$

En particulier, le lemme 3.5, (3.13) et l'inégalité $\| U_h^N(t) - U_h^{N-1}(t)\| \leqslant C_N |t|^{N+1} h^N$, nous donnent une première estimation :

$$(3.14) \qquad \| U_h^A(t) - U_h^{N-1}(t)\| \leqslant C_N |t|^{N+1} h^N$$

Nous allons maintenant affiner ces résultats en montrant que $U_h^A(t)$, $t \in [-T,T]$, est en fait un opérateur Fourier intégral, de phase $S_A(t,x,q)$, d'amplitude $b_A(t,x,q,h)$, C^∞ en les variables (x,q) et vérifiant : $|\partial_x^\alpha \partial_q^\beta [b_A(t,x,q,h) - e_{N-1}^A(t,x,q,h)]| \leqslant C_{\alpha\beta N}\, h^N\, |t|^{N+1+|\beta|}$

Notre méthode consiste à itérer autant de fois que nécessaire la formule de Duhamel.

Notons $S_h^N(t) = -\frac{i}{h} R_h^N(t)$ de sorte que la formule de Duhamel s'écrit :

$$\begin{aligned} U_h^A(t) &= U_h^N(t) + \int_0^t U_h^A(t-\tau)\, S_h^N(\tau)\, d\tau \\ &\equiv U_h^N(t) + (U_h^A * S_h^N)(t) \qquad \text{par définition} \\ &= U_h^N(t) + (U_h^N * S_h^N)(t) + \ldots\ldots + \underbrace{(U_h^N * S_h^N * \ldots * S_h^N)(t)}_{(k-1 \text{ fois})} + \\ &\quad \underbrace{(U_h^A * S_h^N * \ldots * S_h^N)(t)}_{(k \text{ fois})} \end{aligned}$$

Commençons d'abord par l'estimation triviale suivante, où Γ est la fonction Gamma usuelle :

Lemme 3.6

$\forall\, t \in [-T,T]$, $\forall\, N \geqslant 0$, $\exists\, C_N > 0$, $\forall\, k \geqslant 0$ *on a :*

$$\| \underbrace{(U_h^A * S_h^N * \ldots * S_h^N)(t)}_{(k\text{-fois})} \| \leqslant (C_N)^k\, h^{Nk}\, |t|^{k(N+1)}\, \Gamma(k)^{-1}.$$

Démonstration : par récurrence, découle immédiatement de (3.13). ■

On posera $V_{k,h}^N(t) = \underbrace{(U_h^N * S_h^N * \ldots * S_h^N)}_{(k \text{ fois})}(t)$. On déduit du lemme 3.6 que l'on a :

Corollaire 3.7

$\forall\, t \in [-T,T]$, *on a :* $U_h^A(t) = U_h^N(t) + \sum_{k \geqslant 1} V_{k,h}^N(t)$ *dans* $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$.

sont solutions des équations de transport (T_j) *et vérifient les estimations :*

$\forall\ j \geqslant 0,\ \forall\ \alpha,\beta,\ \exists\ C_{\alpha\beta} > 0$ *tel que : pour tout* $(t,x,q) \in [-T,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

$$(3.7) \qquad |\partial_x^\alpha \partial_q^\beta (b_j^A(t,x,q) - \delta_{j0})| \leqslant C_{\alpha\beta} |t|^{j+|\beta|+1}$$

Démonstration : Traitons brièvement la résolution de b_0. Posons $u(t) = b_0(t,x_A(t,y,q),q)$. Par conséquent, (T_0) se traduit, en utilisant (3.5), par l'équation sur u :

$$u'(t) = -(\Delta_x S_A(t,x_A(t,y,q),q) - \mathrm{div}\, A\,(x_A(t,y,q)))\, u(t)$$

D'où le résultat. La résolution de (T_j) se traite de la même façon, à l'aide de la méthode de variation de la constante. Enfin, les estimations des fonctions b_j s'obtiennent par récurrence sur j, en utilisant les lemmes 3.1, 3.2 et la proposition 3.3. ■

3.3 Approximation du groupe unitaire

Notons $e_N^A(t,x,q,h) = \Sigma_{0 \leqslant j \leqslant N} h^j b_j^A(t,x,q)$.

Grâce aux estimations (3.6) et (3.7) on peut définir l' O.F.I global , (cf. [RO]) :

$$(3.8) \qquad U_h^N(t) = J_h(S_A, e_N^A(t,x,q,h))$$

On définit ensuite l'opérateur :

$$(3.9) \qquad R_h^N(t) = (ih\,\partial_t - P_{A,V}(h))\, U_h^N(t)$$

En utilisant les propositions 3.3 et 3.4, il est aisé de montrer que :

$$(3.10) \qquad R_h^N(t) = J_h(S_A, r_N^A(t,x,q,h))$$

où l'amplitude r_N^A est donnée par :

$$(3.11) \qquad r_N^A(t,x,q,h) = [ih\,\partial_t b_N^A + 2i\,(\partial_x S_A - A).\partial_x b_N^A + (\Delta_x S_A - \mathrm{div}\, A).b_{N-1}^A + \Delta_x b_{N-1}^A].\, h^{N+1} + [(\Delta_x S_A - \mathrm{div}\, A).b_N^A + \Delta_x b_N^A].\, h^{N+2}$$

et vérifie les estimations suivantes :

$$(3.12) \qquad |\partial_x^\alpha \partial_q^\beta r_N^A(t,x,q,h)| \leqslant C_{\alpha\beta N} h^{N+1} |t|^N$$

d'après la proposition 3.4 et les équations de transport (T_j).

Par conséquent :

$$(3.13) \qquad \| R_N(t) \| \leqslant C_N h^{N+1} |t|^N \quad \text{dans } \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n)).$$

d'après les théorèmes de continuité des O.F.I, (cf [RO]).

De la formule de Duhamel, on déduit une relation entre $U_h^A(t)$, $U_h^N(t)$ et $R_h^N(t)$.

Enfin, les estimations sur les caractéristiques s'obtiennent par récurrence sur $|\alpha|+|\beta|$ de manière classique, (cf. [NI], [YA]). ■

Nous pouvons en déduire :

Proposition 3.3

$\exists T > 0$ *assez petit tel que l'équation* $(H-J)$ *admet une unique solution* $S_A \in C^\infty([-T,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$*donnée*

$$(3.4) \qquad S_A(t,x,q) = y_A(t,x,q).q + \int_0^t L_A(\tau,t,x,q)\,d\tau$$

où : $L_A(\tau,t,x,q) = 1/4\ (\partial_\tau z_A(\tau))^2 + A(z_A(\tau)).\partial_\tau z_A(\tau) - V(z_A(\tau))$ *est le Lagrangien du système sur le chemin* $\omega : \tau \to z_A(\tau) = x_A(\tau, y_A(t,x,q),q)$.

La fonction S_A *vérifie les relations :*

$$(3.5) \qquad \begin{cases} \partial_x S_A(t,x,q) = p_A(t,y_A(t,x,q),q) \\ \\ \partial_q S_A(t,x,q) = y_A(t,x,q) \end{cases}$$

et les estimations suivantes :

$\forall\ \alpha,\beta$ *multi-indices,* $\exists\ C_{\alpha\beta} > 0,\ \forall\ |t| \leqslant T,\ \forall\ x,q \in \mathbb{R}^n$

$$(3.6) \qquad |\partial_x^\alpha \partial_q^\beta S_A(t,x,q)| \leqslant C_{\alpha\beta}\ \lambda(x,q)^{(2-|\alpha|-|\beta|)_+}$$

Démonstration : (3.4) et (3.5) découlent de la théorie classique de Hamilton-Jacobi, (3.6) des estimations des lemmes 3.1, 3.2 et de (3.5). On pourra consulter [NI], [RO] pour plus de détails. ■

3.2 Résolution des équations de transport

Proposition 3.4

Les fonctions b_j^A *définies par récurrence par :*

$$(i) \qquad b_0^A(t,x,q) = \exp\left(-\int_0^t [\Delta_x S_A(\tau,z_A(\tau),q) - \mathrm{div}\, A\,(z_A(\tau))]\,d\tau\right.$$

$$(ii) \qquad b_{j+1}^A(t,x,q) = b_0^A(t,x,q)\ .\int_0^t [\ i\Delta_x b_j^A(\tau,z_A(\tau),q)/\ b_0^A(\tau,z_A(\tau),q)]\,d\tau$$

On a les lemmes suivants :

Lemme 3.1

Il existe $T>0$ *assez petit tel que pour tout* $t\in[-T,T]$, *pour tous* $y,q\in\mathbb{R}^n$, *l'application :* $y \to x_A(t,y,q)$ *est un difféomorphisme global* C^∞, *d'inverse* $y_A(t,x,q)$

De plus, nous avons les estimations suivantes :

$\forall\ \alpha,\beta$ *multi-indices,* $|\alpha|+|\beta|\geqslant 1$, $\exists\ C_{\alpha\beta}>0$, $\forall\ t\in[-T,T]$, $\forall x,y,q\in\mathbb{R}^n$

(i) $\quad |\partial_y^\alpha\partial_q^\beta\,(x_A(t,y,q)-y-2tq)| \leqslant C_{\alpha\beta}|t|^{|\beta|+1}$

(ii) $\quad |\partial_y^\alpha\partial_q^\beta\,(p_A(t,y,q)-q)| \leqslant C_{\alpha\beta}|t|^{|\beta|}$

(iii) $\quad |\partial_x^\alpha\partial_q^\beta\,(y_A(t,x,q)-x+2tq)| \leqslant C_{\alpha\beta}|t|^{|\beta|+1}$

Lemme 3.2

Il existe $T>0$ *assez petit tel que pour tout* $t\in[-T,T]$, $t\neq 0$, *l'application :* $q \to x_A(t,y,q)$ *est un difféomorphisme global* C^∞, *d'inverse* $q_A(t,x,y)$.

De plus, nous avons les estimations suivantes :

$\forall\ \alpha,\beta$ *multi-indices,* $|\alpha|+|\beta|\geqslant 1$, $\exists\, C_{\alpha\beta}>0$, $\forall t\in[-T,T]$, $t\neq 0$, $\forall x,y\in\mathbb{R}^n$

(iv) $\quad |\,\partial_x^\alpha\partial_y^\beta\,(2t\,q_A(t,x,y)-(x-y))| \leqslant C_{\alpha\beta}|t|$

Démonstration des lemmes 3.1 et 3.2 : Nous faisons simplement une esquisse de démonstration et nous renvoyons le lecteur à [NI] et [YA] pour de plus amples détails. Introduisons le formalisme Newtonien, qui est mieux adapté :

$$z_A(t,y,\eta)=x_A(t,y,\tfrac{1}{2}\eta+A(y)) \quad , \quad v_A(t,y,\eta)=\partial_t z_A(t,y,\eta)$$

Désignons par ν une des variables y_j ou η_j. En utilisant l'équation aux variations, il vient facilement :

$$\partial_\nu v_A(t)=\partial_\nu\eta+2\int_0^t [\partial_x B\,(z_A(\tau)).v_A(\tau)-\partial^2_{x,x}V\,(z_A(\tau))].\partial_\nu y$$
$$+2\int_0^t \{\,[\int_\sigma^t \partial_x B\,(z_A(\tau)).v_A(\tau)-\partial^2_{x,x}V\,(z_A(\tau))\,d\tau]+B(z_A(\sigma))\}\,\partial_\nu v_A(\sigma)\,d\sigma$$

On utilise ensuite l'estimation suivante démontrée dans [YA] et utilisant l'hypothèse (H_3) :

$\forall\alpha\in\mathbb{N}^n$, $\exists C_\alpha>0$, $\exists T>0$ assez petit, $\forall y,\eta\in\mathbb{R}^n$: $\displaystyle\int_{-T}^{T}|\partial_x^\alpha B\,(z_A(\tau))|\,.\,|v_A(\tau)|\,d\tau \leqslant C_\alpha$

pour en déduire :

(3.2) $\quad |\,\partial_y x_A(t,y,q)-1\,| \leqslant C\,|t|$

(3.3) $\quad |\,\partial_q x_A(t,y,q)-2t\,| \leqslant C\,t^2$

ce qui permet d'établir les difféomorphismes demandés.

Remarques

(i) Le théorème 3 montre que le noyau du propagateur est influencé par B même au voisinage de points où $B \equiv 0$. Ce résultat permet d'expliquer le phénomème quantique d'Aharonov–Bohm sur le propagateur. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [BA], [NI], [PE–TO], ...

(ii) Nous pouvons déduire également du théorème 3, que cet effet quantique reste indécelable modulo $O(h^{\infty})$ sur les valeurs moyennes d'observables $Tr(\theta.f(P_{A,V}(h))$.
Plus précisément, $Tr(\theta.f(P_{A,V}(h)) = Tr(\theta.f(P_{0,V}(h)) + O(h^{\infty})$ où θ est une fonction de localisation d'espace en dehors du champ magnétique et f une fonction de localisation d'énergie convenable, (cf. [NI]).
Ce résultat est à rapprocher d'un travail de ([B–G–O]), qui ont démontré que les coefficients du développement asymptotique de la trace de l'opérateur de la chaleur sont des fonctions locales de la 2–forme dA.
En fait, nous pensons que l'effet de Aharonov–Bohm sur ces valeurs moyennes d'observables, est d'ordre exponentiellement petit, comme nous le suggère les travaux de B. Helffer ([HE]) qui a démontré que la différence entre les états fondamentaux des Hamiltoniens $P_{A,V}(h)$ et $P_{0,V}(h)$ est égale à un $O(\sqrt{h}\, e^{-\alpha/h})$, $\alpha > 0$, pour A et V convenables.

III DEMONSTRATION DU THEOREME 1

La méthode d'approximation B.K.W consiste à chercher $U_h^A(t)$ sous la forme d'un O.F.I :

$$(3.1) \qquad U_h^A(t)\Psi(x) = (2\pi h)^{-n} \iint e^{i/h\,(S(t,x,q)-y.q)} \Sigma_{j\geq 0}\, h^j\, b_j(t,x,q)\, \Psi(y)\, dy\, dq$$

En remplaçant dans l'équation de Schrödinger (1.2), nous obtenons, pour t, x et q fixés, une relation dans l'anneau des séries formelles $\mathbb{C}[[h]]$; en identifiant les coefficients, il est aisé de voir que la fonction S doit satisfaire (H–J), et les fonctions b_j doivent vérifier (T_j).

Nous commençons par déterminer les fonctions S et b_j , puis nous donnerons un sens mathématique à toutes ces manipulations formelles.

3.1 Résolution de l'équation de Hamilton–Jacobi

La théorie de Hamilton–Jacobi classique consiste à intégrer l'équation sur les courbes caractéristiques.
Notons $\exp(t H_a)(y,q) = (x_A(t,y,q)\ ,\ p_A(t,y,q))$ le flot classique associé à $a(x,\xi)$.

Théorème 2

$\forall\ t \in [-T,T],\ t \neq 0,\ U_h^A(t)$ *est un opérateur intégral de noyau* $U_h^A(t)(x,y) \in B^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y)$, *et admettant un développement asymptotique :*

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta [U_h^A(t)(x,y) - (2i\pi ht)^{-n/2} (\Sigma_{0 \leqslant j \leqslant N} h^j d_j^A(t,x,y)).\exp(i/h\ \hat{S}_A(t,x,y))]| \leqslant C_{\alpha\beta N} . (h.|t|)^{N+1-n/2}$$

où :

(1) $\hat{S}_A(t,x,y) = \int_0^t 1/4\ \partial_\tau \hat{x}_A(\tau)^2 + A(\hat{x}_A(\tau)).\partial_\tau \hat{x}_A(\tau) - V(\hat{x}_A(\tau))\ d\tau,$

$\omega_{t,x,y} : \tau \to \hat{x}_A(\tau)$ *étant l'unique orbite classique reliant y au temps 0, à x au temps t.*

(2) d_j^A *sont des fonctions des applications* b_j^A, *précisées dans la suite de l'article vérifiant les estimations :* $|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta (d_j^A(t,x,y) - \delta_{j0})| \leqslant C_{\alpha\beta j} . |t|^{j+1}$

Ce théorème fait apparaitre la règle de Feynman sous la forme suivante :

Théorème 3

Soient $t \in]0,T]$ *fixé, (resp.*$t \in [-T,0[$, x_0 , $y_0 \in \mathbb{R}^n$ *fixés. On fait l'hypothèse suivante :*

Soit $\mathcal{O}$ *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *tel que :*

(H_4) $\begin{cases} (i) & L'unique\ orbite\ classique\ reliant\ y_0\ au\ temps\ 0\ et\ x_0\ au\ temps\ t\ appartient\ à\ \mathcal{O}. \\ (ii) & B \equiv 0\ sur\ \mathcal{O}. \end{cases}$

Notons $c_A(t,x,y) = \int_0^t A(\hat{x}_A(\tau)).\partial_\tau \hat{x}_A(\tau)\ d\tau$ *la circulation du potentiel A le long de la trajectoire classique* $\omega_{t,x,y}$.

Alors : pour x dans un voisinage de x_0 *et y dans un voisinage de* y_0, *on a :*

$\forall\ \alpha,\beta$ *multi-indices,* $\forall N \geqslant 0, \exists C_{\alpha\beta N} > 0$ *telle que :*

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta [U_h^A(t)(x,y) - \exp(\tfrac{i}{h} c_A(t,x,y))\ U_h^0(t)(x,y)]| \leqslant C_{\alpha\beta N}\ h^N$$

Notations

$a(x,\xi) = (\xi - A(x))^2 + V(x)$ est le Hamiltonien classique du système.

$B^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_q)$ désigne l'ensemble des fonctions bornées sur $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_q$ ainsi que leurs dérivées.

Sous les hypothèses (H_1) – (H_3), on obtient les résultats suivants :

Théorème 1

Il existe $T > 0$ *assez petit, il existe une fonction* $b^A(t,x,q,h) \in B^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_q)$ *pour* $|t| \leqslant T$, *il existe une fonction* $S_A(t,x,q) \in C^\infty([-T,T] \times \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_q)$ *telles que :*

(i) $U_h^A(t)$ *est un opérateur Fourier intégral global* $J_h(S_A, b^A)$, *de la forme :*

$$U_h^A(t)\,\Psi(x) = (2\pi h)^{-n} \iint e^{i/h\,(S_A(t,x,q)-y.q)}\, b^A(t,x,q,h)\,\Psi(y)\,dy\,dq$$

(ii) *L'amplitude* b^A *admet un développement asymptotique dans* $B^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_q)$

$$|\partial_x^\alpha \partial_q^\beta [b^A(t,x,q,h) - \Sigma_{0 \leqslant j \leqslant N}\ h^j\, b_j^A(t,x,q)]| \leqslant C_{\alpha\beta N}\, |t|^{N+2+|\beta|}\, h^{N+1}$$

où :

(1) *La phase* S_A *est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi :*

$$(H-J) \qquad \begin{cases} \partial_t S_A(t,x,q) + a(x, \partial_x S_A(t,x,q)) = 0 \\ \\ S_A(0,x,q) = x.q \end{cases}$$

et vérifie les estimations suivantes :

$\forall\ \alpha,\beta$ *multi-indices,* $\exists\ C_{\alpha\beta} > 0$, $\forall\ |t| \leqslant T$, $\forall\ x,q \in \mathbb{R}^n$

$$|\partial_x^\alpha \partial_q^\beta\, S_A(t,x,q)| \leqslant C_{\alpha\beta}\, \lambda(x,q)^{(2-|\alpha|-|\beta|)_+} \qquad \text{où } \lambda(x,q) = (1+x^2+q^2)^{1/2}$$

(2) *Les fonctions* b_j^A *satisfont les équations de transport suivantes :*

$$(T_j) \qquad \begin{cases} \partial_t b_j^A(t,x,q) = -2(\partial_x S_A(t,x,q) - A(x)).\partial_x b_j^A(t,x,q) \\ \qquad\qquad -(\Delta_x S_A(t,x,q) - \mathrm{div}\, A(x))\ .\ b_j^A(t,x,q) + i\ \Delta_x b_{j-1}^A(t,x,q) \\ b_0^A(t,x,q) = 1\ ,\ b_{j+1}^A(t,x,q) = 0 \end{cases}$$

avec $b_{-1}^A \equiv 0$ *par convention et vérifient les estimations suivantes :*

$\forall\ j \geqslant 0$, $\forall\ \alpha,\beta$, $\exists\ C_{\alpha\beta j} > 0$ *tel que : pour tout* $(t,x,q) \in [-T,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$|\partial_x^\alpha \partial_q^\beta\, (b_j^A(t,x,q) - \delta_{j0})| \leqslant C_{\alpha\beta j}\, |t|^{\,j+|\beta|+1}$$

Nous obtenons ce résultat en suivant la dépendance de solutions d'équations de Hamilton – Jacobi, par rapport au potentiel magnétique A, dans une zone où le champ B est nul.

Remerciements

L'auteur tient à exprimer sa reconnaissance à Didier Robert pour les nombreuses discussions fructueuses concernant ce papier, ainsi qu'au referee de cet article pour lui avoir signalé une erreur dans la première version de ce travail.

II HYPOTHESES - RESULTATS

Dans toute la suite de cet article, nous supposerons que :

(H_1) $\quad V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$\forall\ \alpha$ multi – indice, $|\alpha| \geqslant 2$, $\exists C_\alpha > 0$ tel que $|\partial_x^\alpha V(x)| \leqslant C_\alpha$

(H_2) $\quad A \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$\forall \alpha$ multi – indice, $|\alpha| \geqslant 1$, $\exists C_\alpha > 0$ tel que $|\partial_x^\alpha A(x)| \leqslant C_\alpha$

(H_3) $\quad \exists \rho > 0,\ \forall \alpha$ multi – indice, $|\alpha| \geqslant 1$, $\exists C_\alpha > 0$ tel que $|\partial_x^\alpha B(x)| \leqslant C_\alpha < x >^{-1-\rho}$

où $< x > = (1+x^2)^{1/2}$.

Remarques

L'hypothèse (H_3) a été introduite par Yajima ([YA]), et permet d'établir des difféomorphismes globaux nécessaires pour la résolution de l'équation de Hamilton – Jacobi.

On peut aussi remarquer que les champs magnétiques B constants vérifient (H_2) – (H_3) , lorsqu'on leur associe le potentiel magnétique : $A(x) = B.x$.

Enfin, notons que les hypothèses (H_1) et (H_2) entrainent que $P_{A,V}(h)$ est essentiellement autoadjoint, ce qui nous permet de définir $U_h^A(t)$ par le calcul fonctionnel usuel.

de solution $\Psi(t,x) = U_h^A(t)\,\Psi(x)$ où :

$$(1.3) \qquad U_h^A(t) = e^{-it/h\,P_{A,V}(h)}$$

D. Fujiwara ([FU]$_2$), pour le cas A = 0, puis K. Yajima ([YA]), ont abordé ce problème : en utilisant une méthode due à Feynman, ils ont obtenu un développement asymptotique en puissances de h du noyau intégral (ou propagateur) du groupe unitaire donné par (1.3).

Nous proposons ici une autre approche : en utilisant une méthode B. K. W, nous écrivons $U_h^A(t)$, à temps petit, sous la forme d'un opérateur Fourier intégral global (O.F.I), (cf. [RO]), dont la phase S vérifie une équation de Hamilton-Jacobi, et dont l'amplitude admet un développement asymptotique semi-classique. Pour cela, il est nécessaire d'adapter les techniques de Kumanogo ([KU]), pour le produit des O.P.D, au produit des O.F.I .

Dans une seconde étape, à l'aide d'un théorème de phase stationnaire global, nous réécrivons $U_h^A(t)$ sous la forme d'un opérateur intégral à noyau C^∞ admettant un développement asymptotique semi-classique.

Nous retrouvons ainsi des résultats analogues à ceux de [YA]; notons que Yajima les obtient en écrivant directement le groupe unitaire comme un opérateur intégral, et en résolvant les équations de transport associées. Il obtient ainsi un développement asymptotique du noyau intégral, puis il réécrit cet opérateur intégral sous la forme d'un O.F.I .
L'approche B.K.W présente un avantage : elle permet de déterminer un développement asymptotique de l'amplitude de cet O.F.I beaucoup plus simple que celui de [YA]. De plus, l'expression des difféomorphismes liés aux caractéristiques est plus naturelle lorsque l'on travaille directement dans l'espace des phases.

Comme application, nous donnons une explication d'un phénomène physique, dénommé *effet de Aharonov-Bohm*, ([AH-BO], [PE-TO], [RU], ...), phénomène qui a été notre motivation principale. Brièvement, l'effet de Aharonov-Bohm est un phénomène d'interférences dues à l'existence d'un potentiel magnétique dans une zone où le champ magnétique est identiquement nul. Cet effet apparait ici comme une perturbation dans la phase du noyau intégral, due à la circulation du potentiel magnétique le long d'orbites classiques, résultat que les physiciens connaissent empiriquement sous le nom de *règle de Feynman* ,(cf. [BA], par exemple).

Approximation semi-classique du propagateur d'un système électromagnétique et phénomène de Aharonov-Bohm

François Nicoleau
Département de Mathématiques
U.R.A CNRS n° 758 - Université de Nantes
2, rue de la Houssinière 44072 Nantes Cedex 03 FRANCE

Abstract
We study an electromagnetic physical system : with the classical B.K.W method, we show that the unitary group of this system is a Fourier integral operator; then, we write this group as an integral operator with smooth kernel. In particular, we establish, in this case, the well-known Feynman's rule, wich explains the Aharonov-Bohm effect.

I INTRODUCTION

Cet article est consacré à l'étude semi-classique du groupe unitaire d'un opérateur Hamiltonien quantique de Schrödinger, donné par l'opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$:

$$(1.1) \qquad P_{A,V}(h) = \Sigma\, (hD_j - A_j(x))^2 + V(x)$$

décrivant l'interaction d'une particule avec un champ électrique ∇V et un champ magnétique B, où :

$D_j = -i\,\partial_{x_j}$

$A = \Sigma\, A_j\, dx_j$ est la 1-forme potentiel magnétique définissant la 2-forme champ magnétique $B = dA$.

h est la constante de Planck, paramètre semi-classique.

Ce système électromagnétique est régi par l'équation de Schrödinger :

$$(1.2) \qquad \begin{cases} ih\,\partial_t\, \Psi(t,x) = P_{A,V}(h)\, \Psi(t,x) \\ \\ \Psi(0,x) = \Psi(x) \end{cases}$$