Une étude de diffusion inverse pour l'équation de Schrödinger avec champ électromagnétique.

François Nicoleau

Habilitation à diriger les recherches.
Nantes, vendredi 17 décembre 2004.

1 Introduction.

Dans cet exposé, nous développons une méthode robuste pour l'étude de problèmes de diffusion inverse pour des opérateurs de Schrödinger avec un champ électromagnétique.

Pour cela, nous considérons un couple de Hamiltoniens (H, H_0) où :

- H_0 est le Hamiltonien libre.
- H est une perturbation de H_0.

Les principaux objectifs :

- On commence par définir l'opérateur de diffusion $S = S(H, H_0)$, (cet opérateur a une interprétation physique).

• l'opérateur de diffusion S étant donné, nous répondons à la question suivante :

Peut-on reconstruire la perturbation à partir de l'opérateur de diffusion S ?

2 Un court historique du problème.

2.1 Diffusion quantique : survey.

Soit $H_0 = -\Delta$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ de domaine $D(H_0) = H^2(\mathbb{R}^n)$, et soit $H = H_0 + V(x)$, ($V(x)$ est le potentiel électrique).

Dans un souci de simplicité, supposons que $V \in C^\infty(I\!R^n)$ et vérifie :

$$(H_1) \qquad | \partial_x^\alpha V(x) | \leq C_\alpha < x >^{-\rho-|\alpha|} , \ \rho > 1,$$

où $< x >= (1+ | x |^2)^{\frac{1}{2}}$.

Il est bien connu que H est une perturbation à courte portée du Laplacien H_0 et en particulier les opérateurs d'onde de Møeller définis par :

$$(2.1) \qquad W^\pm = s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} \ e^{-itH_0} \ \text{ existent et sont complets,}$$

(c'est à dire, $Im(W^\pm) = \mathcal{H}_{ac}(H) =$ sous-espace absolument continu du Hamiltonien H).

Nous définissons maintenant l'opérateur de diffusion S comme un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$S = W^{+*}\, W^{-}. \tag{2.2}$$

Puisque S commute avec H_0, nous pouvons diagonaliser S à l'aide de la décomposition spectrale de H_0 grâce à l'application $F_0(\lambda)$; $F_0(\lambda) : L^2_s(\mathbb{R}^n) \to L^2(S^{n-1}),\ s > \frac{1}{2}$, qui est défini par :

$$\forall \omega \in S^{n-1}\ ,\ F_0(\lambda)f(\omega) = \lambda^{\frac{n-2}{4}} \hat{f}(\sqrt{\lambda}\omega). \tag{2.3}$$

Par définition $F_0(\lambda)H_0 = \lambda F_0(\lambda)$ et la matrice de diffusion $S(\lambda)$ est l'opérateur unitaire sur $L^2(S^{n-1})$ donné par (formellement) :

$$(2.4) \qquad S(\lambda)F_0(\lambda) = F_0(\lambda)S.$$

Rappelons la formule de représentation due à **Kuroda** :

$$(2.5) \quad S(\lambda) - 1 = -2i\pi F_0(\lambda)VF_0(\lambda)^* + 2i\pi F_0(\lambda)VR(\lambda+i0)VF_0(\lambda)^*,$$

où, **(principe d'absorption limite)**,

$$(2.6) \qquad R(\lambda+i0) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \left(H - (\lambda + i\epsilon)\right)^{-1} \quad ,$$

existe comme opérateur borné dans $B(L_s(\mathbb{R}^n);\ L_{-s}(\mathbb{R}^n)),\ s > \frac{1}{2}$.

A haute énergie, nous avons l'estimation suivante : $\forall s > \frac{1}{2}$,
$\forall \lambda \geq \lambda_0 > 0$,

$$(2.7) \qquad || < x >^{-s} R(\lambda+i0) < x >^{-s} ||_{B(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \ C_s \ \lambda^{-\frac{1}{2}} \ .$$

Par conséquent, le terme dominant dans (2.5) lorsque $\lambda \to +\infty$ est

$$(2.8) \qquad B(\lambda) = -2i\pi F_0(\lambda) V F_0(\lambda)^* \quad , \quad \text{(approximation de Born).}$$

Le noyau de $S(\lambda) - 1$, noté $T(\lambda, \theta, \omega)$, $\theta, \omega \in S^{n-1}$ est appelé **amplitude de diffusion**. Lorsque $\rho > \frac{n+1}{2}$, la **section efficace de diffusion** est donnée par :

$$(2.9) \qquad \sigma(\omega) \ = \ (2\pi)^{n+1} \ \lambda^{\frac{1-n}{2}} \ \int_{S^{n-1}} \ | \ T(\lambda, \theta, \omega) \ |^2 \ d\theta \ .$$

2.2 Diffusion inverse à haute énergie.

Le noyau de l'approximation de Born est donné par une intégrale oscillante :

$$(2.10) \qquad B(\lambda, \theta, \omega) = \lambda^{\frac{n-2}{2}} \ \int_{\mathbb{R}^n} \ e^{-i\sqrt{\lambda} x \cdot (\theta - \omega)} V(x) \ dx \ .$$

Par conséquent, si nous fixons $\xi \in I\!R^n \backslash 0$, nous avons dans le régime suivant : $\sqrt{\lambda}(\theta - \omega) = \xi$, $\lambda \to +\infty$,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{\frac{2-n}{2}} \; T(\lambda, \theta, \omega) = \hat{V}(\xi). \tag{2.11}$$

Donc, si nous connaissons $S(\lambda)$ pour $\lambda \geq \lambda_0$, nous pouvons reconstruire V, (**Fadeev**).

• En 1982, **Saito** a imaginé une autre approche pour reconstruire le potentiel électrique basée sur une idée similaire; si $x_0 \in I\!R^n$ est fixé, nous avons lorsque $\lambda \to +\infty$, et $n = 3$,

$$< (S(\lambda) - 1) e^{i\sqrt{\lambda} x_0 \cdot \omega}, \; e^{i\sqrt{\lambda} x_0 \cdot \omega} > \sim -i \; \lambda^{-\frac{1}{2}} \left(V * \frac{1}{\mid x \mid^2} \right) (x_0). \tag{2.12}$$

En utilisant (2.12), il est facile de reconstruire V.

• En 1995, **Enss-Weder** ont proposé une nouvelle méthode plus géométrique qui peut être étendue au cas longue portée (potentiels à la Dollard), au problème à N-corps, à l'effet Stark **([Weder] (1996), [N.] (2003))**, à l'opérateur de Dirac **[Jung] (1995)**, pour des opérateurs de Schrödinger avec potentiels répulsifs **[N.] (2004)**.

Plus précisément, si Φ, Ψ ont leur transformée de Fourier dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n), n \geq 2$, ils montrent que pour $\lambda \to +\infty$, et une direction $\omega \in S^{n-1}$,

$$(2.13) \qquad < e^{i\sqrt{\lambda}x.\omega}\Phi \ , \ (S-1)\ e^{i\sqrt{\lambda}x.\omega}\Psi > \sim \ -i\ \lambda^{-\frac{1}{2}} \ < \Phi, V^\omega \Psi >,$$

où

$$(2.14) \qquad V^\omega(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(x+t\omega)\ dt.$$

Grâce à l'inversion de la transformée de Radon, on détermine V.

2.3 Diffusion inverse à énergie fixée.

Beaucoup plus compliqué !! En général, on doit étendre les matrices de diffusion pour des énergies complexes, **(Fadeev)**.

Quelques résultats bien connus :

- **(Novikov)** (1994). Si V a une décroissance exponentielle :

$$| V(x) | \leq a\ e^{-b|x|}, \quad a, b > 0, \tag{2.15}$$

la connaissance de $S(\lambda)$, λ fixé, permet de retrouver V, $n \geq 3$.

- si V vérifie (H_1) avec $\rho > n$, la donnée de $S(\lambda)$ pour $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \epsilon]$, $\epsilon > 0$ détermine la transformée de Fourier de V dans la boule $\{\xi\ : |\ \xi\ | \leq 2\sqrt{\lambda_0}\ \}$, **(Henkin-Novikov)** (1987).

Ce résultat a été étendu par **Isozaki** (1996) pour $\rho > \frac{3}{2}$.

• Désignons par $S^{-2}_{cl}(\mathbb{R}^n)$ la classe des symboles classiques d'ordre -2, i.e l'ensemble des fonctions lisses $V(x)$ telles qu'il existe une suite de fonctions homogènes f_j d'ordre $-j$ telles que

$$(2.16) \qquad | \, \partial_x^\alpha \left(V(x) - \sum_{j=2}^{N-1} f_j(x) \right) | \leq \ C_{\alpha,N} \ < x >^{-N-|\alpha|} \ .$$

En 1998, **Joshi and Sa Barreto** ont montré que si $V_1, \ V_2 \in S^{-2}_{cl}(\mathbb{R}^n)$ pour $n \geq 3$, et si les matrices de diffusion associées à une énergie fixée non nulle sont égales à un terme lisse près, alors $V_1(x) - V_2(x) = O(< x >^{-\infty})$.

Nous verrons que l'approche stationnaire développée dans la prochaine section permet de retrouver et généraliser ce dernier résultat, dans un sens à préciser.

3 Une méthode stationnaire pour le problème de diffusion inverse.

Dans cette section, nous développons une méthode stationnaire pour déterminer le **développement asymptotique complet** de l'opérateur de diffusion à haute énergie. Cette nouvelle approche nous permettra d'étudier :

- Des Hamiltoniens avec champs électromagnétiques (à courte ou longue portée **génériques**).

- Le phénomène de Aharonov-Bohm, (présence d'**obstacles**).

- Un problème de diffusion inverse à **énergie localisée** près d'une énergie fixée.

3.1 Champs électromagnétiques.

H désigne l'opérateur de Schrödinger, vu comme une perturbation de $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$ sur $I\!R^n$, $n \geq 2$, qui décrit l'interaction d'une particule chargée dans un champ électromagnétique :

$$(3.1) \qquad H \;=\; \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(D_j - A_j(x))^2 + V(x) \;,$$

où

$D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$.

$V(x)$ est le potentiel électrique.

$A \;= \sum_{j=1}^{n} A_j \; dx_j$ est le potentiel magnétique.

$B \;= dA$ est le champ magnétique identifiée avec la matrice antisymétrique (b_{jk}), $b_{jk}(x) = \partial_{x_j} A_k(x) - \partial_{x_k} A_j(x)$.

Supposons que $A, V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et vérifient : $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$(H_1) \qquad | \, \partial_x^\alpha V(x) \, | \leq C_\alpha < x >^{-\delta - |\alpha|} \qquad , \qquad \delta > 0 \ .$$

$$(H_2) \qquad | \, \partial_x^\alpha A(x) \, | \leq C_\alpha < x >^{-\rho - |\alpha|} \qquad , \qquad \rho > 0 \ .$$

On suppose de plus que A vérifie la jauge transversale :

$$(H_3) \qquad A(x) \cdot x = 0 \ , \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Cette jauge détermine uniquement le potentiel A. Plus précisément,

$$(3.2) \qquad A(x) \ = \ - \int_0^1 s \ B(sx) \cdot x \ ds \ .$$

Attention : un champ magnétique dans $I\!R^2$ à support compact et de flux total non nul engendre un potentiel magnétique A à longue portée, en $O(|\, x\,|^{-1})$. Cependant :

Théorème 1. : Loss-Thaller (1987).
On suppose vérifiées (H_1), (H_2) *avec* $\delta > 1$, $\rho > \frac{1}{2}$ *et* (H_3).

Alors les opérateurs d'onde

(3.3) $\quad W^{\pm} \; = \; s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} \; e^{-itH_0}$ $\quad$ existent et sont complets.

En 1990, [**N. - Robert**] proposent une nouvelle preuve stationnaire permettant l'étude précise des matrices de diffusion [**Roux-Yafaev**] **(2003)** , [**N.**] **(1994 et 2003)**.

On peut donc définir l'opérateur de diffusion comme dans (2.2) par

$$S = S(A, V) = W^{+*} W^{-}.$$

Théorème 2. : N. (1997).
Soient V_1, V_2 *vérifiant* (H_1) *et soient* A_1, A_2 *vérifiant* $(H_2) - (H_3)$.
On a :

$$S(A_1, V_1) = S(A_2, V_2) \iff A_1 = A_2 \text{ et } V_1 = V_2. \tag{3.4}$$

La preuve de ce théorème s'appuie sur l'étude de l'asymptotique à haute énergie de l'opérateur de diffusion. Nous étudions le même objet que dans Enss-Weder mais avec une méthode stationnaire. Cette approche permet d'obtenir **l'asymptotique complète à haute énergie**. Insistons sur le fait que l'asymptotique complète n'est pas indispensable pour démontrer le théorème précédent, mais que ce ne sera pas le cas lorsque nous étudierons un problème inverse à énergie localisée près d'une énergie fixée comme dans Joshi-Sa Barreto.

Notons aussi que le Théorème 2 a été également démontré par **[Arians], (1997)**, sous des hypothèses légèrement différentes, en utilisant la méthode dépendante du temps de Enss-Weder

Théorème 3. Asymptotique à haute énergie : N. (1997). *Sous les hypothèses* $(H_1) - (H_3)$, $\forall\ \widehat{\Phi},\ \widehat{\Psi} \in C_0^\infty(I\!R^n)$, *on a l'asymptotique suivante lorsque* $\lambda \to +\infty$ *:*

$$(3.5) \quad < e^{i\sqrt{\lambda}x.\omega}\Phi\ ,\ S\ e^{i\sqrt{\lambda}x.\omega}\Psi > \sim \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^{-\frac{j}{2}}\ < \Phi,\ a_{j,\omega}(x,D)\ \Psi >,$$

où $a_{j,\omega}(x,D)$ *sont des opérateurs différentiels. En particulier,*

$$a_{0,\omega}(x,D) \ = \ e^{ic_A(x,\omega)},$$

avec

$$(3.6) \qquad c_A(x,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x+t\omega)\cdot\omega\ dt,$$

et

$$a_{1,\omega}(x,D) \ = \ i \ e^{ic_A(x,\omega)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \ V(x+t\omega) \ dt \ + a_{A,\omega}(x,D) \right),$$

où $a_{A,\omega}(x,D)$ *est un opérateur différentiel ne dépendant que de* A*.*

Le Théorème 2 n'est juste qu'une application du Théorème 3, en utilisant l'inversion de la transformée de Radon.

Esquisse de preuve du Théorème 3 :

Pour simplifier, supposons d'abord que $A=0$. Pour déterminer l'asymptotique à haute énergie de :

$$(3.7) \qquad F(\lambda) \ = < \ e^{i\sqrt{\lambda}x.\omega}\Phi \ , \ S(0,V) \ e^{i\sqrt{\lambda}x.\omega}\Psi \ > \ ,$$

il est naturel d'introduire les deux opérateurs :

$$(3.8) \qquad \Omega^{\pm}(\lambda,\omega) \ = \ e^{-i\sqrt{\lambda}x.\omega} \ W^{\pm} \ e^{i\sqrt{\lambda}x.\omega} \ ,$$

puisque

$$(3.9) \qquad F(\lambda) \ = < \Omega^{+}(\lambda,\omega) \ \Phi, \ \Omega^{-}(\lambda,\omega) \ \Psi > \ .$$

Il est clair que,

$$(3.10) \qquad \Omega^{\pm}(\lambda,\omega) \ = \ s - \lim_{t \to \pm\infty} \ e^{itH(\lambda,\omega)} \ e^{-itH_0(\lambda,\omega)} \ ,$$

où

$$(3.11) \qquad H_0(\lambda,\omega) \ = \ \frac{1}{2}(D+\sqrt{\lambda}\omega)^2, \ H(\lambda,\omega) \ = H_0(\lambda,\omega) + V(x).$$

Notre approche stationnaire est très efficace et est assez proche de celle utilisée par **Isozaki - Kitada**.

Idée de base :

Nous construisons deux opérateurs pseudo-différentiels $J^{\pm}(\lambda, \omega)$, (nous verrons plus tard que ce sont en fait des opérateurs différentiels), tels que pour $\lambda >> 1$,

$$(3.12) \qquad \Omega^{\pm}(\lambda, \omega)\ \Phi = \lim_{t \to \pm\infty}\ e^{itH(\lambda,\omega)}\ J^{\pm}(\lambda, \omega)\ e^{-itH_0(\lambda,\omega)}\ \Phi\ ,$$

$$(3.13) \qquad ||\ (\Omega^{\pm}(\lambda, \omega) - J^{\pm}(\lambda, \omega))\Phi\ \ ||\ =\ O(\lambda^{-\infty})\ .$$

En utilisant (3.13), nous obtiendrons donc :

$$F(\lambda)\ = < J^{+}(\lambda, \omega)\Phi,\ J^{-}(\lambda, \omega)\Psi >\ + O\ (\lambda^{-\infty})\ .$$

Nous pourrons ensuite calculer facilement l'asymptotique complète à haute énergie.

Supposons que (3.12) soit vérifiée, nous avons :

$$(3.14) \quad \Omega^{\pm}(\lambda,\omega) - J^{\pm}(\lambda,\omega) = \int_0^{\pm\infty} e^{itH(\lambda,\omega)}\ T^{\pm}(\lambda,\omega)\ e^{-itH_0(\lambda,\omega)}\ dt$$

où

$$(3.15) \qquad T^{\pm}(\lambda,\omega) \ = \ i\left(H(\lambda,\omega)\ J^{\pm}(\lambda,\omega) \ - \ J^{\pm}(\lambda,\omega)\ H_0(\lambda,\omega)\right) \ .$$

Par conséquent, l'idée est de construire $J^{\pm}(\lambda,\omega)$ comme :

$$(3.16) \qquad J^{\pm}(\lambda,\omega) = Op\ \left(\sum_{j\geq 0} \lambda^{-\frac{j}{2}}\ d_j^{\pm}(x,\xi,\omega)\right)\ ,\ d_0^{\pm} = 1,$$

et afin d'obtenir $T^{\pm}(\lambda,\omega) = O\ (\lambda^{-\infty})$, nous devons résoudre les équations de transport suivantes :

$$(3.17) \qquad \omega\cdot\nabla d_{p+1}^{\pm} = -iV(x)d_p^{\pm} + \frac{i}{2}\Delta d_p^{\pm} - \xi\cdot\nabla d_p^{\pm}\ .$$

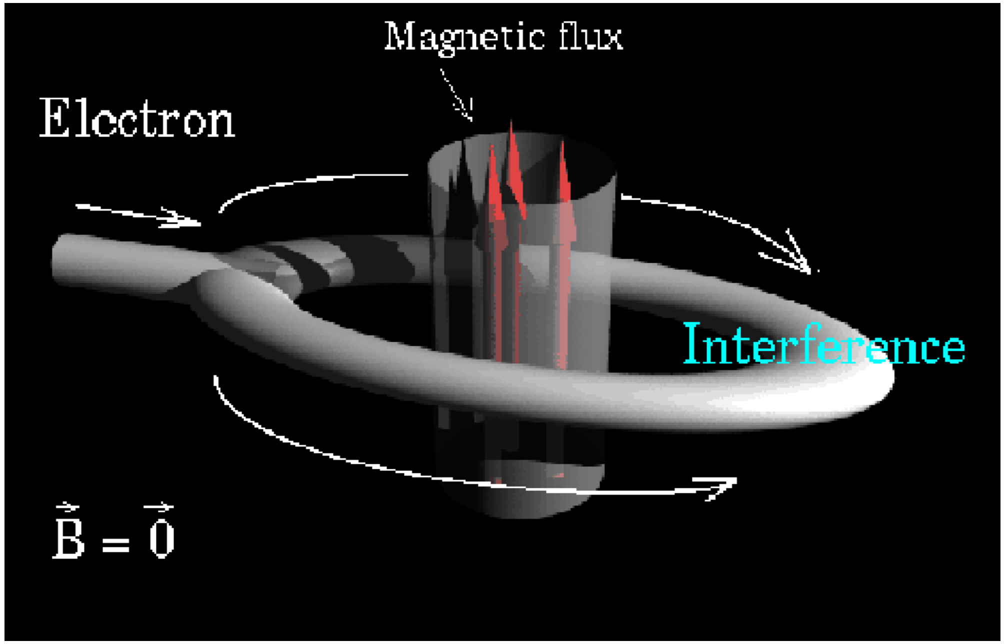
Nous résolvons (3.17) et il n'est pas difficile ensuite de voir que (3.12) – (3.13) sont vérifiées. Le Théorème 3 est ainsi démontré.

Pour le cas général $A \neq 0$, nous cherchons $J^{\pm}(\lambda, \omega)$ comme des opérateurs intégraux de Fourier et nous suivons la même stratégie.

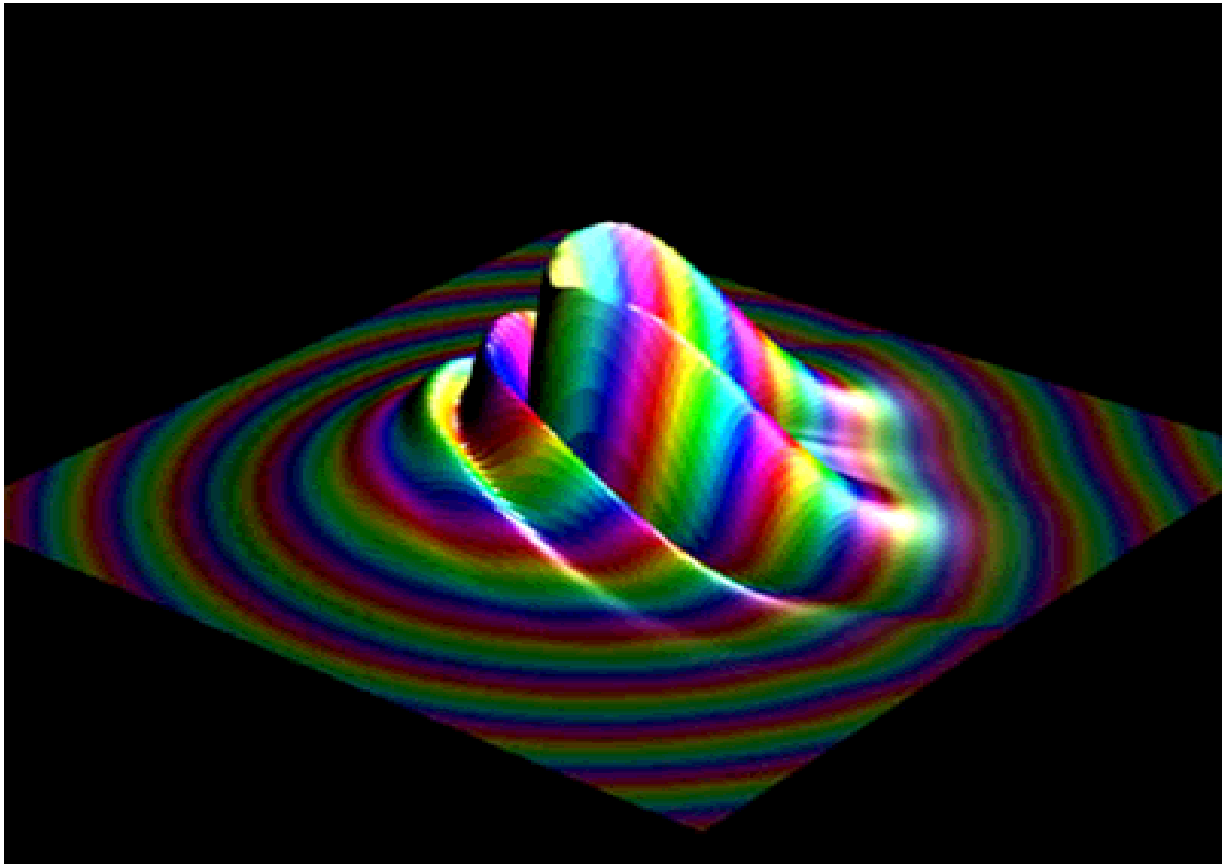
3.2 Le phénomène de Aharonov-Bohm.

Rappelons brièvement de quoi il s'agit : on considère deux faisceaux de particules chargées circulant autour d'un solénoïde parcouru par un courant. Celui-ci engendre un champ magnétique B, nul en dehors du solénoïde. Suivant les valeurs du flux magnétique, on constate des phénomènes d'interférences que la mécanique classique ne sait expliquer : les particules restant en dehors du support du champ magnétique B, la force de Lorentz $F = mv \wedge B$ est nulle.

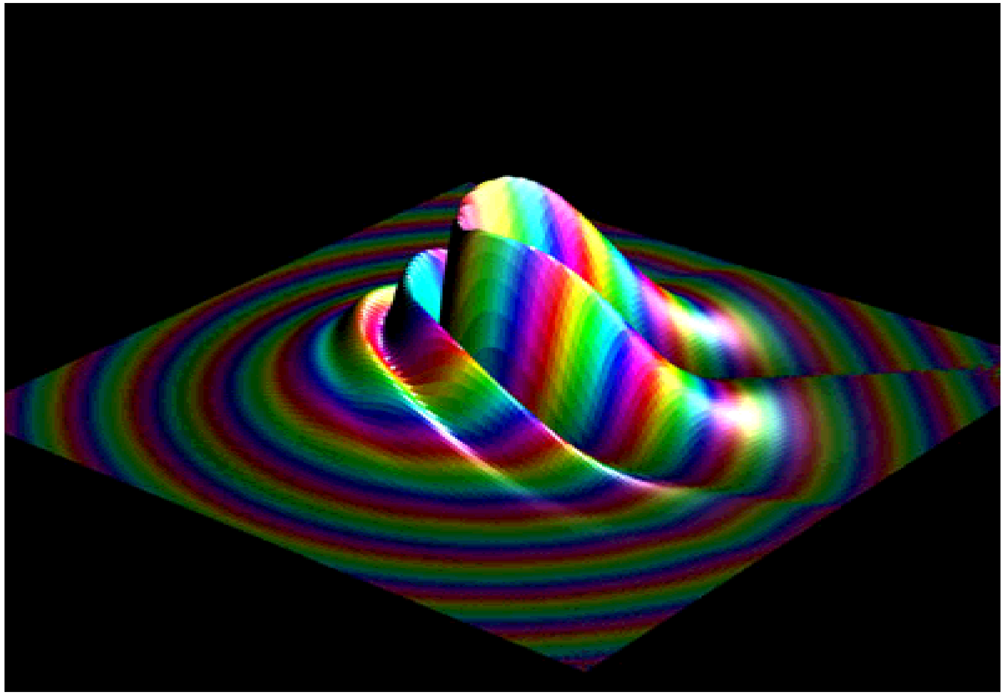
Le phénomène de Aharonov-Bohm.



Le paquet d'onde heurte un obstacle cylindrique. Cette image est particulièrement intéressante lorsqu'on la compare avec la suivante.



Le paquet d'onde heurte le même obstacle cylindrique comme sur l'image précédente, mais cette fois-ci, il y a un champ magnétique à l'intérieur de l'obstacle. On peut voir l'influence du champ magnétique : il y a une ligne nodale sur le côté droit de l'obstacle, ligne absente sur l'image précédente.



Explication heuristique du phénomène :

La mécanique quantique permet de comprendre cet effet : le champ magnétique B engendre dans $\mathbb{R}^3$ un potentiel magnétique A qui est lié à B par la relation $B = dA$. Ce potentiel est non nul, même en dehors du support de B, car d'après le théorème de Stokes, on a :

$$\Phi \ = \ \int\int_S B \ dS = \int_\gamma A \ dl \ ,$$

Φ étant le flux du champ magnétique à travers une surface S portée par le chemin fermé γ. Le formalisme quantique utilise, dans la définition du Hamiltonien du système, le potentiel magnétique A au lieu du champ magnétique B.

Etude mathématique :

Tout d'abord, commençons par quelques notations :

$H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$ est l'opérateur libre de Schrödinger sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, de domaine $H^2(\mathbb{R}^n)$.

On considère un obstacle compact K dans $\mathbb{R}^n$ à bord lisse et on note $\Omega = \mathbb{R}^n \backslash K$.

On définit le Hamiltonien H comme l'opérateur différentiel sur Ω :

$$H = H(A,V) = \frac{1}{2}\,(D - A(x))^2 + V(x)\ . \tag{3.18}$$

On suppose que le potentiel électrostatique $V \in C^\infty(\overline{\Omega})$, et vérifie la condition à courte portée (H_1).

Soient B une 2-forme champ magnétique, $B \in C_0^\infty(I\!\!R^n)$ (pour simplifier dans cet exposé).

Nous préférons ici travailler avec la 1-forme potentiel magnétique $A = (A_1, ..., A_n)$ vérifiant la jauge de Coulomb ($div\ A = 0$), donnée par :

$$(3.19) \qquad A_j(x) \ = \ \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=1}^{n} \int_{I\!\!R^n} \frac{x_k - y_k}{\mid x - y \mid^n}\, b_{jk}(y)\, dy\ , \quad \forall x \in I\!\!R^n,$$

où σ_{n-1} est le volume de la sphère unité dans $I\!\!R^n$.

On note aussi par H la réalisation de Dirichlet de domaine $D(H) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Enfin, soit $\mathcal{I}$ l'opérateur de restriction, $\mathcal{I} : L^2(I\!\!R^n) \to L^2(\Omega)$ défini par $\mathcal{I}\Phi = \Phi_{|\Omega}$.

On définit les opérateurs d'onde $W^{\pm}$ en utilisant le formalisme à deux espaces de Hilbert :

Théorème 4. : N. (2000).
Les opérateurs d'onde $W^{\pm} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\Omega)$ *définis par :*

$$W^{\pm} = s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} \, \mathcal{I} \, e^{-itH_0} , \tag{3.19}$$

existent et sont complets.

On note encore par $S = S(A, V)$ l'opérateur de diffusion.

Afin de résoudre le problème inverse, nous supposerons de plus que K est un **obstacle convexe connu**.

Théorème 5. : N. (2000), *(le cas de la dimension* n, $n \geq 3$*).*
Sous les hypothèses précédentes, on a :

$$S(A_1, V_1) = S(A_2, V_2) \iff B_1 = B_2 \text{ et } V_1 = V_2 \text{ dans } \Omega \; .$$

Dans le cas de la dimension 2, le résultat est beaucoup plus compliqué : une condition de quantification du flux apparaît. De plus, afin d'utiliser un théorème d'inversion de la transformée de Radon en dimension 2, nous devons supposer que :

$$(H_1') \qquad \forall m \geq 0 \ , \ < x >^m V \ \in L^\infty(I\!R^2).$$

Notons β le flux magnétique (normalisé) donné par :

$$(3.20) \qquad \beta = \frac{1}{2\pi} \int_{I\!R^2} b(x) \ dx \quad \text{avec} \quad b = b_{12} = -b_{21}.$$

Théorème 6. : N. (2000), *(l'effet Aharonov-Bohm).*
Supposons que supp $B_j \subset K$, *alors :*

$S(A_1, V_1) = S(A_2, V_2) \Longrightarrow \beta_1 = \beta_2 \ mod\ 2, \ V_1 = V_2 \ dans\ \Omega.$

Remarque :

Inversement, si $\beta_1 = \beta_2 \ mod \ 2, \ V_1 = V_2$ dans Ω, les sections efficaces de diffusion σ_1 et σ_2 associées coïncident. Le Théorème 6 est donc *physiquement optimal.*

Esquisse de preuve :

Le problème avec obstacle peut être traité de la même façon en déterminant une classe de fonctions test qui ont une interaction négligeable avec l'obstacle $\Longrightarrow$ localisation en espace.

Soit $\omega \in S^{n-1}$ une direction fixée, S^{n-1} étant la sphère unité de $I\!R^n$. On note X_ω la *zone éclairée* :

$$X_\omega \ = \ \{ \ x \in I\!R^n \ : \ \forall t \in I\!R, \ x + t\omega \ \in \Omega \ \}.$$

Dans le cas des obstacles, nous travaillons localement en espace : on choisit donc des fonctions test Φ et Ψ à support dans X_ω.

D'un autre côté, en procédant ainsi, on perd le contrôle du **spreading** (l'étalement de la fonction d'onde) : lorsque $\hat{\phi},\ \hat{\psi} \in C_0^\infty(I\!R^n)$, les translations en énergie l'emportent sur le spreading.

Nous introduisons donc une fonction de troncature en énergie : $\Phi \longleftrightarrow \chi(\lambda^{-\epsilon} D)\ \Phi,\ \ \epsilon < \frac{1}{2},\ \chi = 1$ dans un voisinage de 0. $\diamond$

Notons qu'en 2001, **Weder** a traité avec une méthode dépendant du temps, un problème similaire pour des champs magnétiques singuliers, permettant d'étudier le problème bien connu du *fil de flux*.

3.3 Asymptotique spatiale d'un potentiel.

Dans cette section, nous étudions un problème de diffusion inverse pour la paire (H, H_0) sur $L^2(I\!R^n)$, $n \geq 2$, où l'opérateur libre est $H_0 = -\Delta$ de domaine $D(H_0) = H^2(I\!R^n)$, et

$$H = H_0 + V, \tag{3.21}$$

avec un potentiel $V \in C^\infty(I\!R^n)$ vérifiant (H_1).

Soit S l'opérateur de diffusion défini par :

$$S = W^{+*}(H, H_0)\ W^{-}(H, H_0). \tag{3.22}$$

Afin de localiser l'opérateur de diffusion près d'une énergie $\lambda > 0$ fixée, nous introduisons une fonction de troncature $\chi \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$, $\chi = 1$ dans un voisinage de $\lambda > 0$.

Le but de cette section est d'obtenir des informations sur le potentiel à partir de l'opérateur de diffusion localisé : $S\chi(H_0)$.

Nous allons montrer que pour $n \geq 3$, $S\chi(H_0)$ détermine l'asymptotique spatiale du potentiel à l'infini, en étudiant :

$$F(h) =< S\chi(H_0)\Phi_{h,\omega}, \Psi_{h,\omega} > \ , \tag{3.23}$$

où $\Phi_{h,\omega}$, $\Psi_{h,\omega}$ sont des fonctions test convenables et $h \to 0$.

Pour simplifier, dans cet exposé, nous supposons que V est un symbole classique d'ordre -2, i.e il existe une suite de fonctions homogènes f_j d'ordre $-j$ telles que

$$| \partial_x^\alpha \left(V(x) - \sum_{j=2}^{N-1} f_j(x) \right) | \leq \ C_{\alpha,N} \ < x >^{-N-|\alpha|} \ . \tag{3.24}$$

Commençons par la définition des paquets d'ondes $\Phi_{h,\omega}$, $\Psi_{h,\omega}$.

Tout d'abord, soit $U(h)$, $h > 0$, l'opérateur unitaire sur $L^2(I\!R^n)$ défini par :

$$U(h)\Phi(x) = h^{\frac{n}{2}}\ \Phi(hx). \tag{3.25}$$

Nous avons également besoin d'une fonction de troncature en énergie $\chi_0 \in C_0^\infty(I\!R^n)$ telle que $\chi_0(\xi) = 1$ si $| \xi | \leq 1$, $\chi_0(\xi) = 0$ si $| \xi | \geq 2$, (comme dans la section précédente, χ_0 est seulement introduite pour contrôler le spreading des paquets d'onde).

Pour $\omega \in S^{n-1}$, on écrit $x \in I\!R^n$ comme $x = y + t\omega$, $y \in \Pi_\omega =$ hyperplan orthogonal à ω et on considère la zone (loin de l'origine) :

$$X_\omega = \{x = y + t\omega \in I\!R^n\ : | y | \geq 1\ \}. \tag{3.26}$$

Définition des paquets d'onde.

Pour $\Phi \in C_0^\infty(X_\omega)$ et $\epsilon > 0$ convenable, on pose :

$$\Phi_{h,\omega} = e^{i\sqrt{\lambda}x.\omega}\ U(h)\ \chi_0(h^\epsilon D)\ \Phi\ , \tag{3.27}$$

où $D = -i\nabla$, ($\Psi_{h,\omega}$ est défini de la même façon avec $\Psi \in C_0^\infty(X_\omega)$).

Maintenant, on choisit ϵ afin de localiser les paquets d'onde près de l'énergie fixée $\lambda > 0$.

Lemme 7.

Pour $\epsilon < 1$ et $h \ll 1$, on a :

$$\chi(H_0)\Phi_{h,\omega} \ = \ \Phi_{h,\omega}. \tag{3.28}$$

Nous avons le théorème suivant; en fait nous avons un résultat similaire pour des potentiels à courte ou longue portée génériques (en travaillant avec des opérateurs d'ondes modifiés).

Théorème 8. : N. (2004).
Supposons que $V \in S_{cl}^{-2}(\mathbb{R}^n)$. *On a l'asymptotique suivante lorsque* $h \to 0$ *:*

$$(3.29) \quad < (S-1)\chi(H_0)\Phi_{h,\omega}, \Psi_{h,\omega} > \sim \sum_{j \geq 1} h^j \ < \Phi, \ A_j(x,\omega,D) \ \Psi >$$

où $A_j(x,\omega,D)$ *est un opérateur différentiel donné par :*

$$(3.30) \qquad A_j(x,\omega,D) = \frac{i}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{j+1}(x+t\omega)\ dt \ + \ B_j(x,\omega,D),$$

avec $B_1 = 0$ *et pour* $j \geq 2$, $B_j(x,\omega,D)$ *est un opérateur différentiel ne dépendant seulement que des fonctions* f_k, $2 \leq k \leq j$.

Esquisse de preuve :

Puisque V est un symbole classique d'ordre -2, on construit, pour le cas $(+)$, le modificateur $J^+(h,\omega)$, comme un opérateur pseudo-différentiel, (en fait un opérateur différentiel), de symbole :

$$J^+(h,\omega) = op\ (\sum_{k\geq 0}\ h^k\ d_k^+(x,\xi,\omega))\quad ,\quad d_0^+ = 1. \tag{3.31}$$

Pour parler simplement, on construit d_k^+ pour que $T^+(h,\omega) = O(h^\infty)$. Un calcul facile nous montre que nous devons résoudre les équations de transport :

$$-2i\sqrt{\lambda}\omega\cdot\nabla d_1^+ + f_2 = 0, \tag{3.32}$$

et pour $m \geq 1$,

$$-2i\sqrt{\lambda}\omega\cdot\nabla d_{m+1}^+ - 2i\xi\cdot\nabla d_m^+ - \Delta d_m^+ + \sum_{k=0}^{m}\ f_{m-k+2}\ d_k^+ = 0. \tag{3.33}$$

Le Théorème 8 en découle comme dans la section précédente. $\diamond$

Si on note par $S^{-\infty}(I\!\!R^n)$ l'ensemble des fonctions à décroissance rapide, grâce au théorème d'inversion de la transformée de Radon, on obtient un résultat proche de celui de **Joshi- Sa Barreto**.

Corollaire 9. : N. (2004).
Supposons que $V_1,\ V_2 \in S_{cl}^{-2}(I\!\!R^n)$, $n \geq 3$ *et* $S_1\chi(H_0) = S_2\chi(H_0)$.

Alors : $V_1 - V_2 \in S^{-\infty}(I\!\!R^n)$.

En particulier, si $V_1,\ V_2$ *sont des potentiels rationnels d'ordre inférieur à* -2*, alors* $V_1 = V_2$.

Commentaires :

En utilisant les résultats de Isozaki, le Corollaire 9 est encore vrai pour $n = 2$. Néanmoins, comme cela a été remarqué par **Grinevich** en 1986, pour $n = 2$, on peut construire des exemples de potentiels rationnels à décroissance à l'infini en $\mid x \mid^{-2}$, et d'amplitude de diffusion nulle pour une **énergie fixée**.