Matrices de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger en présence d'un champ magnétique. Phénomène de Aharonov-Bohm Annales I.H.P. Vol. 61, n° 3, 1994.

Erratum

François Nicoleau

Laboratoire Jean Leray
UMR CNRS-UN 6629
Département de Mathématiques
2, rue de la Houssinière BP 92208
F-44322 Nantes cedex 03
e-mail : nicoleau@math.univ-nantes.fr

Dans un preprint récent [4], Roux-Yafaev ont obtenu des résultats sur la matrice de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique qui sont contradictoires avec ceux obtenus dans notre papier [2]. En effet, Roux-Yafaev montrent que, contrairement à l'énoncé du Théorème 2 de [2], la matrice de diffusion n'est pas forcément une perturbation compacte de l'identité et que son spectre peut recouvrir le cercle unité complexe.

Nous nous proposons de montrer dans cet erratum que l'approche utilisée dans [2], basée sur des constructions à la Isozaki-Kitada, permet d'obtenir ce résultat. L'erreur de [2] provenait d'un mauvais choix de microlocalisation. Dans ce qui suit, nous reprenons toutes les notations de [2], ainsi que la numérotation des équations qui s'y trouvent.

Afin d'établir une formule de représentation des matrices de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel magnétique vérifiant la jauge de transversalité, à décroissance en $O(< x >^{-\rho})$ à l'infini, $\rho \in]\frac{1}{2}, 1[$, et d'un potentiel électrique à courte portée, il est nécessaire de construire deux opérateurs Fourier intégraux (O.F.I) J_j, $j = 1, 2$, avec une phase et une amplitude convenablement microlocalisées. Nous reprenons la microlocalisation donnée dans [1].

Définition des O.F.I.

Pour $j=1,2$, soient $\sigma_0^j,\ \sigma_1^j \in]0,1[$, $\gamma>0$ assez petit, tels que :

$$-1<\sigma_0^1-\gamma<\sigma_0^1<\sigma_1^1<\sigma_1^1+\gamma<0<\sigma_0^2-\gamma<\sigma_0^2<\sigma_1^2<\sigma_1^2+\gamma<1\ .$$

$$\Psi_j^+ \in C^\infty([-1,1]),\ \Psi_j^+(\tau)=1 \text{ si } \tau\in[\sigma_1^j,1] \text{ et } \Psi_j^+(\tau)=0 \text{ si } \tau\in[-1,\frac{\sigma_0^j+\sigma_1^j}{2}].$$

$$\Psi_j^- \in C^\infty([-1,1]),\ \Psi_j^-(\tau)=1 \text{ si } \tau\in[-1,\sigma_0^j] \text{ et } \Psi_j^-(\tau)=0 \text{ si } \tau\in[\frac{\sigma_0^j+\sigma_1^j}{2},1].$$

$$\chi_{1,j}\in C^\infty([-1,1]),\ \chi_{1,j}(\tau)=1 \text{ si } \tau\in[-1,\sigma_0^j-\gamma] \text{ et } \chi_{1,j}(\tau)=0 \text{ si } \tau\geq\sigma_0^j.$$

$$\chi_{2,j}\in C^\infty([-1,1]),\ \chi_{2,j}(\tau)=1 \text{ si } \tau\in[\sigma_1^j+\gamma,1] \text{ et } \chi_{2,j}(\tau)=0 \text{ si } \tau\leq\sigma_1^j.$$

La phase $\Phi_j(x,\xi)$ de l' O.F.I J_j est donnée par (eq. (2.13), [2]) où Ψ_+, (resp. Ψ_-), est remplacé par Ψ_j^+, (resp. Ψ_j^-). L'amplitude $d_j(x,\xi)$ de l' O.F.I J_j est donnée par (eq. (2.21), [2]) où χ_1, (resp. χ_2), est remplacé par $\chi_{1,j}$, (resp. $\chi_{2,j}$).

On a alors la formule de représentation pour les matrices de diffusion :

$$S(\lambda)-1=-2i\pi\Gamma_0(\lambda)J_1^*T_2\Gamma_0^*(\lambda)+2i\pi\Gamma_0(\lambda)T_1^*R(\lambda+i0)T_2\Gamma_0^*(\lambda):=B(\lambda)+C(\lambda). \tag{1.1}$$

De la même façon que dans [1], $C(\lambda)$ est un opérateur à noyau C^∞ sur $S^{n-1}\times S^{n-1}$. Un calcul facile nous montre ensuite que $J_1^*T_2$ est un opérateur pseudodifférentiel dans la classe $S^{-1}_{\rho,1-\rho}$ de Hörmander, de symbole principal pour $|\, x\,|\gg 1$ et $|\,\xi\,|> d>0$:

$$a(x,\xi)=-2i\ \left(e^{i\int_{-\infty}^{+\infty}\ A(x+s\xi).\xi\ ds}\ \xi.\partial_x(\chi_{1,2}(\cos(x,\xi)))+\xi.\partial_x(\chi_{2,2}(\cos(x,\xi)))\right)\ . \tag{1.2}$$

Puisque $Supp\ a\subset\{\ (x,\xi)\ :\ \cos(x,\xi)\in[\sigma_0^2-\gamma,\sigma_0^2]\cup[\sigma_1^2,\sigma_1^2+\gamma]\ \}$, on en déduit que $B(\lambda)$ est un opérateur pseudodifférentiel sur la sphère dans la classe $S^0_{\rho,1-\rho}$ et de symbole principal pour $|\,y\,|\gg 1$, $|\,\omega\,|=1$ et $<y,\omega>=0$, (Prop. 2.11, [5]) :

$$\begin{aligned}
b(\omega,y;\lambda) &= -\frac{i}{2\sqrt{\lambda}}\int_{-\infty}^{+\infty}\ a(t\omega+\lambda^{-\frac12}y,\sqrt{\lambda}\omega)\ dt \\
&= -\ e^{i\int_{-\infty}^{+\infty}\ A(\lambda^{-\frac12}y+s\omega).\omega\ ds}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dt}\left(\chi_{1,2}\ (\frac{t}{\sqrt{t^2+\lambda^{-1}\,|\,y\,|^2}}\ )\right)\ dt \\
&\quad -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dt}\left(\chi_{2,2}\ (\frac{t}{\sqrt{t^2+\lambda^{-1}\,|\,y\,|^2}}\ )\right)\ dt \\
&= e^{i\int_{-\infty}^{+\infty}\ A(\lambda^{-\frac12}y+s\omega).\omega\ ds}-1.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Par conséquent, modulo un opérateur compact, $S(\lambda)$ est un opérateur pseudodifférentiel sur la sphère de symbole principal :

$$s(\omega, y; \lambda) = e^{i \int_{-\infty}^{+\infty} \ A(\lambda^{-\frac{1}{2}} y + s\omega).\omega \ ds} \ . \tag{1.4}$$

En utilisant (1.4), Roux et Yafaev obtiennent en particulier le résultat suivant :

Proposition 1 *([4], Prop. 6.13)*
On suppose que pour un point (y, ω) tel que $\mid \omega \mid = 1$, $< y, \omega >= 0$,

$$\limsup_{\tau \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \ A(\tau y + s\omega).\omega \ ds \ = \infty \ \text{ou} \ \liminf_{\tau \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \ A(\tau y + s\omega).\omega \ ds \ = -\infty \ .$$

Alors : le spectre de $S(\lambda)$ recouvre le cercle unité.

Remarque
Dans le cas où le champ magnétique B est à support compact (effet Aharonov-Bohm), les hypothèses de la proposition précédente ne sont pas satisfaites. Par exemple, dans le cas de la dimension 2, il est facile de voir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ A(y + s\omega).\omega \ ds \ = \ \pm \ \frac{\Phi}{2} \ , \tag{1.5}$$

suivant que le repère $(\hat{y}, \omega)$ est direct ou indirect, Φ étant le flux total du champ magnétique, $\hat{y} = \frac{y}{|y|}$. Utilisant (1.4) , Roux et Yafaev montrent que ([3], Corollary 0.2) :

$$\sigma_{ess}(S(\lambda)) = \{e^{-i\frac{\Phi}{2}}, e^{i\frac{\Phi}{2}}\} \ .$$

References

[1] H. Isozaki et H. Kitada : "Scattering matrices for two-body Schrödinger operators", Sci. Papers College Arts and Sci., Univ. Tokyo, 35, 81-107, (1985).

[2] F. Nicoleau, "Matrices de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger en présence d'un champ magnétique. Phénomène de Aharonov-Bohm, Annales I.H.P. Vol 61, 3, 329-346, (1994).

[3] P. Roux et D. Yafaev, "On the mathematical theory of the Aharonov-Bohm effect", mp-arc 02-165, (2002).

[4] P. Roux et D. Yafaev, "The scattering matrix for the Schrödinger operator with a long-range electromagnetic potential", mp-arc 02-364, (2002).

[5] D. Yafaev, "The scattering amplitude for the Schrödinger equation with a long-range potential", Comm. Math. Phys. 191, 183-218, (1998).