Habilitation à Diriger des Recherches.

François NICOLEAU

UNE ETUDE DE DIFFUSION INVERSE POUR L'EQUATION DE SCHRODINGER AVEC CHAMP ELECTROMAGNETIQUE.

TABLE DES MATIERES

1 Introduction.

Les travaux de recherche regroupés dans ce document sont essentiellement basés sur l'étude mathématique d'un système physique électromagnétique, le fil directeur étant le *phénomène de Aharonov-Bohm.* Cet effet est expliqué en détail dans le paragraphe 3.1. Brièvement, le phénomène de Aharonov-Bohm est un phénomène d'interférences dues à l'existence d'un champ magnétique, même dans une zone où celui-ci est identiquement nul.

On commence par faire l'analyse semiclassique du propagateur (ou noyau intégral du groupe unitaire du système) à temps petit. Cette étude permet de faire apparaître l'effet Aharonov-Bohm comme une perturbation de phase du propagateur, due à la circulation du potentiel magnétique le long d'orbites classiques situées en dehors du champ magnétique.

Nous passerons ensuite à l'étude de la diffusion quantique d'un système électromagnétique. Nous verrons que la situation est totalement différente du cas potentiel électrostatique seul : un champ magnétique même à support compact peut engendrer un potentiel magnétique ne dépassant la décroissance coulombienne, et donc a priori à longue portée. Nous démontrerons l'existence et la complétude des opérateurs d'ondes (déjà obtenues par Loss et Thaller) à l'aide d'une méthode stationnaire. Cette nouvelle approche permet l'étude des matrices de diffusion grâce à une formule de représentation adaptée. Nous verrons que le spectre essentiel des matrices de diffusion $S(\lambda)$ peut recouvrir le cercle unité, comme l'ont démontré Roux et Yafaev. Cette situation est complètement nouvelle : dans le cas d'une perturbation électrostatique à courte portée, $S(\lambda)$ est une perturbation compacte de l'identité.

Nous ferons ensuite l'étude du problème de diffusion inverse à l'aide d'une approche stationnaire. Il s'agit d'une méthode nouvelle, simple et robuste, proche d'une idée due à Isozaki et Kitada. L'idée est d'introduire dans la définition des opérateurs d'onde un modificateur, type opérateur Fourier intégral, qui permet d'obtenir très facilement l'asymptotique à haute énergie de l'opérateur de diffusion. Notons que cette approche permet également de traiter le cas longue portée. Nous généralisons ainsi les résultats obtenus par Enss et Weder dans le cas d'opérateur de Schrödinger avec potentiel électrostatique seul, à l'aide d'une méthode dépendant du temps.

Le problème de diffusion directe et inverse dans le cas d'opérateurs de Schrödinger avec obstacle convexe est étudié dans le but de modéliser le phénomène de Aharonov-Bohm. En dimension supérieure à 3, l'opérateur de diffusion caractérise le potentiel électrique et le champ magnétique. En dimension 2, par contre, nous donnons une condition nécessaire d'obstruction liée à une quantification du flux magnétique.

Nous étudions ensuite un problème de diffusion inverse dans le cas où l'opérateur de diffusion est localisé près d'une énergie fixée. Nous montrons que l'approche stationnaire déjà utilisée est tout à fait appropriée pour traiter ce problème (et même le cas longue portée) en effectuant un changement d'échelle et en utilisant des paquets d'onde soigneusement choisis. Nous retrouvons ainsi l'asymptotique complète du potentiel électrostatique à l'infini. Ces résultats sont proches de ceux obtenus par Joshi et Sa Barreto utilisant des techniques assez sophistiquées à la Melrose-Zworski [Me-Zw], d'opérateur Fourier intégraux et de distributions Lagrangiennes.

Nous étudions ensuite un problème de diffusion inverse pour des Hamiltoniens avec un champ électrique constant (effet Stark) et un potentiel à courte portée générique. Nous montrons qu'en dimension supérieure ou égale à trois, l'opérateur de diffusion caractérise le potentiel. Ce résultat est obtenu à l'aide de la méthode dépendant du temps de Enss-Weder et généralise un théorème dû à Weder qui supposait une décroissance plus forte du potentiel électrostatique.

Enfin, nous étudions un problème de diffusion inverse pour un Hamiltonien libre avec potentiel répulsif. Nous montrons que sous des hypothèses convenables de décroissance du potentiel électrostatique, la perturbation V est uniquement déterminée par l'asymptotique à haute énergie de l'opérateur de diffusion. Ce résultat est obtenu grâce à la méthode dépendant du temps de Enss-Weder.

2 Travaux auxquels se rapporte ce texte.

[1] F. Nicoleau, *Théorie de la diffusion quantique pour l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique*, Thèse de doctorat de l'Université de Rennes 1, (1991).

[2] F. Nicoleau - D. Robert, *Théorie de la diffusion pour des perturbations à longue et courte portée du champ magnétique*, Annales de la Faculté de Toulouse, Vol. XII, (2), (1991).

[3] F. Nicoleau, *Approximation semi-classique du propagateur d'un système électromagnétique et phénomène de Aharonov-Bohm*, Helv. Phys. Acta, Vol. 65, (1992).

[4] F. Nicoleau, *Matrice de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique*, Journées Equations aux Dérivées Partielles, Saint Jean de Monts, Ecole Polytechnique, (1993).

[5] F. Nicoleau, *Matrice de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger en présence d'un champ magnétique. Phénomène de Aharonov-Bohm*, Annales Institut Henri Poincaré, Vol. 61, (3), (1994). Erratum, Annales Institut Henri Poincaré Vol. 4, (2003).

[6] F. Nicoleau, *A stationary approach to inverse scattering for Schrödinger operators with first order perturbation*, Communications in PDE, Vol. 22, (3-4), (1997).

[7] F. Nicoleau, *An inverse scattering problem with the Aharonov-Bohm effect*, Journal of Mathematical Physics, Issue 8, pp. 5223-5237, (2000).

[8] F. Nicoleau, *An inverse scattering problem in a semiclassical process*, Rapport de recherche Université de Nantes 00/04-3, (2000).

[9] F. Nicoleau, *Inverse scattering for Stark Hamiltonians with short-range potentials*, Asymptotic Analysis, 35 (3-4), pp. 349-359, (2003).

[10] F. Nicoleau, *A constructive procedure to recover asymptotics of short-range or long-range potentials*, Journal of Differential Equations, 205, pp. 354-364, (2004).

[11] F. Nicoleau, *Inverse scattering for a Schrödinger operator with a repulsive potential*, Rapport de recherche Université de Nantes 04/05-1, (2004).
To appear in Acta Mathematica Sinica, Springer, (2004).

3 Le phénomène de Aharonov-Bohm.

3.1 L'expérience physique.

Cette section sert d'introduction à notre travail de recherche. Nous y présentons empiriquement les motivations de notre étude mathématique : *l'effet Aharonov-Bohm*, [Ah-Bo]. On pourra également se reférer au survey [Pe-To] .

Rappelons brièvement de quoi il s'agit : on considère deux faisceaux de particules chargées circulant autour d'un solénoïde parcouru par un courant. Celui-ci engendre un champ magnétique B, nul en dehors du solénoïde. Suivant les valeurs du flux magnétique, on constate des phénomènes d'interférences que la mécanique classique ne sait expliquer : les particules restant en dehors du support du champ magnétique B, la force de Lorentz $F = mv \wedge B$ est nulle. La mécanique quantique permet de comprendre ce phénomène : le champ magnétique B engendre dans $I\!R^3$ un potentiel magnétique A qui est lié à B par la relation $B = dA$. Ce potentiel est non nul, même en dehors du support de B, car d'après le théorème de Stokes, on a :

$$\Phi \ = \ \int\int_S B \ dS = \int_\omega A \ dl \ , \tag{3.1}$$

Φ étant le flux du champ magnétique à travers une surface S portée par le chemin fermé ω. Le formalisme quantique utilise, dans la définition du Hamiltonien du système, le potentiel magnétique A au lieu du champ magnétique B, (cf. section suivante).

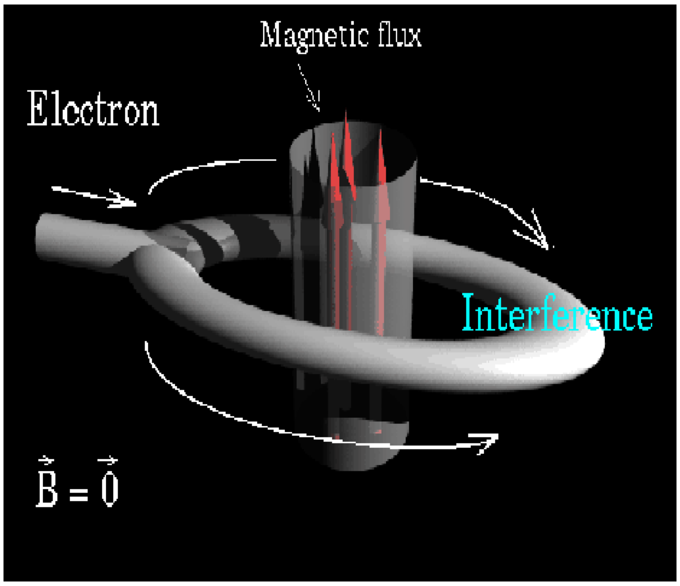

Figure 1 : Le phénomène de Aharonov-Bohm.

3.2 Approximation semiclassique du propagateur.

Cette section est consacrée à l'étude semiclassique d'un opérateur Hamiltonien quantique de Schrödinger, donné par l'opérateur différentiel sur $I\!R^n, n \geq 2$:

$$P_{A,V}(h) = \sum_{j=1}^{n} (hD_j - A_j(x))^2 + V(x) \ , \tag{3.2}$$

décrivant l'interaction d'une particule chargée avec un champ électrique ∇V et un champ magnétique B où :

h est la constante de Planck (paramètre semiclassique destiné à tendre vers 0).
$D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$.
$A \ = \sum_{j=1}^{n} A_j \ dx_j$ est la 1-forme potentiel magnétique.
$B \ = dA$ est la 2-forme champ magnétique identifiée à la matrice antisymétrique $(b_{j,k})$, $b_{j,k}(x) = \partial_{x_j} A_k(x) - \partial_{x_k} A_j(x)$, dans la base canonique de $I\!R^n$.

Ce système électromagnétique est régi par l'équation de Schrödinger :

$$ih \ \partial_t \Psi(t,x) = P_{A,V}(h) \ \Psi(t,x) \quad , \quad \Psi(0,x) = \Psi(x) \ , \tag{3.3}$$

de solution $\Psi(t,x) = U_h^A(t)\Psi(x)$ où :

$$U_h^A(t) = e^{-i\frac{t}{h}P_{A,V}(h)} \tag{3.4}$$

est le groupe unitaire du système.

Fujiwara [Fu], pour le cas $A = 0$, puis Yajima [Yaj], ont abordé ce problème : en utilisant une méthode due à Feynman, ils ont obtenu un développement asymptotique en puissances de h du noyau intégral (ou propagateur) du groupe unitaire donné par (3.4). Enfin, signalons que récemment, une étude similaire a été proposée par Bily-Robert, à temps fixé, en utilisant la notion d'états cohérents [Bi-Ro].

Nous proposons ici une autre approche : en utilisant une méthode BKW, nous écrivons le groupe unitaire, à temps petit, sous la forme d'un opérateur Fourier intégral global (O.F.I) (cf. [Ro] par exemple), dont la phase S vérifie une équation de Hamilton-Jacobi, et dont l'amplitude admet un développement asymptotique semiclassique.

Dans une seconde étape, à l'aide d'un théorème de phase stationnaire global, nous réécrivons ce groupe unitaire sous la forme d'un opérateur à noyau C^∞ admettant également un développement semiclassique. Nous retrouvons ainsi des résultats analogues à ceux de Yajima : notons que Yajima les obtient en écrivant directement le groupe unitaire comme un opérateur intégral, et en résolvant les équations de transport associées. Il obtient ainsi un développement asymptotique du noyau intégral, puis il réécrit cet opérateur intégral sous la forme d'un O.F.I.

L'approche BKW présente un avantage : elle permet de déterminer un développement asymptotique de l'amplitude de cet O.F.I beaucoup plus simple que celui de Yajima. De plus, l'expression des difféomorphismes liés aux caractéristiques est plus naturelle lorsque l'on travaille directement dans l'espace des phases.

Comme application, nous donnons une explication du phénomène de Aharonov-Bohm. Cet effet apparaît ici comme une perturbation dans la phase du propagateur, due à la circulation du potentiel magnétique le long d'orbites classiques, résultat que les physiciens connaissent empiriquement sous le nom de règle de Feynman. Nous obtenons ce résultat en suivant la dépendance de solutions d'équations de Hamilton-Jacobi, par rapport au champ magnétique A, dans une zone où le champ B est nul.

Enfin, notons que le phénomène de Aharonov-Bohm a été étudié d'un point de vue spectral par Helffer [He].

Dans la suite de cette section, nous supposerons que $A, V \in C^\infty(I\!R^n)$ et vérifient les estimations de décroissance :

(H_1) $$\forall \alpha,\ \mid \alpha \mid \geq 2,\ \exists\ C_\alpha > 0,\ \mid \partial_x^\alpha V(x) \mid \leq C_\alpha\ ,$$

(H_2) $$\forall \alpha,\ \mid \alpha \mid \geq 1,\ \exists\ C_\alpha > 0,\ \mid \partial_x^\alpha A(x) \mid \leq C_\alpha\ ,$$

(H_3) $$\exists \rho > 0,\ \forall \alpha,\ \mid \alpha \mid \geq 1,\ \exists\ C_\alpha > 0,\ \mid \partial_x^\alpha B(x) \mid \leq C_\alpha\ < x >^{-1-\rho},$$

où l'on a posé $< x >= (1+ \mid x \mid^2)^{\frac{1}{2}}$.

L'hypothèse (H_3) a été introduite par Yajima [Yaj], et permet d'établir des difféomorphismes globaux (à temps petit) nécessaires pour la résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi. Par exemple, les champs magnétiques B constants vérifient (H_2) et (H_3) lorsque l'on leur associe le potentiel magnétique $A(x) = B \cdot x$. Enfin, notons que sous nos hypothèses, $P_{A,V}(h)$ est essentiellement autoadjoint ce qui nous permet de définir le groupe unitaire (3.4) par le calcul fonctionnel usuel.

Notations.
$a(x,\xi) = (\xi - A(x))^2 + V(x)$ est le Hamiltonien classique du système.

$B^\infty(I\!R_x^n \times I\!R_q^n)$ désigne l'ensemble des fonctions bornées sur $I\!R_x^n \times I\!R_q^n$ ainsi que leurs dérivées.

Sous les hypothèses $(H_1) - (H_3)$, on a les résultats suivants démontrés dans [Ni1], [Ni2] :

Théorème 1 $[Ni2]$
Il existe $T > 0$ assez petit, il existe une fonction $b^A(t,x,q,h) \in B^\infty(I\!R^n_x \times I\!R^n_q)$ pour $| t | \leq T$, il existe une fonction $S_A(t,x,q) \in C^\infty([-T,T] \times I\!R^n_x \times I\!R^n_q)$ telles que :

(i) $U_h^A(t)$ est un opérateur Fourier intégral global $J_h(S_A, b^A)$, de la forme :

$$U_h^A(t)\ \psi(x) \ = \ (2\pi h)^{-n} \ \int\int e^{\frac{i}{h}(S_A(t,x,q)-y\cdot q)}\ b^A(t,x,q,h)\ \Psi(y)\ dy\ dq. \tag{3.5}$$

(ii)L'amplitude b^A admet un développement asymptotique dans $B^\infty(I\!R^n_x \times I\!R^n_q)$:

$$| \ \partial_x^\alpha \partial_q^\beta\ [b^A(t,x,q,h) - \sum_{j=0}^{N}\ h^j\ b_j^A(t,x,q)] \ | \leq \ C_{\alpha\beta N}\ | \ t\ |^{N+2+|\beta|}\ \ h^{N+1}, \tag{3.6}$$

où

(1) La phase S_A est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$\partial_t S_A(t,x,q) + a(x, \partial_x S_A(t,x,q)) = 0 \quad , \quad S_A(0,x,q) = x\cdot q\ . \tag{3.7}$$

(2) Les fonctions b_j^A satisfont les équations de transport suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_t b_j^A(t,x,q) &= -2\left(\partial_x S_A(t,x,q) - A(x)\right)\cdot \partial_x b_j^A(t,x,q) \\ &- \left(\Delta_x S_A(t,x,q) - div\ A(x)\right)\right)\cdot b_j^A(t,x,q) + i\Delta_x b_{j-1}^A(t,x,q), \end{aligned} \tag{3.8}$$

avec

$$b_0^A(0,x,q) = 1,\ \ b_{j+1}^A(0,x,q) = 0 \ \text{ et } b_{-1}^A \equiv 0 \ \text{ par convention.}$$

Pour plus de détails sur les estimations de la phase et de l'amplitude, on pourra se reporter à [Ni2]. Maintenant, via un théorème de phase stationnaire, on peut réécrire, pour $t \neq 0$, le groupe unitaire sous la forme d'un opérateur à noyau intégral :

Théorème 2 $[Ni2]$
Pour $0 <| t | \leq T$, $U_h^A(t)$ est un opérateur intégral de noyau $U_h^A(t)(x,y) \in B^\infty(I\!R^n_x \times I\!R^n_y)$ et admettant un développement asymptotique :

$$| \ \partial_x^\alpha \partial_q^\beta \left(U_h^A(t)(x,y) - (2i\pi h t)^{-\frac{n}{2}}\ \sum_{j=0}^{N}\ h^j\ d_j^A(t,x,y)\ e^{\frac{i}{h}\ \Phi_A(t,x,y)} \right) | \leq \ C_{\alpha\beta N}\ (h\ |\ t\ |)^{N+1-\frac{n}{2}}$$

où

$$\Phi_A(t,x,y) = \int_0^t \left(\frac{1}{4} \dot{z}_A(s)^2 + A(z_A(s))\cdot \dot{z}_A(s) - V(z_A(s)) \right) ds, \tag{3.9}$$

$\omega_{t,x,y} : s \to z_A(s)$ étant l'unique orbite classique reliant y au temps 0, à x au temps t.

Ce dernier résultat nous montre que le noyau du propagateur est influencé par le champ magnétique B, via une perturbation de phase liée à la circulation du potentiel magnétique, même au voisinage de points où le champ est identiquement nul. Cela permet d'expliquer le phénomène de Aharonov-Bohm détaillé dans la section précédente.

Théorème 3 $[Ni2]$
Soit $0 <| t |\leq T$, x_0, $y_0 \in I\!R^n$ *fixés. On suppose qu'il existe un ouvert* Ω *de* $I\!R^n$ *tel que :*
(i) L'unique orbite classique reliant y_0 *au temps* 0 *et* x_0 *au temps* t *reste dans* Ω.
(ii) Le champ magnétique B *est identiquement nul sur* Ω.

On note $c_A(t,x,y)$ *la circulation du potentiel magnétique* A *le long de la trajectoire* $\omega_{t,x,y}$ *:*

$$c_A(t,x,y) = \int_0^t \ A(z_A(s)) \cdot \dot{z}_A(s) \ ds. \tag{3.10}$$

Alors, pour (x,y) *dans un voisinage de* $(x_0, \ y_0)$*, on a :* $\forall \alpha, \beta, N$, $\exists C_{\alpha\beta N} > 0$ *t.q*

$$| \ \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \left(U_h(t)(x,y) - e^{\frac{i}{h} \ c_A(t,x,y)} U_h^0(t)(x,y) \right) | \leq \ C_{\alpha\beta N} \ h^N. \tag{3.11}$$

On retrouve ainsi rigoureusement à temps petit un résultat que les physiciens connaissent sous le nom de *règle de Feynman.*

4 Diffusion quantique en présence d'un champ électro-magnétique.

4.1 Etude spectrale des Hamiltoniens.

Dans cette section, nous étudions la paire de Hamiltoniens $(H_{A,V}, \ -\Delta)$ dans un processus de diffusion quantique; $H_{A,V}$ étant l'opérateur Hamiltonien quantique de Schrödinger décrivant l'interaction d'une particule chargée avec un champ électrique ∇V et un champ magnétique B, donné par l'opérateur differéntiel sur $I\!R^n, n \geq 2$:

$$H_{A,V} = \sum_{j=1}^n (D_j - A_j(x))^2 + V(x) \ , \tag{4.1}$$

où l'on a utilisé les mêmes notations que (3.2).

Nous supposerons que $A, V \in C^\infty(I\!R^n)$ et vérifient les estimations de décroissance :

$$| \ \partial_x^\alpha V(x) \ | \leq C_\alpha < x >^{-\delta - |\alpha|} \qquad , \qquad \delta > 0 \ . \tag{H_1}$$

$$| \ \partial_x^\alpha A(x) \ | \leq C_\alpha < x >^{-\rho - |\alpha|} \qquad , \qquad \rho > 0 \ . \tag{H_2}$$

Le théorème de perturbation de Weyl nous dit que $H_{A,V}$ est essentiellement autoadjoint sur $C_0^\infty(I\!R^n)$, de domaine $H^2(I\!R^n)$ de spectre essentiel $\sigma_{ess}(H_{A,V}) = [0,+\infty[$. De plus, Cotta-Ramusino, Krüger et Schrader ont démontré l'absence de valeurs propres plongées dans le spectre essentiel, [C-K-S].

On peut ensuite affiner ces résultats spectraux en utilisant la théorie de Mourre [Mo]: il est facile de vérifier que le générateur des dilatations $\mathcal{D} = \frac{1}{2}(x \cdot D + D \cdot x)$ est un opérateur conjugué au sens de Mourre pour $H_{A,V}$. Cela nous permet de montrer que le spectre absolument continu $\sigma_{ac}(H_{A,V}) = [0,+\infty[$ et on a le principe d'absorption limite : $\forall \lambda > 0$,

$$(4.2) \qquad R(\lambda \pm i0) \ = \ s - \lim_{\epsilon \downarrow 0} \ (H_{A,V} - (\lambda \pm i\epsilon))^{-1}$$

existe comme opérateur borné de $L_s^2(I\!R^n)$ à valeurs dans $L_{-s}^2(I\!R^n)$, pour $s > \frac{1}{2}$.

Enfin, nous avons les estimations de propagation :

$$(4.3) \qquad \forall \chi \in C_0^\infty(I\!R^+) \ \forall s > s' > \frac{1}{2} \ , \ ||< x >^{-s} e^{-itH_{A,V}} \chi(H_{A,V}) < x >^{-s}||= O(< t >^{-s'}),$$

qui seront utiles pour définir les opérateurs d'onde dans la section suivante.

4.2 Les opérateurs d'onde.

Lorsque $\delta, \rho > 1$, on montre facilement, grâce aux estimations de propagation (4.3), que $H_{A,V}$ est une perturbation à courte portée de l'opérateur de Laplace $H_0 = -\Delta$ et que les opérateurs d'onde de Moeller

$$(4.4) \qquad W^\pm \ = \ s - \lim_{t \to \pm\infty} \ e^{itH_{A,V}} \ e^{-itH_0}$$

existent et sont complets, (i.e $\mathcal{I}m \ W^\pm = \mathcal{H}_{ac}(H_{A,V})$, espace spectral absolument continu).

Cependant, il faut noter que ce résultat n'est pas satisfaisant. En vertu de la formule de Stokes, un champ magnétique à support compact dans $I\!R^2$ et de flux total non nul engendre un potentiel qui ne peut pas décroître plus vite qu'un potentiel de Coulomb. Donc, a priori, un tel potentiel est à longue portée. Néanmoins, intuitivement, de tels champs magnétiques sont à courte portée, comme l'ont démontré Loss-Thaller [Lo-Th], via une condition de jauge appropriée :

Théorème 4 $[Lo - Th]$
On suppose vérifiées les hypothèses (H_1), (H_2) avec $\delta > 1$, $\rho > \frac{1}{2}$. On suppose de plus que A vérifie la condition de transversalité :

$$(H_3) \qquad A(x) \cdot x = 0 \qquad , \qquad \forall x \in I\!R^n.$$

Alors : les opérateurs d'onde $W^\pm$ existent et sont complets.

Ce choix de jauge fut introduit historiquement par Uhlenbeck [Uh], et détermine entièrement le potentiel A à partir du champ B :

$$A_j(x) \ = \ \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x)\ x_k \ , \tag{4.5}$$

où

$$a_{jk}(x) \ = \ - \int_0^1 s\ b_{jk}(sx)\ ds \ . \tag{4.6}$$

Le Théorème 4 fut d'abord démontré par Perry [Pe], dans le cas particulier d'interactions magnétiques radiales, puis par Loss et Thaller dans le cas général [Lo-Th], en utilisant une méthode dépendant du temps due à Enss [En1].
Dans [Ni-Ro], nous proposons une nouvelle démonstration de ce résultat à l'aide d'une méthode stationnaire due à Isozaki et Kitada [Is-Ki]. Cette approche a l'avantage de fournir des informations sur les matrices et l'amplitude de diffusion.
Enfin, signalons que V. Enss généralisa le théorème 4 en incluant des potentiels électrostatiques à longue portée [En2], résultat que nous avions également obtenu dans [Ni1].

Démonstration du Théorème 4.

Nous allons donner une démonstration élémentaire du Théorème 4, nécessaire à l'obtention d'une nouvelle formule de représentation des matrices de diffusion, adaptée à notre problème.

En fait, l'idée sous-jacente est la pierre angulaire de tout ce travail de recherche, aussi bien pour l'étude des matrices de diffusion, que pour le problème de diffusion inverse. Pour cette raison, il nous semble important de détailler un peu plus cette preuve.

L'idée principale est analogue à celle donnée dans ([Ni-Ro]), mais en construisant une phase beaucoup plus simple, n'utilisant pas la théorie de Hamilton-Jacobi. Pour plus de détails, on se reportera à ([Ni-Ro]), [Ni3]).

Expliquons brièvement notre approche; on introduit une modification des opérateurs d'onde indépendante du temps, de la forme :

$$W_\Phi^\pm \ = \ s - \lim_{t \to \pm\infty} \ e^{itH_{A,V}}\ J_\Phi\ e^{-itH_0}\ E_{H_0}\ (\theta,\ \infty) \ , \tag{4.7}$$

où $\theta > 0$, $E_{H_0}(I)$ est le projecteur spectral sur I, et J_Φ est un opérateur Fourier intégral, (O.F.I), de phase Φ et d'amplitude 1, proche de l'identité, ([Ro]).
On cherche à déterminer une phase Φ de sorte que :

$$a(x, \partial_x \Phi(x,\xi)) - \xi^2 = O\ (< x >^{-1-\epsilon}\ ) \ \ , \quad \epsilon > 0 \ , \tag{4.8}$$

dans des zones adéquates de l'espace des phases, où

$$a(x,\xi) = (\xi - A(x))^2 + V(x) \tag{4.9}$$

est le Hamiltonien classique du système.

Introduisons les notations :

$$\Gamma^{\pm}\ (R,\theta,\sigma)=\left\{\ (x,\xi)\in I\!R^{2n}\ :\ \mid x\mid\geq R,\ \mid\xi\mid\geq\theta,\ \pm\ x\cdot\xi\geq-\sigma\ \mid x\mid\mid\xi\mid\ \right\},$$

(Γ^+ est appelée zone sortante, Γ^- zone entrante, $\sigma\in]-1,1[$).

On se place sous les hypothèses du théorème 4 et pour simplifier, on ne traitera que le cas $(+)$. Pour $(x,\xi)\in\Gamma^+$, on pose :

$$c_A(x,\xi)=-\int_0^{+\infty}A(x+t\xi)\cdot\xi\ dt\quad,\tag{4.10}$$

circulation de la 1-forme A le long de l'orbite $t\ \rightarrow\ x+t\xi$.

A noter que cette expression a un sens, car d'après (H_3) :

$$A(x+t\xi)\cdot\xi=-\frac{1}{t}\ A(x+t\xi)\cdot x\ ,\tag{4.11}$$

et on rappelle que pour $(x,\xi)\in\Gamma^+$:

$$\mid x+t\xi\mid\geq C\ (\mid x\mid+t\mid\xi\mid)\ .\tag{4.12}$$

Un calcul trivial nous donne :

$$\partial_x c_A(x,\xi)=A(x)-\int_0^{+\infty}B(x+t\xi)\cdot\xi\ dt\ .\tag{4.13}$$

Pour simplifier les notations, nous poserons :

$$R(x,\xi)=-\int_0^{+\infty}B(x+t\xi)\cdot\xi\ dt\ .\tag{4.14}$$

La propriété essentielle de $R(x,\xi)$ est la suivante :

$$R(x,\xi)\cdot\xi=0\ ,\tag{4.15}$$

qui découle immédiatement du caractère antisymétrique de la matrice B.

On peut maintenant définir la phase sur les états sortants par :

$$\varphi^+(x,\xi)=x\cdot\xi+c_A(x,\xi)\quad,\tag{4.16}$$

phase qui vérifie d'après $(4.13)-(4.15)$,

$$a(x,\partial_x\varphi^+(x,\xi))-\xi^2=V(x)+R^2(x,\xi)\ .\tag{4.17}$$

En utilisant l'estimation $R(x,\xi)=O\ (<x>^{-\rho})$, on en déduit (4.8).
Pour $(x,\xi)\in\Gamma^-$, on procède de la même façon en posant

$$\varphi^-(x,\xi)=x\cdot\xi+c_A(x,-\xi)\ .\tag{4.18}$$

On construit alors la phase Φ de la façon suivante : notons

$$\chi \in C^\infty(I\!R^n)\ ,\ \chi(x) = 0\ si \mid x \mid \leq 1\ ,\ \chi(x) = 1\ si \mid x \mid \geq 2.$$

$$\Psi_+ \in C^\infty([-1,1])\ ,\ \Psi_+(\sigma) = 1\ si\ \sigma \in [\sigma_1, 1],\ \Psi_+(\sigma) = 0\ si\ \sigma \in [-1, \frac{\sigma_0+\sigma_1}{2}].$$

$$\Psi_- \in C^\infty([-1,1])\ ,\ \Psi_-(\sigma) = 1\ si\ \sigma \in [-1, \sigma_0],\ \Psi_-(\sigma) = 0\ si\ \sigma \in [\frac{\sigma_0+\sigma_1}{2}, 1],$$

où $\sigma_0,\ \sigma_1$ sont 2 constantes telles que $-1 < \sigma_0 < \sigma_1 < 1$.
On pose alors :

$$(4.19)\qquad \Phi(x,\xi) = x\cdot\xi + \Big\{[\varphi^+(x,\xi) - x\cdot\xi]\ \Psi_+(cos(x,\xi)) + [\varphi^-(x,\xi) - x\cdot\xi].\Psi_-(cos(x,\xi))\Big\}$$
$$\chi(\tfrac{x}{R})\ \chi(\tfrac{\xi}{\theta})\ .$$

En utilisant la même méthode que ($[Is - Ki]$), on obtient facilement dans [Ni1] l'existence et la complétude asymptotique pour $W_\Phi^\pm$.

Passons maintenant à la démonstration du théorème 4. Notons

$$(4.20)\qquad l_{jk}(x,\xi) = x_j\xi_k - x_k\xi_j\ ,$$

appelés *moments cinétiques*. On remarque que :

$$(4.21)\qquad c_A(x,\xi) = -\frac{1}{2}\sum_{j,k}\int_0^\infty a_{jk}(x+t\xi)\ l_{jk}(x,\xi)\ dt$$

et par conséquent, sur les espaces où les moments cinétiques sont bornés,

$$(4.22)\qquad \Phi(x,\xi) - x\cdot\xi = O\ (< x >^{-min\ (1,\rho)})\ ,$$

ce qui montre que, sur de tels espaces, J_Φ est une perturbation compacte de l'identité.
On en déduit par densité :

$$(4.23)\qquad W_\Phi^\pm = W^\pm E_{H_0}(\theta,\infty)\ .$$

Pour de plus amples détails, on se reportera à [Ni-Ro], [Ni3]. Le théorème 4 découle alors immédiatement de (4.23), de l'existence et de la complétude asymptotique de $W_\Phi^\pm$. □

4.3 Matrices de diffusion.

4.3.1 Quelques rappels.

Sous les hypothèses du théorème 4, on définit l'opérateur de diffusion :

$$(4.24)\qquad S_A\ =\ W^{+*}\ W^-.$$

Puisque S_A commute avec H_0, on peut diagonaliser S_A dans la représentation spectrale de H_0 via la transformée de Fourier $F_0(\lambda)\ :\ L^2_s(I\!R^n) \to L^2(S^{n-1}),\ s > \frac{1}{2}$, définie par :

$$\forall \omega \in S^{n-1}\ ,\ F_0(\lambda) f(\omega) = \lambda^{\frac{n-2}{2}} \hat{f}(\sqrt{\lambda}\omega). \tag{4.25}$$

Par construction $F_0(\lambda)H_0 = \lambda F_0(\lambda)$ et les matrices de diffusion sont définies comme des opérateurs unitaires :

$$S_A(\lambda)\ :\ L^2(S^{n-1}) \longrightarrow \mathrm{L}^2(S^{n-1})\ , \tag{4.26}$$

par (formellement) :

$$S_A(\lambda)F_0(\lambda) = F_0(\lambda)S_A. \tag{4.27}$$

Le noyau de $S_A(\lambda)-1$, noté $T_A(\lambda)\ (\omega,\omega')$, où $\omega,\omega' \in S^{n-1}$, est appelé *amplitude de diffusion.* Physiquement, l'amplitude de diffusion est liée à la *section efficace de diffusion* $\sigma(\lambda,\ \omega)$.

Par exemple, pour $A = 0$ et $\delta > \frac{n+1}{2}$:

$$\sigma(\lambda,\ \omega) = cste \int_{S^{n-1}} \mid T(\lambda,\theta,\omega) \mid^2\ d\theta\ . \tag{4.28}$$

En 1985, Isozaki et Kitada [Is-Ki], ont montré que, dans le cas $A \equiv 0$ et $\delta > 1$, l'amplitude de diffusion est de classe C^∞ en dehors de la diagonale et vérifie l'estimation :

$$\mid T_0(\lambda)\ (\omega,\omega') \mid\ \leq C(\delta_0) \mid \omega - \omega' \mid^{-n+\delta_0}\ , \tag{4.29}$$

pour tout $\delta_0 < min\ (n,\delta)$, la constante $C(\delta_0)$ étant indépendante de λ parcourant un compact de $(0,\ \infty)$. Ce dernier résultat a été récemment étendu et précisé par Yafaev [Ya2].

Dans cette section, nous nous proposons d'étudier ce qui se passe en présence d'un champ magnétique. Nous allons montrer que l'amplitude de diffusion est également C^∞ en dehors de la diagonale, mais qu'une estimation du type (4.29) est impossible en général, (phénomène de Aharonov-Bohm).

Nous suivons la même approche que celle donnée dans ($[Ni3]$). Rappelons brièvement de quoi il s'agit. On notera dans ce qui suit $J(d,\Phi)$ l'O.F.I de phase $\Phi(x,\xi)$, d'amplitude $d(x,\xi)$.

On cherche à déterminer deux O.F.I $J(d_{j,A},\Phi_j)$ entrelaçant $e^{-itH_{A,V}}$ et e^{-itH_0} dans de grandes régions de l'espace des phases, où Φ_j est donnée par (4.19) pour un choix adéquat de constantes $-1 < \sigma_0^j < \sigma_1^j < 1$. Il reste à calculer l'amplitude de l'O.F.I. Dans un premier temps, on omet l'indice j.

Un calcul trivial nous donne :

$$H_{A,V} J(d,\Phi) - J(d,\Phi)H_0 = J(c,\Phi)\ , \tag{4.30}$$

où pour $(x,\xi) \in \Gamma^\pm$,

$$(4.31) \qquad c(x,\xi) = [V(x) + R^2(x,\xi) - i\ divR(x,\xi)]\ d(x,\xi)$$
$$-2i\ [\xi + R(x,\xi)] \cdot \partial_x d(x,\xi) - \Delta_x d(x,\xi)\ .$$

On cherche l'amplitude sous la forme $d(x,\xi) \sim \sum_{m=0}^{+\infty} d^m(x,\xi)$, $d^0(x,\xi) = 1$, de sorte que $c(x,\xi) = O(< x >^{-\infty})$ dans de grandes régions de l'espace des phases.

On résout donc les équations de transport :

$$(4.32) \qquad (\xi + R(x,\xi)) \cdot \partial_x d^m(x,\xi) - \frac{1}{2i}[V(x) + R^2(x,\xi) - i\ divR(x,\xi)]\ d^{m-1}(x,\xi)$$
$$+\tfrac{1}{2i}\Delta_x d^{m-1}(x,\xi) = 0\ , \quad \text{pour } (x,\xi) \in \Gamma^{\pm}.$$

On obtient aisément les estimations suivantes :

$$(4.33) \qquad |\ \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta d^m(x,\xi)\ | \leq C_{\alpha\beta m} < x >^{-|\alpha|-m(\mu-1)} < \xi >^{-1}\ ,$$

où $\mu = min\ (\delta, 2\rho, 1+\rho)$.

Pour un couple de constantes fixées $-1 < \sigma_0 < \sigma_1 < 1$, l'amplitude $d(x,\xi)$ est construite comme suit.
Soient $\chi_1,\ \chi_2 \in C^\infty([-1,1])$ tels que

$$\chi_1(\tau) = 1\ si\ \tau \in [-1, \sigma_0 - \gamma],\ \chi_1(\tau) = 0\ si\ \tau \geq \sigma_0\ ,$$

$$\chi_2(\tau) = 1\ si\ \tau \in [\sigma_1 + \gamma, 1],\ \chi_2(\tau) = 0\ si\ \tau \leq \sigma_1\ ,$$

où $\gamma > 0$ est assez petit.

On pose alors :

$$(4.34) \qquad d(x,\xi) = \Big\{ \sum_{m=0}^{+\infty} d^m(x,\xi)\ \chi(\epsilon_m x) \Big\}\ [\chi_1(cos(x,\xi)) + \chi_2(cos(x,\xi))]\ \chi(\frac{\xi}{\theta})\ \chi(\frac{x}{R})\ ,$$

où (ϵ_m) est une suite convenable de réels positifs tendant vers 0.

De façon analogue à (4.23), on a, [Ni-Ro], [Ni3] :

$$(4.35) \qquad W^{\pm}\ E_{H_0}(\theta,\infty)\ =\ s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH_{A,V}} J(d,\Phi)\ e^{-itH_0}\ E_{H_0}(\theta,\infty)\ .$$

4.3.2 Formule de représentation des matrices de diffusion.

Afin d'établir une formule de représentation des matrices de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel magnétique vérifiant la jauge de transversalité, à décroissance en $O(< x >^{-\rho})$ à l'infini, $\rho \in]\frac{1}{2}, 1[$, et d'un potentiel électrique à courte portée, il est nécessaire de construire deux opérateurs Fourier intégraux (O.F.I) J_j, $j = 1, 2$, avec une phase et une amplitude convenablement microlocalisées.

Définition de la microlocalisation.

Pour $j=1,2$, soient $\sigma_0^j,\ \sigma_1^j \in]0,1[$, $\gamma>0$ assez petit, tels que :

$$-1 < \sigma_0^1-\gamma < \sigma_0^1 < \sigma_1^1 < \sigma_1^1+\gamma < 0 < \sigma_0^2-\gamma < \sigma_0^2 < \sigma_1^2 < \sigma_1^2+\gamma < 1 \ .$$

$$\Psi_j^+ \in C^\infty([-1,1]),\ \Psi_j^+(\tau)=1 \text{ si } \tau\in[\sigma_1^j,1] \text{ et } \Psi_j^+(\tau)=0 \text{ si } \tau\in[-1,\frac{\sigma_0^j+\sigma_1^j}{2}].$$

$$\Psi_j^- \in C^\infty([-1,1]),\ \Psi_j^-(\tau)=1 \text{ si } \tau\in[-1,\sigma_0^j] \text{ et } \Psi_j^-(\tau)=0 \text{ si } \tau\in[\frac{\sigma_0^j+\sigma_1^j}{2},1].$$

$$\chi_{1,j}\in C^\infty([-1,1]),\ \chi_{1,j}(\tau)=1 \text{ si } \tau\in[-1,\sigma_0^j-\gamma] \text{ et } \chi_{1,j}(\tau)=0 \text{ si } \tau\geq\sigma_0^j.$$

$$\chi_{2,j}\in C^\infty([-1,1]),\ \chi_{2,j}(\tau)=1 \text{ si } \tau\in[\sigma_1^j+\gamma,1] \text{ et } \chi_{2,j}(\tau)=0 \text{ si } \tau\leq\sigma_1^j.$$

La phase $\Phi_j(x,\xi)$ de l' O.F.I J_j est donnée par (4.19) où Ψ_+, (resp. Ψ_-), est remplacé par Ψ_j^+, (resp. Ψ_j^-). L'amplitude $d_j(x,\xi)$ de l' O.F.I J_j est donnée par (4.34) où χ_1, (resp. χ_2), est remplacé par $\chi_{1,j}$, (resp. $\chi_{2,j}$). Enfin, on pose $T_{j,A}=H_{A,V}J_{j,A}-J_{j,A}H_0$.

On a alors la formule de représentation pour les matrices de diffusion [Is-Ki], [Ni1]. Cette formule de représentation généralise celle de Kuroda que nous énoncerons dans la prochaine section :

$$(4.36)\qquad S_A(\lambda)-1=-2i\pi F_0(\lambda)J_1^*T_2F_0^*(\lambda)+2i\pi F_0(\lambda)T_1^*R(\lambda+i0)T_2F_0^*(\lambda):=B(\lambda)+C(\lambda).$$

Nous démontrons dans [Ni1] que $C(\lambda)$ est un opérateur à noyau C^∞ sur $S^{n-1}\times S^{n-1}$, et $B(\lambda)$ est C^∞ en dehors de la diagonale. Par contre contrairement à ce qui se passe sans champ magnétique, la matrice de diffusion n'est pas forcément une perturbation compacte de l'identité et son spectre peut recouvrir le cercle unité complexe. Ce résultat a été obtenu récemment par Roux-Yafaev [Ro-Ya], contredisant ainsi nos résultats énoncés dans un premier temps dans [Ni3]. L'erreur de [Ni3] provenait d'un mauvais choix de microlocalisation.

Nous nous proposons de montrer dans cette section que l'approche utilisée dans [Ni3], basée sur des constructions à la Isozaki-Kitada, permet également d'obtenir ce résultat.

Un calcul facile nous montre que $J_1^*T_2$ est un opérateur pseudodifférentiel dans la classe $S^{-1}_{\rho,1-\rho}$ de Hörmander, de symbole principal pour $\mid x\mid\gg 1$ et $\mid\xi\mid>2\theta>0$:

$$(4.37)\qquad a(x,\xi)=-2i\ \left(e^{i\int_{-\infty}^{+\infty}\ A(x+s\xi)\cdot\xi\ ds}\ \xi\cdot\partial_x(\chi_{1,2}(\cos(x,\xi)))+\xi\cdot\partial_x(\chi_{2,2}(\cos(x,\xi)))\right)\ .$$

Puisque $Supp\ a\subset\{\ (x,\xi)\ :\ \cos(x,\xi)\in[\sigma_0^2-\gamma,\sigma_0^2]\cup[\sigma_1^2,\sigma_1^2+\gamma]\ \}$, on en déduit que $B(\lambda)$ est un opérateur pseudodifférentiel sur la sphère dans la classe $S^0_{\rho,1-\rho}$ et de symbole principal pour $\mid y\mid\gg 1$, $\mid\omega\mid=1$ et $<y,\omega>=0$, (Prop. 2.11, [Ya2]) :

$$(4.38)\qquad b(\omega,y;\lambda)=-\frac{i}{2\sqrt{\lambda}}\int_{-\infty}^{+\infty}\ a(t\omega+\lambda^{-\frac12}y,\sqrt{\lambda}\omega)\ dt$$

$$= - e^{i \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda^{-\frac{1}{2}} y + s\omega)\cdot\omega \ ds} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} \left(\chi_{1,2} \left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + \lambda^{-1} \mid y \mid^2}} \right) \right) dt$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} \left(\chi_{2,2} \left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + \lambda^{-1} \mid y \mid^2}} \right) \right) dt$$

$$= e^{i \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda^{-\frac{1}{2}} y + s\omega)\cdot\omega \ ds} - 1.$$

Par conséquent, modulo un opérateur compact, $S_A(\lambda)$ est un opérateur pseudodifférentiel sur la sphère de symbole principal :

(4.39) $$s(\omega, y; \lambda) = e^{i \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda^{-\frac{1}{2}} y + s\omega)\cdot\omega \ ds} .$$

En utilisant (4.39), Roux et Yafaev obtiennent en particulier le résultat suivant :

Proposition 5 $[Ro - Ya1]$
On suppose que pour un point (y, ω) tel que $\mid \omega \mid = 1$, $< y, \omega > = 0$,

(4.40) $$\limsup_{\tau \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\tau y + s\omega) \cdot \omega \ ds \ = \infty \text{ ou } \liminf_{\tau \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\tau y + s\omega) \cdot \omega \ ds \ = -\infty \ .$$

Alors : le spectre de $S_A(\lambda)$ recouvre le cercle unité.

Remarque
Dans le cas où le champ magnétique B est à support compact (effet Aharonov-Bohm), les hypothèses de la proposition précédente ne sont pas satisfaites. Par exemple, dans le cas de la dimension 2, il est facile de voir que

(4.41) $$\int_{-\infty}^{+\infty} A(y + s\omega).\omega \ ds \ = \ \pm \frac{\Phi}{2} ,$$

suivant que le repère $(\hat{y}, \omega)$ est direct ou indirect, Φ étant le flux total du champ magnétique, $\hat{y} = \frac{y}{|y|}$. Utilisant (4.41) , Roux et Yafaev montrent que [Ro-Ya2] :

(4.42) $$\sigma_{ess}(S_A(\lambda)) = \{ e^{-i\frac{\Phi}{2}}, e^{i\frac{\Phi}{2}} \} .$$

5 Le problème de diffusion inverse dans un champ électromagnétique.

5.1 Enoncé du problème.

Le problème de diffusion inverse que nous allons étudier peut se résumer très succinctement de la façon suivante : on se donne un couple de Hamiltoniens (H, H_0) où :

• H_0 est le Hamiltonien libre, (essentiellement, $H_0 = -\Delta$ sur $L^2(I\!R^n)$).
• H est une perturbation de H_0.

Buts :

(1) On définit l'opérateur de diffusion $S = S(H, H_0)$, (S a une signification physique via la section efficace de diffusion par exemple).

(2) L'opérateur S étant donné, on se propose de répondre à la question naturelle suivante :

peut-on déterminer et reconstruire la perturbation à partir de l'opérateur de diffusion S (ou bien des matrices de diffusion $S(\lambda)$ associées) ?

5.2 Remarques historiques.

Considérons $H_0 = -\Delta$ sur $L^2(I\!R^n)$ de domaine $D(H_0) = H^2(I\!R^n)$, et soit $H = H_0 + V(x)$. Dans un souci de simplification, supposons que $V \in C^\infty(I\!R^n)$ et vérifie :

$$(H_1) \qquad | \partial_x^\alpha V(x) | \leq C_\alpha < x >^{-\rho-|\alpha|} \ , \ \rho > 1.$$

H est donc une perturbation à courte portée de l'opérateur de Laplace H_0 et en particulier les opérateurs d'ondes de Moeller :

$$(5.1) \qquad W^\pm = s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} \ e^{-itH_0} \ \text{ existent et sont complets.}$$

On définit l'opérateur de diffusion S comme un opérateur unitaire sur $L^2(I\!R^n)$:

$$(5.2) \qquad S = W^{+*} \ W^-.$$

Dans ce contexte précis, nous avons la formule de représentation des matrices de diffusion due à Kuroda :

$$(5.3) \qquad S(\lambda) - 1 = -2i\pi F_0(\lambda) V F_0(\lambda)^* + 2i\pi F_0(\lambda) V R(\lambda + i0) V F_0(\lambda)^*,$$

où $R(\lambda + i0)$ existe comme opérateur borné dans $B(L_s(I\!R^n);\ L_{-s}(I\!R^n))$, $s > \frac{1}{2}$, cf. (4.2), et vérifie l'estimation suivante : $\forall s > \frac{1}{2}$, $\forall \lambda \geq \lambda_0 > 0$,

$$(5.4) \qquad ||< x >^{-s} R(\lambda + i0) < x >^{-s}||_{B(L^2(I\!R^n))} \leq \ C_s \ \lambda^{-\frac{1}{2}} \ .$$

Le terme dominant de (5.3) lorsque $\lambda \to +\infty$ est donc donné par :

$$(5.5) \qquad B(\lambda) = -2i\pi F_0(\lambda) V F_0(\lambda)^* \ \ , \ \ \text{(approximation de Born).}$$

5.2.1 Diffusion inverse à haute énergie.

Le noyau de l'approximation de Born est donné par l'intégrale oscillante suivante :

$$(5.6) \qquad B(\lambda,\theta,\omega) = \lambda^{\frac{n-2}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\sqrt{\lambda}x\cdot(\theta-\omega)} V(x)\ dx\ .$$

Par conséquent, si nous fixons $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash 0$, l'amplitude de diffusion vérifie, dans le régime $\sqrt{\lambda}(\theta-\omega)=\xi$, $\lambda \to +\infty$,

$$(5.7) \qquad \lim_{\lambda\to+\infty} T(\lambda,\theta,\omega) = \hat{V}(\xi).$$

Donc, si nous connaissons $S(\lambda)$ for $\lambda \geq \lambda_0$, nous pouvons reconstruire V, (Faddeev [Fa]).

• Dans le même ordre d'idée, Saito [Sa] (1982) a proposé une autre approche pour reconstruire le potentiel électrique; si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est fixé, nous avons lorsque $\lambda \to +\infty$, (et $n=3$),

$$(5.8) \qquad < (S(\lambda)-1)e^{i\sqrt{\lambda}x_0\cdot\omega},\ e^{i\sqrt{\lambda}x_0\cdot\omega} >_{L^2(S^{n-1})} \sim\ -i\ \lambda^{-\frac{1}{2}} \left(V * \frac{1}{\mid x\mid^2} \right)(x_0)\ ,$$

et en utilisant (5.8) il n'est pas difficile de reconstruire V.

• En 1995, Enss-Weder [En-We1] ont proposé une méthode géométrique très simple et efficace. Cette approche peut être étendue au cas longue portée (opérateurs d'onde modifiés à la Dollard [Do]), à l'équation de Dirac [Ju], au problème à N-corps [En-We2], et aux opérateurs de Schrödinger avec potentiel électrique constant (effet Stark) [We1]. Plus précisément, si Φ, Ψ sont les transformées de Fourier de fonctions dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n), n \geq 2$, ils montrent que pour $\lambda \to +\infty$, et $\omega \in S^{n-1}$,

$$(5.9) \qquad < e^{i\sqrt{\lambda}x.\omega}\Phi\ ,\ (S-1)\ e^{i\sqrt{\lambda}x.\omega}\Psi > \sim\ \lambda^{-\frac{1}{2}}\ < \Phi, V^\omega \Psi >,$$

où l'on a posé :

$$(5.10) \qquad V^\omega(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(x+t\omega)\ dt.$$

Par conséquent, en utilisant le théorème d'inversion de la transformée de Radon (ou transformée à rayons X), on peut retrouver V.

5.2.2 Diffusion inverse à énergie fixée.

A énergie fixée, le problème est infiniment plus compliqué. Disons que, en règle générale, nous devons étendre la matrice de diffusion dans des énergies complexes (méthode de Faddeev).

Quelques résultats bien connus :

• Si V est une fonction exponentiellement décroissante :

$$(5.11) \qquad \mid V(x)\mid \leq a\ e^{-b|x|}, \quad a,b>0,$$

la donnée de $S(\lambda)$, λ fixé, détermine V pour $n \geq 3$. Pour $n = 2$, une hypothèse supplémentaire sur la petitesse de V est demandée pour avoir le même résultat, (Novikov [No1], [No2]).

• Si V vérifie (H_1) avec $\rho > n$, la donnée de $S(\lambda)$ pour $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \epsilon]$, $\epsilon > 0$ détermine la transformée de Fourier de V dans la boule $\{\xi \ : |\ \xi\ | \leq 2\sqrt{\lambda_0}\ \}$, (Henkin-Novikov) [He-No]. Ce résultat a été étendu par Isozaki [Is] pour $\rho > \frac{3}{2}$.

• Notons par $S_{cl}^{-2}(\mathbb{R}^n)$ la classe des symboles classiques d'ordre -2, i.e l'ensemble des fonctions lisses $V(x)$ telles qu'il existe une suite de fonctions homogènes f_j d'ordre $-j$ tel que

$$(5.12) \qquad \left| \ \partial_x^\alpha \left(V(x) - \sum_{j=2}^{N-1} f_j(x) \right) \right| \ \leq \ C_{\alpha,N} \ < x >^{-N-|\alpha|} .$$

En 1998, Joshi and Sa Barreto [Jo-Sa1] ont démontré que si $V_1,\ V_2 \in S_{cl}^{-2}(\mathbb{R}^n)$ pour $n \geq 3$, et si les matrices de diffusion associées à une énergie fixée sont égales à un terme lisse près, alors $V_1(x) - V_2(x) = O(< x >^{-\infty})$. Cette approche a été simplifiée dans [Jo].

Nous verrons que l'approche stationnaire développée dans la prochaine section permet de retrouver (et généraliser) un résultat proche de ce dernier point.

5.3 Une nouvelle méthode stationnaire.

Dans cette section, nous développons une nouvelle approche, dite stationnaire, qui permet de calculer le *développement asymptotique complet* à haute énergie de l'opérateur de diffusion S. Cette méthode nous permettra d'étudier :

• des Hamiltoniens avec champs électromagnétiques, (potentiels à courte portée ou à longue portée).

• le phénomène Aharonov-Bohm, (cas des obstacles).

• le problème de diffusion inverse pour des potentiels à courte portée ou à longue portée à partir de l'opérateur de diffusion localisé près d'une énergie fixée.

5.3.1 Le cas d'un champ électromagnétique.

Nous noterons par H l'opérateur de Schrödinger quantique défini dans la section 4, considéré comme une perturbation de $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$ sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, et qui décrit l'interaction d'une particule chargée dans un champ électrique et magnétique :

$$(5.13) \qquad H \ = \ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (D_j - A_j(x))^2 + V(x) \ ,$$

et on se place sous les hypothèses du Théorème 4. Notons que dans [Ni4], nous traitons également le cas longue portée.
On peut alors définir l'opérateur de diffusion par :

$$(5.14) \qquad S = S(A, V) = W^{+*} W^{-}.$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 6 [$Ni4$]
Sous les hypothèses du Théorème 4, on a :

$$S(A_1, V_1) = S(A_2, V_2) \iff A_1 = A_2 \text{ et } V_1 = V_2. \tag{5.15}$$

La preuve de ce théorème est basée sur l'étude de l'asymptotique à haute énergie de l'opérateur de diffusion. On étudie le même objet que Enss-Weder mais avec une méthode différente et stationnaire. Cette approche permet d'obtenir l'asymptotique complète à haute énergie. Insistons sur le fait que dans cette section, l'asymptotique complète n'est pas nécessaire, mais ce ne sera pas le cas lorsque nous étudierons le problème de diffusion inverse à énergie localisée près d'une énergie fixée comme Joshi et Sa Barreto [Jo-Ba1]. Notons aussi que le Théorème 6 a aussi été obtenu par Arians [Ar] en utilisant la méthode géométrique de Enss-Weder pour des potentiels à courte portée. Enfin, comme nous l'avons rappelé précédemment, le Théorème 6 se généralise au cas longue portée via l'utilisation d'opérateurs d'ondes modifiés [Ni4].

Théorème 7 [$Ni4$]
Sous les hypothèses du Théorème 4, $\forall\ \hat{\Phi},\ \hat{\Psi} \in C_0^\infty(I\!R^n)$, nous avons l'asymptotique complète lorsque $\lambda \to +\infty$:

$$< e^{i\sqrt{\lambda}x.\omega}\Phi\ ,\ S\ e^{i\sqrt{\lambda}x.\omega}\Psi > \sim \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^{-\frac{j}{2}}\ < \Phi,\ a_{j,\omega}(x,D)\ \Psi >, \tag{5.16}$$

où $a_{j,\omega}(x,D)$ sont des opérateurs differentiels. En particulier,

$$a_{0,\omega}(x,D) \ = \ e^{ic_A(x,\omega)}, \tag{5.17}$$

où

$$c_A(x,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x+t\omega)\cdot\omega\ dt, \tag{5.18}$$

et

$$a_{1,\omega}(x,D) \ = \ -i\ e^{ic_A(x,\omega)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} V(x+t\omega)\ dt\ + a_{A,\omega}(x,D) \right), \tag{5.19}$$

où $a_{A,\omega}(x,D)$ est un opérateur différentiel qui dépend seulement de A.

Le Théorème 6 est juste une application du théorème 7, en utilisant le théorème d'inversion de la transformée de Radon [H], [Ni4].

Esquisse de preuve du Théorème 7 :

Pour simplifier, supposons dans un premier temps que $A = 0$. Pour déterminer l'asymptotique à haute énergie de

$$(5.20) \qquad F(\lambda) \ = < \ e^{i\sqrt{\lambda}x.\omega}\Phi \ , \ S(A,V) \ e^{i\sqrt{\lambda}x.\omega}\Psi \ > \ ,$$

il est naturel d'introduire deux opérateurs :

$$(5.21) \qquad \Omega^{\pm}(\lambda,\omega) \ = \ e^{-i\sqrt{\lambda}x.\omega} \ W^{\pm} \ e^{i\sqrt{\lambda}x.\omega} \ ,$$

puisque

$$(5.22) \qquad F(\lambda) \ = < \Omega^{+}(\lambda,\omega) \ \Phi, \ \Omega^{-}(\lambda,\omega) \ \Psi > \ .$$

On a évidemment,

$$(5.23) \qquad \Omega^{\pm}(\lambda,\omega) \ = \ s - \lim_{t\to\pm\infty} \ e^{itH(\lambda,\omega)} \ e^{-itH_0(\lambda,\omega)} \ ,$$

où

$$(5.24) \qquad H_0(\lambda,\omega) \ = \ \frac{1}{2}(D+\sqrt{\lambda}\omega)^2, \ H(\lambda,\omega) \ = H_0(\lambda,\omega)+V(x).$$

Notre méthode stationnaire est assez simple à mettre en place et est proche de celle due à Isozaki et Kitada [Is-Ki], [Ki].

Idée principale :
L'idée est de construire deux opérateurs pseudodifférentiels notés $J^{\pm}(\lambda,\omega)$, (nous verrons par la suite que ce sont en fait des opérateurs différentiels), tels que pour $\lambda >> 1$,

$$(5.25) \qquad \Omega^{\pm}(\lambda,\omega) \ \Phi = \lim_{t\to\pm\infty} \ e^{itH(\lambda,\omega)} \ J^{\pm}(\lambda,\omega) \ e^{-itH_0(\lambda,\omega)} \ \Phi \ ,$$

$$(5.26) \qquad || \ (\Omega^{\pm}(\lambda,\omega) - J^{\pm}(\lambda,\omega))\Phi \ || \ = \ O(\lambda^{-\infty}) \ .$$

En utilisant (5.26), on aura donc :

$$(5.27) \qquad F(\lambda) \ = < J^{+}(\lambda,\omega)\Phi, \ J^{-}(\lambda,\omega)\Psi > \ + O \ (\lambda^{-\infty}) \ ,$$

ce qui nous permettra de calculer facilement l'asymptotique à haute énergie.

Si l'assertion (5.25) est satisfaite , nous avons :

$$(5.28) \qquad \Omega^{\pm}(\lambda,\omega) - J^{\pm}(\lambda,\omega) = \int_0^{\pm\infty} \ e^{itH(\lambda,\omega)} \ T^{\pm}(\lambda,\omega) \ e^{-itH_0(\lambda,\omega)} \ dt,$$

où

$$(5.29) \qquad T^{\pm}(\lambda,\omega) \ = \ i\left(H(\lambda,\omega) \ J^{\pm}(\lambda,\omega) \ - \ J^{\pm}(\lambda,\omega) \ H_0(\lambda,\omega)\right) \ .$$

Par conséquent, l'idée est de construire $J^{\pm}(\lambda, \omega)$ sous la forme :

$$(5.30) \qquad J^{\pm}(\lambda, \omega) = Op \left(\sum_{j \geq 0} \lambda^{-\frac{j}{2}} \, d_j^{\pm}(x, \xi, \omega) \right) \ , \ d_0^{\pm} = 1,$$

et afin d'obtenir $T^{\pm}(\lambda, \omega) = O \ (\lambda^{-\infty})$, nous devons résoudre les équations de transport suivantes :

$$(5.31) \qquad \omega \cdot \nabla d_{p+1}^{\pm} = -iV(x) d_p^{\pm} + \frac{i}{2} \Delta d_p^{\pm} - \xi \cdot \nabla d_p^{\pm} \ .$$

On résout les équations (5.31); il n'est pas difficile de montrer que (5.25) − (5.26) sont satisfaites, ce qui permet de démontrer le Théorème 7.

Le cas général $A \neq 0$ se traite en cherchant $J^{\pm}(\lambda, \omega)$ sous la forme d'un opérateur Fourier intégral et on suit la même stratégie. Pour plus de détails, on se reportera à [Ni4]. □

Remarque :
Enfin, notons que le problème de diffusion inverse pour des opérateurs de Schrödinger avec champ magnétique à support compact a été étudié à énergie fixée par Eskin - Ralston, [Es-Ra].

5.3.2 Le problème de diffusion inverse et l'effet Aharonov-Bohm.

Dans cette section, nous étudions des opérateurs de Schrödinger avec un champ électromagnétique et en présence d'obstacles.

On commence par préciser quelques notations.

$H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$ est l'opérateur de Schrödinger libre dans $L^2(I\!R^n)$, $n \geq 2$, de domaine $H^2(I\!R^n)$.
On considère un obstacle compact K in $I\!R^n$ à frontière lisse et on pose $\Omega = I\!R^n \backslash K$. Sans perdre de généralité, on peut toujours supposer que l'origine appartient à K.

On définit le Hamiltonien H comme l'opérateur différentiel sur Ω :

$$(5.32) \qquad H \ = H(A, V) \ = \ \frac{1}{2} \left(D - A(x) \right)^2 + V(x) \ .$$

On suppose que le potentiel électrostatique $V \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, avec la condition à courte portée (H_1), $\rho > 1$.

Pour simplifier, on considère une 2-forme champ magnétique, $B \in C_0^{\infty}(I\!R^n)$.

Dans cette section, nous préférons travailler avec la 1-forme potentiel magnétique $A = (A_1, ..., A_n)$ satisfaisant la jauge de Coulomb ($div \ A = 0$), et donnée par :

$$(5.33) \qquad A_j(x) \ = \ \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=1}^{n} \int_{I\!R^n} \frac{x_k - y_k}{\mid x - y \mid^n} \, b_{jk}(y) \ dy \ , \ \ \forall x \in I\!R^n,$$

où σ_{n-1} le volume de la sphère unité de $I\!R^n$.

Nous noterons aussi par H la réalisation de Dirichlet de domaine $D(H) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Enfin, soit $\mathcal{I}$ l'opérateur de restriction $\mathcal{I} : L^2(I\!R^n) \to L^2(\Omega)$ défini par $\mathcal{I}\Phi = \Phi_{|\Omega}$.

On définit les opérateurs d'ondes $W^{\pm}$ via le formalisme à 2 espaces de Hilbert, [De-Ge], [Wh2] :

Théorème 8 [*Ni5*]
Les opérateurs d'onde $W^{\pm} : L^2(I\!R^n) \to L^2(\Omega)$ définis par

$$W^{\pm} \ = \ s - \lim_{t \to \pm\infty} \ e^{itH} \ \mathcal{I} \ e^{-itH_0} \ , \tag{5.34}$$

existent et sont complets

On note encore par $S = S(A, V)$ l'opérateur de diffusion.

Afin de résoudre le problème inverse de diffusion, nous supposerons dans cette section que K est un *ensemble convexe* pour pouvoir utiliser le théorème de support de la transformée de Radon. Notons que cette hypothèse de convexité n'est pas nécessaire dans l'étude à haute énergie de l'opérateur de diffusion et que les Théorèmes 9 et 10 sont valables si l'on remplace alors K par son enveloppe convexe.

Théorème 9 *: (le cas de la dimension n, $n \geq 3$)* [*Ni5*].
Sous les hypothèses précédentes, nous avons :

$$S(A_1, V_1) = S(A_2, V_2) \iff B_1 = B_2 \text{ et } V_1 = V_2 \text{ dans } \Omega \ . \tag{5.35}$$

En dimension 2, le résultat est plus compliqué; une quantification du flux du champ magnétique apparaît. De plus, afin de pouvoir utiliser le théorème de support pour la transformée de Radon, nous devons supposer une décroissance plus forte sur le potentiel V :

$$V \text{ satisfait } (H_1) \ , \text{ et } \ \forall m \geq 0 \ , \ < x >^m \ V \ \in L^{\infty}. \tag{H_4}$$

Soit β le flux total (normalisé) du champ magnétique :

$$\beta = \frac{1}{2\pi} \int_{I\!R^2} b(x) \ dx \ \text{ avec } \ b = b_{12} = -b_{21}. \tag{5.36}$$

Théorème 10 *: (le phénomène de Aharonov-Bohm, $n = 2$),* [*Ni5*]
Supposons que supp $B_j \subset K$, alors :

$$S(A_1, V_1) = S(A_2, V_2) \Longrightarrow \beta_1 = \beta_2 \ [2] \ , \ V_1 = V_2 \text{ dans } \Omega. \tag{5.37}$$

Remarque :

Il n'est pas difficile de montrer qu'inversement :

$$\beta_1 = \beta_2 \ [2], \ V_1 = V_2 \text{ dans } \Omega \ \Longrightarrow S(A_1, V_1) = e^{-i(\beta_1 - \beta_2)\theta(D)} \ S(A_2, V_2) e^{i(\beta_1 - \beta_2)\theta(D)}, \tag{5.38}$$

où $\theta(x) = \tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \in [0, 2\pi[$ est l'angle azimuthal à partir de l'axe x_1 positif.
En particulier, les quantités mesurables physiques, comme la section efficace, sont les mêmes. Ruijsenaars [Ru] a obtenu des résultats similaires dans $I\!R^2$ lorsque $K = D(0, R)$, $V = 0$ et pour une interaction magnétique radiale. Enfin, notons que le cas d'un champ magnétique à support non inclus dans l'obstacle a également été étudié dans [Ni5].

Esquisse de preuve :

Le problème avec obstacle peut se traiter de la même manière que le Théorème 7 en étudiant le comportement à haute énergie de l'opérateur de diffusion. Cependant, dans ce cas-là, il est indispensable de construire une classe de fonctions test qui ont une interaction négligeable avec l'obstacle. On procède donc comme suit.
Soit $\omega \in S^{n-1}$ fixé, S^{n-1} est la shère unité de $I\!R^n$. Soit X_ω l'ensemble suivant :

$$X_\omega \ = \ \{ \ x \in I\!R^n \ : \ \forall t \in I\!R, \ x + t\omega \ \in \Omega \ \}. \tag{5.39}$$

Dans le cas des obstacles, on travaille localement en espace : on choisit des fonctions test Φ et Ψ à support dans X_ω. Techniquement, la chose essentielle est de contrôler l'étalement (ou spreading) de la fonction d'onde, (lorsque $\hat{\phi}, \hat{\psi} \in C_0^\infty(I\!R^n)$, les translations l'emportent sur le spreading).
Pour cette raison, nous introduisons une troncature en énergie (dépendant de λ) et remplaçons Φ par $\chi(\lambda^{-\epsilon} D)\ \Phi$, $\epsilon < \frac{1}{2}$, $\chi = 1$ dans un voisinage de 0. On conclut en suivant la même méthode que la démonstration du théorème 7. Pour plus de détails, on se reportera à [Ni5] $\Box$

Remarquons que Weder [We2] a étudié un problème similaire avec des champs magnétiques singuliers et à l'aide d'une méthode dépendant du temps.

5.3.3 Le problème de diffusion inverse à énergie localisée.

Dans cette section, on étudie un problème de diffusion inverse pour un couple de Hamiltoniens (H, H_0) sur $L^2(I\!R^n)$, $n \geq 2$, où l'opérateur libre est $H_0 = -\Delta$ de domaine $D(H_0) = H^2(I\!R^n)$, et

$$H = H_0 + V, \tag{5.40}$$

avec un potentiel $V \in C^\infty(I\!R^n)$ vérifiant (H_1) avec $\rho > 1$. On note S l'opérateur de diffusion.

Afin de localiser l'opérateur de diffusion près d'une énergie fixée $\lambda > 0$, on introduit une troncature $\chi \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$, $\chi = 1$ dans un voisinage de $\lambda > 0$.

Le but de cette section est d'obtenir des informations sur le potentiel à partir de $S\chi(H_0)$.

Nous montrons que pour $n \geq 3$, l'opérateur $S\chi(H_0)$ détermine l'asymptotique complète du potentiel à l'infini, en étudiant :

$$F(h) =< S\chi(H_0)\Phi_{h,\omega}, \Psi_{h,\omega} > , \tag{5.41}$$

où $<,>$ est le produit scalaire usuel dans $L^2(I\!R^n)$, $\Phi_{h,\omega}$, $\Psi_{h,\omega}$ sont des fonctions tests convenables et $h \to 0$.

Pour simplifier, nous supposerons dans ce rapport de recherche que $V \in S_{cl}^{-2}(I\!R^n)$ (V est un symbole classique d'ordre -2), i.e il existe une suite de fonctions homogènes f_j d'ordre $-j$ telle que

$$(5.42) \qquad \mid \partial_x^\alpha \left(V(x) - \sum_{j=2}^{N-1} f_j(x) \right) \mid \leq C_{\alpha,N} < x >^{-N-|\alpha|} .$$

On commence par la définition des paquets d'ondes $\Phi_{h,\omega}$, $\Psi_{h,\omega}$.

Dans un premier temps, on définit $U(h)$, $h > 0$, comme un opérateur unitaire sur $L^2(I\!R^n)$ par :

$$(5.43) \qquad U(h)\Phi(x) = h^{\frac{n}{2}} \Phi(hx).$$

On aura également besoin d'une troncature en énergie $\chi_0 \in C_0^\infty(I\!R^n)$ telle que $\chi_0(\xi) = 1$ si $\mid \xi \mid \leq 1$, $\chi_0(\xi) = 0$ si $\mid \xi \mid \geq 2$, (comme dans la section précédente, χ_0 est introduite pour contrôler le spreading des paquets d'ondes).

Pour $\omega \in S^{n-1}$, on écrit $x \in I\!R^n$ sous la forme $x = y + t\omega$, $y \in \Pi_\omega$ = hyperplan orthogonal à ω et on considère :

$$(5.44) \qquad X_\omega = \{ x = y + t\omega \in I\!R^n \ : \mid y \mid \geq 1 \ \}.$$

Définition des paquets d'ondes

Pour $\Phi \in C_0^\infty(X_\omega)$ et un $\epsilon > 0$ convenable,

$$(5.45) \qquad \Phi_{\lambda,\omega} = e^{i\sqrt{\lambda}x.\omega} \ U(h) \ \chi_0(h^\epsilon D) \ \Phi ,$$

où $D = -i\nabla$, ($\Psi_{h,\omega}$ est défini de la même façon avec $\Psi \in C_0^\infty(X_\omega)$).

Maintenant, on choisit ϵ pour localiser les paquets d'ondes près de l'energie fixée $\lambda > 0$:

Lemme 11
Pour $\epsilon < 1$ et $h \ll 1$, on a:

$$(5.46) \qquad \chi(H_0)\Phi_{\lambda,\omega} \ = \ \Phi_{\lambda,\omega}.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le thèorème 12. En fait nous démontrons dans [Ni7] un résultat similaire pour *des potentiels à courte portée génériques*, et également pour *des potentiels à longue portée* en utilisant des opérateurs d'ondes modifiés.

Théorème 12 $[Ni7]$
On suppose que $V \in S_{cl}^{-2}(I\!R^n)$. *On a l'asymptotique suivante lorsque* $h \to 0$ *:*

$$< (S-1)\chi(H_0)\Phi_{\lambda,\omega}, \Psi_{\lambda,\omega} > \sim \sum_{j \geq 1} h^j \ < \Phi, \ A_j(x,\omega,D) \ \Psi > , \tag{5.47}$$

où $A_j(x,\omega,D)$ *est un opérateur différentiel donné par :*

$$A_j(x,\omega,D) = \frac{i}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{j+1}(x+t\omega) \ dt \ + \ B_j(x,\omega,D), \tag{5.48}$$

avec $B_1 = 0$ *et pour* $j \geq 2$, $B_j(x,\omega,D)$ *est un opérateur différentiel dépendant seulement que des fonctions* f_k, $2 \leq k \leq j$.

Esquisse de preuve :
Puisque V est un symbole classique d'ordre -2, on construit, pour le cas $(+)$, le modificateur $J^+(h,\omega)$, comme un opérateur pseudodifférentiel, (en fait un opérateur differentiel), et possédant le développement asymptotique suivant :

$$J^+(h,\omega) = op \ (\sum_{k \geq 0} h^k \ d_k^+(x,\xi,\omega)) \ \ , \ \ d_0^+ = 1. \tag{5.49}$$

Pour parler simplement, on construit d_k^+ afin d'obtenir $T^+(h,\omega) = O(h^\infty)$. Un calcul facile nous montre que nous devons résoudre les équations de transport :

$$-2i\sqrt{\lambda}\omega \cdot \nabla d_1^+ + f_2 = 0, \tag{5.50}$$

et pour $m \geq 1$,

$$-2i\sqrt{\lambda}\omega \cdot \nabla d_{m+1}^+ - 2i\xi \cdot \nabla d_m^+ - \Delta d_m^+ + \sum_{k=0}^{m} f_{m-k+2} \ d_k^+ = 0. \tag{5.51}$$

Le théorème en découle comme dans la section précédente. □

Par conséquent, si nous notons $S^{-\infty}(I\!R^n)$ l'ensemble des fonctions à décroissance rapide à l'infini, en utilisant le théorème d'inversion pour la transformée de Radon, on retrouve un résultat proche de ceux de Joshi-Sa Barreto [Jo-Sa1] et simplifié dans [Jo]. Insistons sur le fait que Joshi et Sa Barreto travaillent à énergie fixée, mais il nous semble que les techniques développées ici sont très élémentaires.

Corollaire 13 $[Ni7]$
Supposons que $V_1, \ V_2 \in S_{cl}^{-2}(I\!R^n)$ *,* $n \geq 3$ *et* $S_1\chi(H_0) = S_2\chi(H_0)$.
Alors : $V_1 - V_2 \in S^{-\infty}(I\!R^n)$.
En particulier, si V_1, V_2 *sont des potentiels rationnels d'ordre inférieur ou égal à* -2, *alors* $V_1 = V_2$.

Commentaires
En utilisant les résultats de Isozaki [Is], le corollaire précédent est vrai pour $n = 2$. Néanmoins, comme cela a été remarqué par Grinevich [Gr] en 1986, pour $n = 2$, on peut construire des exemples de potentiels rationnels lisses décroissant à l'infini comme $\mid x \mid^{-2}$ et d'amplitude de diffusion nulle à une *énergie fixée*.

5.4 L'effet Stark.

On étudie un système quantique à courte portée en présence d'un champ électrique constant. Pour simplifier, on suppose que le champ électrique agit dans la direction e_1 où $e_1 = (1, 0, ..., 0) \in I\!R^n$, $n \geq 2$.

Le Hamiltonien de type Stark correspondant est défini sur $L^2(I\!R^n)$ et est donné par :

$$H_0 \ = \ \frac{1}{2}\, p^2 - x_1 \ , \tag{5.52}$$

où $p = -i\nabla$. Il est bien connu que H_0 est essentiellement autoadjoint sur $C_0^\infty(I\!R^n)$, (voir [Re-Si] par exemple). On notera aussi par H_0 la réalisation auto-adjointe de domaine $D(H_0)$. Rappelons la formule de Avron-Herbst [Av-He] qui décrit l'évolution libre :

$$e^{-itH_0} = e^{-i\frac{t^3}{6}}\ e^{itx_1}\ e^{-i\frac{t^2}{2}p_1}\ e^{-i\frac{t}{2}p^2} \ , \tag{5.53}$$

où p_1 est la première composante de $p = (p_1, p')$. L'équation (5.53) montre que, à un facteur près, l'évolution e^{-itH_0} consiste en une translation de $\frac{t^2}{2}$ unités vers la droite dans la direction e_1, composée par l'évolution libre usuelle sans champ électrique.

Soit H un second Hamiltonien considéré comme une perturbation de H_0 : $H = H_0 + V(x)$. On suppose que V est un potentiel à courte portée i.e $V \in C^\infty(I\!R^n)$ et vérifie $\forall \alpha \in I\!N^n$:

$$| \ \partial_x^\alpha V(x) \ | \leq C_\alpha < x >^{-\rho-|\alpha|} \ , \ \rho > \frac{1}{2} \ . \tag{H_1}$$

En fait, remarquons que nous avons seulement besoin de (H_1) pour α d'ordre fini, (par exemple $| \ \alpha \ | \leq n$). Il est bien connu que sous la condition (H_1), H est essentiellement autoadjoint de domaine $D(H) = D(H_0)$. De plus, H n'a pas de valeurs propres [Av-He] et $\sigma_{sc}\ (H) = \emptyset$, où $\sigma_{sc}\ (H)$ est le spectre singulier continu de H, [Re-Si].

Sous l'hypothèse (H_1) les opérateurs d'onde :

$$W^\pm \ = \ s - \lim_{t \to \pm\infty} \ e^{itH}\ e^{-itH_0} \tag{5.54}$$

existent et sont complets [Av-He]. En fait, on peut montrer l'existence et la complétude asymptotique de $W^\pm$ avec des hypothèses plus faibles sur le potentiel [Av-He], mais nous avons besoin de (H_1) pour résoudre le problème de diffusion inverse.

On note $S = S(V) = W^{+*}W^-$ l'opérateur de diffusion. Le problème de diffusion inverse que nous étudions ici consiste à reconstruire la perturbation V à partir de l'opérateur de diffusion.

Dans cette section, nous prouvons que dans le cas de la dimension $n \geq 3$, l'opérateur S détermine uniquement le potentiel V. Plus précisément, il suffit de connaître l'asymptotique à haute énergie de S, (cf Proposition 15). L'hypothèse $n \geq 3$ est nécessaire afin d'utiliser le théorème d'inversion de la transformée de Radon sur un hyperplan.

Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 14 [*Ni6*]
Soient V_1, V_2 des potentiels vérifiant (H_1) et supposons que $n \geq 3$. Alors :

$$S(V_1) = S(V_2) \iff V_1 = V_2 \ . \tag{5.55}$$

Un problème similaire a été étudié par Weder [We1] en utilisant une méthode dépendant du temps; il a obtenu le même résultat pour $n \geq 2$ (avec des conditions plus faibles sur les dérivées de V), mais avec une hypothèse plus forte de décroissance sur V : $\rho > \frac{3}{4}$. Nous démontrons dans [Ni6] que notre nouvelle approche permet également de démontrer ce résultat.

Preuve du Théorème 14 :

Pour démontrer le théorème, nous étudions l'asymptotique à haute énergie de l'opérateur de diffusion en utilisant l'approche de Enss-Weder. L'approche stationnaire décrite précédemment n'est pas adaptée à ce problème.

La méthode proposée plus bas est très proche de [En-We], [We1]. Les principales étapes de la preuve sont les suivantes :

a) on définit un opérateur d'ondes auxiliaire $\Omega^{\pm}$ (un modificateur à la Dollard) qui coïncide avec $W^{\pm}$ à une phase en énergie près.

b) on étudie l'asymptotique à haute énergie de S (en utilisant $\Omega^{\pm}$) dans une direction orthogonale à e_1.

c) en utilisant cette asymptotique et le fait que $dim \ \Pi_{e_1} \geq 2$, où Π_{e_1} est l'hyperplan orthogonal à e_1, nous résolvons le problème de diffusion inverse grâce au théorème d'inversion de la transformée de Radon.

Construction d'un opérateur d'onde auxiliaire.

Nous construisons un opérateur d'onde modifié $\Omega^{\pm}$ qui est proche de l'opérateur d'onde canonique $W^{\pm}$. L'avantage de $\Omega^{\pm}$ sur $W^{\pm}$ provient que $\Omega^{\pm}$ admet des estimations plus fines à haute énergie.

On commence par définir une dynamique modifiée $U_D(t)$ par :

$$U_D(t) = e^{-itH_0} \ e^{-i\int_0^t \ V(sp' + \frac{1}{2}s^2 e_1) \ ds} \ . \tag{5.56}$$

Cette dynamique est proche de celle introduite dans [Wh1] pour le cas longue portée. Notons que l'on prend p' au lieu de p dans l'intégrale puisque H_0 commute avec p'.

Maintenant, nous pouvons définir les opérateurs d'onde modifiés (à la Dollard) :

$$\Omega^{\pm} = s - \lim_{t \to \pm\infty} \ e^{itH} \ U_D(t) \ . \tag{5.57}$$

Puisque $\rho > \frac{1}{2}$, il est clair que cette limite existe et nous obtenons par (5.56) :

$$\Omega^{\pm} = W^{\pm}\ e^{-ig^{\pm}(p')}\ , \tag{5.58}$$

où

$$g^{\pm}(p') \ = \ \int_0^{\pm\infty} V(sp' + \frac{1}{2}s^2 e_1)\ ds\ . \tag{5.59}$$

On pose $T = \Omega^{+*}\Omega^{-}$, de sorte que d'après (5.58) on a :

$$S = e^{-ig^{+}(p')}\ T\ e^{ig^{-}(p')} \tag{5.60}$$

Asymptotique à haute énergie de l'opérateur de diffusion.

Nous avons besoin de quelques notations supplémentaires.

- Φ, Ψ sont les transformées de Fourier de fonctions appartenant à $C_0^{\infty}(I\!R^n)$.
- $\omega \in S^{n-1} \cap \Pi_{e_1}$ est fixé.
- $\Phi_{\lambda,\omega} = e^{i\sqrt{\lambda}x.\omega}\Phi,\ \Psi_{\lambda,\omega} = e^{i\sqrt{\lambda}x.\omega}\Psi$.

Nous avons l'asymptotique suivante, $< \ , \ >$ désignant le produit scalaire dans $L^2(I\!R^n)$:

Proposition 15 $[Ni6]$

$$< [S,p]\ \Phi_{\lambda,\omega}\ ,\ \Psi_{\lambda,\omega} > = \lambda^{-\frac{1}{2}}\ < \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \nabla V(x+t\omega)\ dt\right)\ \Phi\ ,\ \Psi > + o\ (\lambda^{-\frac{1}{2}})\ .$$

Le Théorème 14 se démontre ensuite via la transformée de Radon comme dans les sections précédentes.

5.5 Diffusion inverse avec potentiels répulsifs.

Le but de cette section est d'étudier un problème de diffusion inverse pour un Hamiltonien avec un potentiel répulsif et pour une classe de potentiels à courte portée.

Le Hamiltonien libre défini sur $L^2(I\!R^n)$, $n \geq 2$, est donné par :

$$H_0 \ = \ p^2 - x^2\ , \tag{5.61}$$

où $p = -i\nabla$. Il est bien connu que H_0 est essentiallement auto-adjoint sur $C_0^{\infty}(I\!R^n)$, ([Re-Si] par exemple). On note encore H_0 la réalisation autoadjointe de domaine $D(H_0)$.

De plus, si on désigne par $A = x \cdot p + p \cdot x$ le générateur des dilatations, on a :

$$H_0\ U = U\ A\ , \tag{5.62}$$

où U est l'opérateur sur $L^2(I\!R^n)$ défini par :

$$(5.63) \qquad U\Phi(x) = (\sqrt{2}\pi)^{-\frac{n}{2}}\ e^{-i\frac{x^2}{2}} \int_{I\!R^n} e^{i\sqrt{2}x\cdot y}\ e^{-i\frac{y^2}{2}}\Phi(y)\ dy.$$

On en déduit que le spectre de H_0 : $\sigma(H_0) = \sigma_{ac}(H_0) = I\!R$.

Maintenant, on rappelle la formule de Mehler [Ho] qui décrit l'évolution libre :

$$(5.64) \qquad \forall t \neq 0\ ,\ e^{-itH_0} = M_t\ D_t\ \mathcal{F}\ M_t\ ,$$

où M_t est l'opérateur de multiplication :

$$(5.65) \qquad M_t\Phi(x) = e^{\frac{i}{2}\coth(2t)\ x^2}\ \Phi(x)\ ,$$

D_t est l'opérateur de dilatation :

$$(5.66) \qquad D_t\Phi(x) = (i\sinh(2t))^{-\frac{n}{2}}\ \Phi\left(\frac{x}{\sinh(2t)}\right)\ ,$$

et $\mathcal{F}$ est la transformée de Fourier usuelle sur $L^2(I\!R^n)$.

Intuitivement, puisque le flot classique du système est donné par : $\forall x, \xi \in I\!R^n$, $\forall t \in I\!R$,

$$(5.67) \qquad \Phi_0^t(x,\xi) = (\cosh(2t)x + \sinh(2t)\xi,\ \sinh(2t)x + \cosh(2t)\xi)\ ,$$

un potentiel électrique réel V qui vérifie :

$$(H_1) \qquad |\ V(x)\ | \leq C\ (\ln < x >)^{-1-\epsilon},\ \epsilon > 0\ ,$$

où $< x >= (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$, est une perturbation à courte portée pour H_0.

Sous cette hypothèse, $H = H_0 + V(x)$ est essentiellement auto-adjoint de domaine $D(H) = D(H_0)$ et $\sigma_{ess}(H) = I\!R$. De plus, H n'a pas de valeurs propres et $\sigma_{sc}(H) = \emptyset$, [BCHM].

Sous l'hypothèse (H_1), on montre également dans [BCHM] que les opérateurs d'onde :

$$(5.68) \qquad W^{\pm}\ =\ s - \lim_{t\to\pm\infty}\ e^{itH}\ e^{-itH_0}$$

existent et sont complets, (i.e $Im\ W^{\pm} = \mathcal{H}^{(ac)}(H)$).

On note $S = S(V) = W^{+*}W^{-}$ l'opérateur de diffusion. Afin de résoudre le problème de diffusion inverse, nous avons besoin d'hypothèses plus fortes sur le potentiel électrique V.

On suppose que $V \in C^\infty(I\!R^n)$ et vérifie $\forall \alpha \in I\!N^n$ d'ordre fini :

$$(H_2) \qquad |\ \partial_x^\alpha V(x)\ | \leq\ C_\alpha < x >^{-\rho-|\alpha|}\ ,\ \rho \in]\frac{1}{2}, 1[\ .$$

Nous montrons que l'opérateur S détermine uniquement le potentiel V en étudiant le comportement à haute énergie de l'opérateur S.

Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 16 $[Ni8]$
Soient V_1, V_2 des potentiels vérifiant (H_2). Alors :

$$S(V_1) = S(V_2) \iff V_1 = V_2 \ .$$

Ce théorème se démontre exactement comme dans les sections précédentes. Notons :

- $\Phi, \Psi \in \mathcal{S}(I\!\!R^n)$ l'espace des fonctions à décroissance rapide.
- $\omega \in S^{n-1}$ est fixé.
- $\Phi_{\lambda,\omega} = e^{i\sqrt{\lambda}x.\omega}\Phi, \ \Psi_{\lambda,\omega} = e^{i\sqrt{\lambda}x.\omega}\Psi.$

En utilisant l'approche dépendant du temps de Enss-Weder, nous avons l'asymptotique à haute énergie lorsque $\lambda \to +\infty$, où $< \ , \ >$ est le produit scalaire usuel sur $L^2(I\!\!R^n)$:

Proposition 17 $[Ni8]$

$$< [S,p] \ \Phi_{\lambda,\omega} \ , \ \Psi_{\lambda,\omega} > \ = \lambda^{-\frac{1}{2}} \ < \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \ \nabla V(x+t\omega) \ dt \right) \ \Phi \ , \ \Psi > + o \ (\lambda^{-\frac{1}{2}}) \ .$$

Cette dernière proposition nous permet de reconstruire V en utilisant le théorème d'inversion pour la transformée à rayon X.

Commentaires.

Le théorème 16 se généralise facilement pour des Hamiltoniens de type :

$$H_0 = p^2 - \sum_{k=1}^{n_-} a_k^2 \ x_k^2 + \sum_{k=n_-+1}^{n} a_k^2 \ x_k^2 \ , \tag{5.69}$$

où $a_k > 0, \ n_- \geq 1$ et avec la convention $\sum_{j=a}^{b} = 0$ if $b < a$.

6 Perspectives.

Le problème de diffusion inverse à énergie fixée et paramètre semiclassique h pour des opérateurs à deux corps :

$$H(h) = -h^2\Delta + V(x) \ \ , \ \ H_0(h) = -h^2\Delta \ \text{ sur } \ L^2(I\!\!R^n), \tag{6.1}$$

mérite d'être étudié. Lorsque le potentiel V à courte portée est dilatable analytiquement, on peut penser que la donnée des matrices de diffusion $S(\lambda, h)$, λ fixé et $h \in I \subset (0,\infty)$, détermine uniquement le potentiel.

L'idée repose sur un travail récent de Vasy-Wang [Va- Wa], (pour un problème à N-corps, $N \geq 3$). Pour résumer brièvement, on pourrait essayer de démontrer l'analycité par rapport au paramètre h et ensuite faire tendre ce paramètre vers l'infini pour essayer de reconstruire V. On échapperait ainsi au régime semiclassique.

Un autre problème intéressant, mais sans doute difficile, est d'étudier le même problème pour des potentiels V à courte portée quelconque, mais avec un paramètre semi-classique tendant vers 0. Physiquement, sous des hypothèses de trajectoires non captées, on peut espérer retrouver le potentiel V dans la zone classiquement observable. C'est un problème beaucoup plus délicat que ceux traités dans ce rapport de recherche, puisque l'on n'est plus dans une théorie perturbative.

Enfin, il y a également le cas des perturbations d'ordre 2 du Laplacien (cas des métriques) à étudier à haute énergie. Grâce à un changement d'échelle, ce problème est identique au régime semiclassique. On pourrait ainsi espèrer retrouver certains invariants de la métrique, (l'opérateur de diffusion étant invariant sous l'action de difféomorphismes proches de l'identité à l'infini, il est exclu de déterminer uniquement la métrique). Notons qu'à énergie fixée et pour des métriques de type symbole classique d'ordre -2, ce problème a été récemment étudié par Joshi - Sa Barreto [Jo-Sa2] : via un difféomorphisme, l'asymptotique de la métrique à l'infini est uniquement déterminée par la donnée de $S(\lambda)$, $\lambda > 0$ fixée.

7 Bibliographie.

[Ah-Bo] Y.Aharonov - D.Bohm, *Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory*, The physical review, second series Vol. 115, $n°3$, pp. 485-491 (1959).

[Ar] S. Arians, *Geometric approach to inverse scattering for the Schrödinger equation with magnetic and electric potentials*, J. Math. Phys. 38 (6), 2761-2773, (1997).

[Av-He] J. E. Avron - I. W. Herbst, *Spectral and scattering theory for Schrödinger operators related to the Stark effect*, Comm. Math. Phys. 52, 239-254, (1977).

[Bi-Ro] J. M. Bily - D. Robert, *The Semi-classical Van-Vleck Formula. Application to the Aharonov-Bohm Effect*, Ser. Concr. Appl. Math., 1, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, (2001).

[BCHM] J. F. Bony - R. Carles - D. Häfner - L. Michel, Scattering theory for the Schrödinger equation with repulsive potential, *Arxiv : math.AP/0402170*, (2004), soumis.

[C-K-S] P. Cotta-Ramusino - W. Krüger - R. Schrader, *Quantum scattering by external metrics and Yang-Mills potentials*, Annales Institut Henri Poincaré, Vol. 31, n 1, 43-71, (1979).

[De-Ge] J. Derezinski - C. Gérard, *Scattering theory of classical and quantum N-particle systems*, Springer, (1997).

[Do] J.D. Dollard, *Quantum mechanical scattering theory for short range and Coulomb interactions*, Rocky Mountain J.1, p. 5-88, (1971).

[En1] V.Enss, *Long-range scattering of two-and-three body quantum systems*, Actes des journées équations aux dérivées partielles, Saint Jean de Monts, pp. 1-31, (1989).

[En2] V. Enss, *Quantum scattering with long-range magnetic fields*, Birkhaüser Series Operator Theory, advances and applications, (1993).

[En3] V. Enss, *Propagation properties of quantum states*, Journal of Functional Analysis 52, 219-251, (1983).

[En4] V. Enss, *Asymptotic completeness for quantum-mechanical potential scattering II. Singular and long-range potentials*, Ann. Phys. 119, 117-132, (1979).

[En-We] V. Enss - R. Weder, *The geometrical approach to multidimensional inverse scattering*, J. Math. Phys, Vol. 36 (8), 3902-3921, (1995).

[Es-Ra] G. Eskin - J. Ralston, *Inverse scattering problem for the Schrödinger equation with Magnetic potential at a fixed energy*, Commun. Math. Phys. 173, p. 199-224 (1995).

[Fa] L. D. Fadeev, *The uniqueness of solutions for the scattering inverse problem*, Vestnik Leningrad Univ. , 7, 126-130, (1956).

[Fu] D. Fujiwara, *A construction of the fundamental solution for the Schrödinger equation*, Journal d'analyse mathématique, Vol. 35, 41-96, (1979).

[Gr] P. G. Grinevich, *Rational solutions of the Veselov-Novikov equations are reflectionless two-dimensional potentials at fixed energy*, Theor. and Math. Phys. 69 (2), 307-310 (1986).

[He] B. Helffer, *Effet d'Aharonov-Bohm sur un état borné de l'équation de Schrödinger*, Commun. Math. Phys. 119, pp. 315-329, (1988).

[H] S. Helgason, *The Radon Transform*, Progress in Mathematics 5, Birkhäuser, (1980).

[He-No] G. M. Henkin - R. G. Novikov, *The $\overline{\partial}$ -equation in the multidimensional inverse scattering problem*, Russ. Math. Surv. 42 (4), 109-180, (1987).

[Ho] L. Hörmander, Symplectic classification of quadratic forms, and generalized Mehler formulas, *Math. Z.* 219 (3), 413-449, (1995).

[Is] H. Isozaki, *Multi-dimensional inverse scattering theory for Schrödinger operators*, Reviews in Mathematical Physics, vol. 8, (4), 591-622, (1996).

[Is-Ki] H. Isozaki - H. Kitada, *Modified wave operators with time-independent modofiers*, Papers of the College of Arts and Sciences, Tokyo Univ, Vol.32, 81-107, (1985).

[Jo] M. S. Joshi, *Explicitely recovering asymptotics of short-range potentials*, Commun. in Partial Differential equations, 25 (9-10), 1907-1923 (2000).

[Jo-Sa1] M. S. Joshi - A. Sa Barreto, *Recovering asymptotics of short range potentials*, Communications in Mathematical Physics, 193, 197-208 (1998).

[Jo-Sa2] M. S. Joshi - A. Sa Barreto, *Recovering asymptotics of metrics from fixed energy scattering data*, Invent. 137, 127-143 (1999).

[Ju] W. Jung, *Geometric approach to inverse scattering for Dirac equation*, J. Math. Phys. 36 (8), 3902-3921, (1995).

[Ki] H. Kitada, *A relation between the modified wave operators* $W_J^{\pm}$ *and* $W_D^{\pm}$, Papers of the College of Arts and Sciences, Tokyo Univ. , Vol 36, p. 91-105, (1987) . (1991).

[Lo-Th] M. Loss - B. Thaller, *Scattering of particles by long-range magnetic fields*, Annals of physics 176, p. 159-180, (1987).

[Me-Zw] R. B. Melrose - M. Zworski, *Scattering metrics and geodesic flow at infinity*, Invent. Math. 124, 389-436 (1996).

[Mo] E. Mourre, *Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators*, Comm. Math. Phys. 78, 391-408, (1981)

[Ni-Ro] F. Nicoleau - D. Robert, *Théorie de la diffusion quantique pour des perturbations à longue et courte portée du champ magnétique*, Annales de la faculté de Toulouse, Vol. XII $n°2$, p. 185-194, (1991).

[Ni1] F.Nicoleau, *Théorie de la diffusion quantique pour l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique*, Thèse de doctorat de l'Université de Rennes 1, (1991).

[Ni2] F. Nicoleau, *Approximation semi-classique du propagateur d'un système électromagnétique et phénomène de Aharonov-Bohm*, Helv. Phys. Acta, Vol. 65, (1992).

[Ni3] F. Nicoleau, *Matrices de diffusion pour l'opérateur de Schrödinger en présence d'un champ magnétique. Phénomène de Aharonov-Bohm*, Annales Inst. Henri Poincaré, Vol. 61 n 3, p. 329-346, (1994). Erratum, Annales Henri Poincaré, Vol. 4, (2003).

[Ni4] F. Nicoleau, *A stationary approach to inverse scattering for Schrödinger operators with first order perturbation*, Communication in P.D.E, Vol 22 (3-4), 527-553, (1997).

[Ni5] F. Nicoleau, *An inverse scattering problem with the Aharonov-Bohm effect*, Journal of Mathematical Physics, Issue 8, pp. 5223-5237, (2000).

[Ni6] F. Nicoleau, *Inverse scattering for Stark Hamiltonians with short-range potentials*, Asymptotic Analysis, 35 (3-4), pp. 349-359, (2003).

[Ni7] F. Nicoleau, *A constructive procedure to recover asymptotics of short-range or long-range potentials*, To appear in Journal of Differential Equations, (2004).

[Ni8] F. Nicoleau, *Inverse scattering for a Schrödinger operator with a repulsive potential*, Rapport de recherche Université de Nantes 04/05-1, (2004), Soumis.

[No1] R. G. Novikov, *The inverse scattering problem on a fixed energy level for the two-dimensional Shrödinger operator*, J. Funct. Anal. 103, n 2, 409-463, (1992).

[No2] R. G. Novikov, *The inverse scattering problem at fixed energy for the three-dimensional Schrödinger equation with an exponentially decreasing potential*, Comm. Math. Phys. 161, n 3, 569-595, (1994).

[Pe] P. Perry, *Scattering theory by the Enss method*, Mathematical Reports Vol. 1, Part. 1, (1983).

[Pe-To] M. Peshkin - A. Tonomura, *The Aharonov-Bohm effect*, Lectures notes in Physics, Springer-Verlag, (1989).

[Re-Si] M. Reed - R. Simon, *Methods of mathematical physics*, Vol. 1-4, Academic Press, (1978).

[Ro] D. Robert, *Autour de l'approximation semiclassique*, Progress in Mathematics, Vol. 68, Birkhaüser, Basel, (1987).

[Ro-Ya1] P. Roux - D. Yafaev, *On the mathematical theory of the Aharonov-Bohm effect*, J. Phys. A 35, no. 34, 7481–7492, (2002)

[Ro-Ya2] P. Roux - D. Yafaev, *The scattering matrix for the Schrödinger operator with a long-range electromagnetic potential*, J. Math. Phys. 44, no. 7, 2762–2786, (2003).

[Ru] S.N.M. Ruijsenaars, *The Aharonov-Bohm effect and scattering theory*, Annals of Physics 146, pp. 1-34, (1983).

[Sh] T. Shiota, *An inverse problem for the wave equation with first order perturbation*, Amer. journal of Maths., Vol. 107, n°1, p. 241-251, (1985).

[Ta] H. Tamura, *Shadow scattering by magnetic fields in two dimensions*, Annales Inst. Henri Poincaré, Vol. 63 n 3, p. 253-276, (1995).

[Uh] K.H. Uhlenbeck, *Removable singularities in Yang-Mills fields*, Commun. Math. Phys. 83, pp. 11-29, (1982).

[Va-Wa] A. Vasy - X. P. Wang, *Inverse scattering with fixed energy for dilation-analytic potentials*, à paraître dans Inverse Problems (2004).

[Wa] X. P. Wang, *On the Uniqueness of inverse scattering for N-body systems*, Inverse Problems 10, p. 765-784, (1994).

[We1] R. Weder, *Multidimensional inverse scattering in an electric field*, Journal of Functional Analysis, Vol. 139 (2), 441-465, (1996).

[We2] R. Weder, *The Aharonov-Bohm effect and time-dependent inverse scattering theory*, Inverse Problems, Vol. 18 (4), 1041-1056, (2002).

[Wh1] D. White, *Modified wave operators and Stark Hamiltonian*, Duke Math. Vol. 68 (1), 83-100, (1992).

[Wh2] D. White, *Long-range potential scattering by Enss's method in two Hilbert spaces*, Transactions of the A.M.S., Vol. 295, n1, p. 1-33, (1986).

[Ya1] D. Yafaev, *Mathematical scattering theory, General theory*, A.M.S Rhode Island, 105, (1992).

[Ya2] D. Yafaev, *The scattering amplitude for the Schrödinger equation with a long-range potential*, Comm. Math. Phys. 191, 183-218, (1998).

[Yaj] K. Yajima, *Schrödinger evolution equations with magnetic fields*, J. Analyse Math. 56, 29-76, (1991)