Annexe
Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques
Classe terminale de la série scientifique

L'enseignement des mathématiques au collège et au lycée a pour but de donner à chaque élève la culture mathématique indispensable pour sa vie de citoyen et les bases nécessaires à son projet de poursuite d'études.
Le cycle terminal de la série S procure un bagage mathématique solide aux élèves désireux de s'engager dans des études supérieures scientifiques, en les formant à la pratique d'une démarche scientifique et en renforçant leur goût pour des activités de recherche.
L'apprentissage des mathématiques cultive des compétences qui facilitent une formation tout au long de la vie et aident à mieux appréhender une société en évolution. Au-delà du cadre scolaire, il s'inscrit dans une perspective de formation de l'individu.

Objectif général

Outre l'apport de nouvelles connaissances, le programme vise le développement des compétences suivantes :

- mettre en œuvre une recherche de façon autonome ;
- mener des raisonnements ;
- avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
- communiquer à l'écrit et à l'oral.

Raisonnement et langage mathématiques

Comme en classe de seconde, les capacités d'argumentation, de rédaction d'une démonstration et de logique font partie intégrante des exigences du cycle terminal.

Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique ne font pas l'objet de cours spécifiques mais prennent naturellement leur place dans tous les champs du programme. Il importe toutefois de prévoir des moments d'institutionnalisation de certains concepts ou types de raisonnement, après que ceux-ci ont été rencontrés plusieurs fois en situation.

De même, le vocabulaire et les notations mathématiques ne sont pas fixés d'emblée, mais sont introduits au cours du traitement d'une question en fonction de leur utilité.

Il convient de prévoir des temps de synthèse, l'objectif étant que ces éléments soient maîtrisés en fin de cycle terminal.

Utilisation d'outils logiciels

L'utilisation de logiciels, d'outils de visualisation et de simulation, de calcul (formel ou scientifique) et de programmation change profondément la nature de l'enseignement en favorisant une démarche d'investigation.

En particulier lors de la résolution de problèmes, l'utilisation de logiciels de calcul formel limite le temps consacré à des calculs très techniques afin de se concentrer sur la mise en place de raisonnements.

L'utilisation de ces outils intervient selon trois modalités :

- par le professeur, en classe, avec un dispositif de visualisation collective ;
- par les élèves, sous forme de travaux pratiques de mathématiques ;
- dans le cadre du travail personnel des élèves hors de la classe.

Diversité de l'activité de l'élève

Les activités proposées en classe et hors du temps scolaire prennent appui sur la résolution de problèmes purement mathématiques ou issus d'autres disciplines. De nature diverse, elles doivent entraîner les élèves à :

- chercher, expérimenter, modéliser, en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
- choisir et appliquer des techniques de calcul ;
- mettre en œuvre des algorithmes ;
- raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- expliquer oralement une démarche, communiquer un résultat par oral ou par écrit.

Des éléments d'épistémologie et d'histoire des mathématiques s'insèrent naturellement dans la mise en œuvre du programme. Connaître le nom de quelques mathématiciens célèbres, la période à laquelle ils ont vécu et leur

© Ministère de l'éducation nationale, de la jeunesse et de la vie associative > www.education.gouv.fr

contribution fait partie intégrante du bagage culturel de tout élève ayant une formation scientifique. La présentation de textes historiques aide à comprendre la genèse et l'évolution de certains concepts.

Fréquents, de longueur raisonnable et de nature variée, les travaux hors du temps scolaire contribuent à la formation des élèves et sont absolument essentiels à leur progression. Ils sont conçus de façon à prendre en compte la diversité et l'hétérogénéité de leurs aptitudes.

Les modes d'évaluation prennent également des formes variées, en phase avec les objectifs poursuivis. En particulier, l'aptitude à mobiliser l'outil informatique dans le cadre de la résolution de problèmes est à évaluer.

Organisation du programme

Le programme fixe les objectifs à atteindre en termes de capacités. Il est conçu pour favoriser une acquisition progressive des notions et leur pérennisation. Son plan n'indique pas la progression à suivre.

À titre indicatif, on pourrait consacrer la moitié du temps à l'analyse, l'autre moitié se répartissant équitablement entre géométrie et probabilités-statistique.

Les capacités attendues indiquent un niveau minimal de maîtrise des contenus en fin de cycle terminal. La formation ne s'y limite pas.

Les capacités attendues dans le domaine de l'algorithmique d'une part et du raisonnement d'autre part sont rappelées en fin de programme. Elles doivent être exercées à l'intérieur de chaque champ du programme.

Plusieurs démonstrations, ayant valeur de modèle, sont repérées par le symbole ▣. Certaines sont exigibles et correspondent à des capacités attendues.

De même, les activités de type algorithmique sont signalées par le symbole ◇.

Les commentaires notés ⇆ distinguent des thèmes pouvant se prêter à des ouvertures interdisciplinaires, en concertation avec les professeurs d'autres disciplines scientifiques.
Quelques propositions d'approfondissement, destinées à des activités dans le cadre de l'accompagnement personnalisé, figurent en italique avec la mention AP.

1. Analyse

Comme dans les classes précédentes, l'activité mathématique est motivée par la résolution de problèmes. L'un des objectifs du programme est de permettre à l'élève, par une consolidation et un enrichissement des notions relatives aux suites et aux fonctions, d'étudier un plus grand nombre de phénomènes discrets ou continus.

La notion de limite de suite fait l'objet d'une étude approfondie. On prépare ainsi la présentation des limites de fonctions.
L'ensemble des fonctions mobilisables est élargi par l'introduction des fonctions exponentielle, logarithme, sinus et cosinus. La fonction exponentielle intervenant dans différents champs du programme, il est souhaitable de l'introduire assez tôt dans l'année.
Enfin, s'ajoute le nouveau concept d'intégration qui, bien que modestement abordé et développé, demeure un concept fondamental de l'analyse.

L'acquisition d'automatismes de calcul demeure un objectif du programme, cependant, dans le cadre de la résolution de problèmes, on a recours si besoin à un logiciel de calcul formel ou scientifique.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Suites		
Raisonnement par récurrence.	• Savoir mener un raisonnement par récurrence.	Ce type de raisonnement intervient tout au long de l'année et pas seulement dans le cadre de l'étude des suites.
Limite finie ou infinie d'une suite.	◇ Dans le cas d'une limite infinie, étant donnés une suite croissante (u_n) et un nombre réel A, déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel u_n est supérieur à A.	Pour exprimer que u_n tend vers l quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». Pour exprimer que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on dit que : « tout intervalle de la forme $]A,+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». Comme en classe de première, il est important de varier les approches et les outils sur lesquels le raisonnement s'appuie. On présente des exemples de suites qui n'ont pas de limite.
Limites et comparaison.	▣ Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que : - u_n est inférieur ou égal à v_n à partir d'un certain rang ; - u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$; alors v_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.	▣ On démontre que si une suite est croissante et admet pour limite l, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à l. Le théorème dit « des gendarmes » est admis.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Opérations sur les limites.	• Étudier la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux suites.	
Comportement à l'infini de la suite (q^n), q étant un nombre réel.	▣ Démontrer que la suite (q^n), avec $q>1$, a pour limite $+\infty$.	On démontre par récurrence que pour a réel strictement positif et tout entier naturel n : $(1+a)^n \geq 1+na$.
	• Déterminer la limite éventuelle d'une suite géométrique.	On peut étudier des situations où intervient la limite de la somme des premiers termes d'une suite géométrique.
Suite majorée, minorée, bornée.	• Utiliser le théorème de convergence des suites croissantes majorées.	Ce théorème est admis. ▣ Il est intéressant de démontrer qu'une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$. Des exemples de suites récurrentes, en particulier arithmético-géométriques, sont traités en exercice. ◇ Des activités algorithmiques sont menées dans ce cadre. (AP) *Approximations de réels (π, e, nombre d'or, etc.).*
Limites de fonctions Limite finie ou infinie d'une fonction à l'infini. Limite infinie d'une fonction en un point.		Le travail réalisé sur les suites est étendu aux fonctions, sans formalisation excessive. L'objectif essentiel est de permettre aux élèves de s'approprier le concept de limite, tout en leur donnant les techniques de base pour déterminer des limites dans les exemples rencontrés en terminale.
Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions.	• Déterminer la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions.	La composée de deux fonctions est rencontrée à cette occasion, mais sans théorie générale.
Limites et comparaison.	• Déterminer des limites par minoration, majoration et encadrement.	
Asymptote parallèle à l'un des axes de coordonnées.	• Interpréter graphiquement les limites obtenues.	

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Continuité sur un intervalle, théorème des valeurs intermédiaires	• Exploiter le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas où la fonction est strictement monotone, pour résoudre un problème donné.	On se limite à une approche intuitive de la continuité et on admet que les fonctions usuelles sont continues par intervalle. On présente quelques exemples de fonctions non continues, en particulier issus de situations concrètes. Le théorème des valeurs intermédiaires est admis. On convient que les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré. On admet qu'une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle. Ce cas particulier est étendu au cas où f est définie sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non, les limites de f aux bornes de l'intervalle étant supposées connues. ◇ Des activités algorithmiques sont réalisées dans le cadre de la recherche de solutions de l'équation $f(x)=k$.
Calculs de dérivées : compléments	• Calculer les dérivées des fonctions : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$; $x \mapsto (u(x))^n$, n entier relatif non nul ; $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$; $x \mapsto \ln(u(x))$. • Calculer la dérivée d'une fonction $x \mapsto f(ax+b)$ où f est une fonction dérivable, a et b deux nombres réels.	À partir de ces exemples, on met en évidence une expression unifiée de la dérivée de la fonction $x \mapsto f(u(x))$, mais sa connaissance n'est pas une capacité attendue. Les techniques de calcul sont à travailler mais ne doivent pas être un frein à la résolution de problèmes. On a recours si besoin à un logiciel de calcul formel. AP *Exemples de fonctions discontinues, ou à dérivées non continues.*

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Fonctions sinus et cosinus	• Connaître la dérivée des fonctions sinus et cosinus. • Connaître quelques propriétés de ces fonctions, notamment parité et périodicité. • Connaître les représentations graphiques de ces fonctions.	On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 et la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$. En dehors des exemples étudiés, aucun développement n'est attendu sur les notions de périodicité et de parité. On fait le lien entre les résultats obtenus en utilisant le cercle trigonométrique et les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$. ⇆ [SPC] Ondes progressives sinusoïdales, oscillateur mécanique.
Fonction exponentielle Fonction $x \mapsto \exp(x)$. Relation fonctionnelle, notation e^x.	▣ Démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur **R**, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0. ▣ Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$. • Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. • Connaître le sens de variation et la représentation graphique de la fonction exponentielle. • Connaître et exploiter $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$.	La fonction exponentielle est présentée comme l'unique fonction f dérivable sur **R** telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'existence est admise. On étudie des exemples de fonctions de la forme $x \mapsto \exp(u(x))$, notamment avec $u(x) = -kx$ ou $u(x) = -kx^2$ ($k > 0$), qui sont utilisées dans des domaines variés. On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 et la limite en 0 de $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$. ⇆ [SPC et SVT] Radioactivité. (AP) *Étude de phénomènes d'évolution.*

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Fonction logarithme népérien Fonction $x \mapsto \ln x$.	• Connaître le sens de variation, les limites et la représentation graphique de la fonction logarithme népérien.	On peut introduire la fonction logarithme népérien grâce aux propriétés de la fonction exponentielle ou à partir de l'équation fonctionnelle.
Relation fonctionnelle, dérivée.	• Utiliser, pour a réel strictement positif et b réel, l'équivalence $\ln a = b \Leftrightarrow a = \mathrm{e}^b$. • Utiliser la relation fonctionnelle pour tansformer une écriture. • Connaître et exploiter $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.	On souligne dans les cadres algébrique et graphique que les fonctions logarithme népérien et exponentielle sont réciproques l'une de l'autre. Tout développement théorique sur les fonctions réciproques est exclu. On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction logarithme en 1 et la limite en 0 de $\frac{\ln(1+x)}{x}$. On évoque la fonction logarithme décimal pour son utilité dans les autres disciplines. ⇆ [SI] Gain lié à une fonction de transfert. ⇆ [SPC] Intensité sonore, magnitude d'un séisme, échelle des pH. (AP) *Équations fonctionnelles.*
Intégration Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a,b]$ comme aire sous la courbe. Notation $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Théorème : si f est une fonction continue et positive sur $[a,b]$, la fonction F définie sur $[a,b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a, b]$ et a pour dérivée f.		On s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège et sur les propriétés d'additivité et d'invariance par translation et symétrie. On peut mener un calcul approché d'aire (parabole, hyperbole, etc.) pour illustrer cette définition. ▣ Il est intéressant de présenter le principe de la démonstration du théorème dans le cas où f est positive et croissante.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Primitive d'une fonction continue sur un intervalle.	• Déterminer des primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées. • Connaître et utiliser les primitives de $u'\mathrm{e}^u$, $u'u^n$ (n entier relatif, différent de -1) et, pour u strictement positive, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, $\frac{u'}{u}$.	Une primitive F de la fonction continue et positive f étant connue, on a : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.
Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.		▣ Il est intéressant de démontrer ce théorème dans le cas d'un intervalle fermé borné, en admettant que la fonction a un minimum. On admet le cas général. On fait observer que certaines fonctions comme $x \mapsto \exp(-x^2)$ n'ont pas de primitive « explicite ».
Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque. Linéarité, positivité, relation de Chasles. Valeur moyenne.	• Calculer une intégrale. • Utiliser le calcul intégral pour déterminer une aire. • Encadrer une intégrale. ◇ Pour une fonction monotone positive, mettre en œuvre un algorithme pour déterminer un encadrement d'une intégrale.	La formule $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, établie pour une fonction continue et positive, est étendue au cas d'une fonction continue de signe quelconque. L'intégration par parties n'est pas un attendu du programme. La notion de valeur moyenne est illustrée par des exemples issus d'autres disciplines. ⇆ [SPC] Mouvement uniformément accéléré. ⇆ [SI] Valeur moyenne, valeur efficace dans un transfert énergétique. (AP) *Calcul du volume d'un solide.*

2. Géométrie

Nombres complexes

En classe terminale, les nombres complexes sont vus essentiellement comme constituant un nouvel ensemble de nombres avec ses opérations propres. Cette introduction s'inscrit dans la perspective d'un approfondissement lors d'une poursuite d'études.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Forme algébrique, conjugué. Somme, produit, quotient.	• Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes.	On introduit dans ce chapitre des éléments lui donnant une dimension historique.
Équation du second degré à coefficients réels.	• Résoudre dans **C** une équation du second degré à coefficients réels.	
Représentation géométrique.	• Représenter un nombre complexe par un point ou un vecteur.	Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.
Affixe d'un point, d'un vecteur.	• Déterminer l'affixe d'un point ou d'un vecteur.	
Forme trigonométrique : - module et argument, interprétation géométrique dans un repère orthonormé direct ; - notation exponentielle.	• Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement. • Connaître et utiliser la relation $z\bar{z}=\lvert z\rvert^2$. • Effectuer des opérations sur les nombres complexes écrits sous différentes formes.	La notation exponentielle est introduite après avoir montré que la fonction $\theta \mapsto \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ vérifie la même relation fonctionnelle que la fonction exponentielle. Les nombres complexes permettent de mémoriser les formules trigonométriques d'addition et de duplication vues en première. ⇆ [SI] Analyse fréquentielle d'un système.

Géométrie dans l'espace

Dans cette partie, il s'agit, d'une part de renforcer la vision dans l'espace entretenue en classe de première, d'autre part de faire percevoir toute l'importance de la notion de direction de droite ou de plan.
La décomposition d'un vecteur d'un plan suivant deux vecteurs non colinéaires de ce plan, puis celle d'un vecteur de l'espace suivant trois vecteurs non coplanaires, sensibilisent aux concepts de liberté et de dépendance en algèbre linéaire.
Le repérage permet à la fois de placer des objets dans l'espace et de se donner un moyen de traiter des problèmes d'intersection d'un point de vue algébrique. Le concept d'orthogonalité, une fois exprimé en termes de coordonnées dans un repère orthonormé, fournit un outil pour une caractérisation simple des plans de l'espace.

L'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier des problèmes d'intersection de droites et de plans, en choisissant un cadre adapté, vectoriel ou non, repéré ou non.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Droites et plans		
Positions relatives de droites et de plans : intersection et parallélisme.	• Étudier les positions relatives de droites et de plans.	Le cube est une figure de référence pour la représentation des positions relatives de droites et de plans.
Orthogonalité : - de deux droites ; - d'une droite et d'un plan.	• Établir l'orthogonalité d'une droite et d'un plan.	On étudie quelques exemples de sections planes du cube. Ce travail est facilité par l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique.
Géométrie vectorielle		
Caractérisation d'un plan par un point et deux vecteurs non colinéaires.		On étend à l'espace la notion de vecteur et les opérations associées. On fait observer que des plans dirigés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles. ▣ Il est intéressant de présenter la démonstration du théorème dit « du toit ».
Vecteurs coplanaires. Décomposition d'un vecteur en fonction de trois vecteurs non coplanaires.	• Choisir une décomposition pertinente dans le cadre de la résolution de problèmes d'alignement ou de coplanarité.	On fait percevoir les notions de liberté et de dépendance.
Repérage. Représentation paramétrique d'une droite.	• Utiliser les coordonnées pour : - traduire la colinéarité ; - caractériser l'alignement ; - déterminer une décomposition de vecteurs.	On ne se limite pas à des repères orthogonaux. La caractérisation d'un plan par un point et deux vecteurs non colinéaires conduit à une représentation paramétrique de ce plan. ⇆ [SI] Cinématique et statique d'un système en mécanique.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Produit scalaire Produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace : définition, propriétés.		On étend aux vecteurs de l'espace la définition du produit scalaire donnée dans le plan.
Vecteur normal à un plan. Équation cartésienne d'un plan.	• Déterminer si un vecteur est normal à un plan. ◙ Caractériser les points d'un plan de l'espace par une relation $ax+by+cz+d=0$ avec a, b, c trois nombres réels non tous nuls. • Déterminer une équation cartésienne d'un plan connaissant un point et un vecteur normal. • Déterminer un vecteur normal à un plan défini par une équation cartésienne. ◙ Démontrer qu'une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. • Choisir la forme la plus adaptée entre équation cartésienne et représentation paramétrique pour : - déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan ; - étudier la position relative de deux plans.	On caractérise vectoriellement l'orthogonalité de deux droites et on introduit la notion de plans perpendiculaires. (AP) *Perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires.* *Intersection de trois plans.*

3. Probabilités et statistique

On approfondit le travail en probabilités et statistique mené les années précédentes.
Afin de traiter les champs de problèmes associés aux données continues, on introduit les lois de probabilité à densité. Le programme en propose quelques exemples et, en particulier, la loi normale qui permet notamment d'initier les élèves à la statistique inférentielle par la détermination d'un intervalle de confiance pour une proportion à un niveau de confiance de 95 %.
Cette partie se prête particulièrement à l'étude de problèmes issus d'autres disciplines.
Le recours aux représentations graphiques et aux simulations est indispensable.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Conditionnement, indépendance Conditionnement par un événement de probabilité non nulle. Notation $P_A(B)$.	• Construire un arbre pondéré en lien avec une situation donnée. • Exploiter la lecture d'un arbre pondéré pour déterminer des probabilités. • Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.	On représente une situation à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau. On énonce et on justifie les règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés. Un arbre pondéré correctement construit constitue une preuve. Le vocabulaire lié à la formule des probabilités totales n'est pas un attendu du programme, mais la mise en œuvre de cette formule doit être maîtrisée.
Indépendance de deux événements.	▣ Démontrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour $\overline{A}$ et B.	Cette partie du programme se prête particulièrement à l'étude de situations concrètes. ◇ Des activités algorithmiques sont menées dans ce cadre, notamment pour simuler une marche aléatoire. ⇆ [SVT] Hérédité, génétique, risque génétique.
Notion de loi à densité à partir d'exemples Loi à densité sur un intervalle.		Les exemples étudiés s'appuient sur une expérience aléatoire et un univers associé Ω, muni d'une probabilité. On définit alors une variable aléatoire X, fonction de Ω dans **R**, qui associe à chaque issue un nombre réel d'un intervalle I de **R**. On admet que X satisfait aux conditions qui permettent de définir la probabilité de l'événement $\{X \in J\}$ comme aire du domaine : $\{M(x, y)\,;\, x \in J \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ où f désigne la fonction de densité de la loi et J un intervalle inclus dans I. Toute théorie générale des lois à densité et des intégrales sur un intervalle non borné est exclue.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Loi uniforme sur $[a,b]$. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme.	• Connaître la fonction de densité de la loi uniforme sur $[a,b]$.	L'instruction « nombre aléatoire » d'un logiciel ou d'une calculatrice permet d'introduire la loi uniforme sur $[0,1]$. La notion d'espérance d'une variable aléatoire à densité f sur $[a,b]$ est introduite à cette occasion par $\mathrm{E}(X)=\int_a^b t\,f(t)\,\mathrm{d}t$. On note que cette définition constitue un prolongement dans le cadre continu de l'espérance d'une variable aléatoire discrète. (AP) *Méthode de Monte-Carlo.*
Lois exponentielles.	• Calculer une probabilité dans le cadre d'une loi exponentielle.	▣ On démontre qu'une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement : pour tous réels t et h positifs, $P_{T\geq t}(T\geq t+h)=P(T\geq h)$.
Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.	▣ Démontrer que l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$.	L'espérance est définie comme la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est la fonction de densité de la loi exponentielle considérée. Cette partie du programme se prête particulièrement à l'étude de situations concrètes, par exemple sur la radioactivité ou la durée de fonctionnement d'un système non soumis à un phénomène d'usure.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Théorème de Moivre Laplace (admis).	• Connaître la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et sa représentation graphique. ▣ Démontrer que pour $\alpha \in \left]0,1\right[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1-\alpha$ lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. • Connaître les valeurs approchées $u_{0,05} \approx 1{,}96$ et $u_{0,01} \approx 2{,}58$.	Pour introduire la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, on s'appuie sur l'observation des représentations graphiques de la loi de la variable aléatoire $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ où X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, et cela pour de grandes valeurs de n et une valeur de p fixée entre 0 et 1. Le théorème de Moivre Laplace assure que pour tous réels a et b, $P(Z_n \in [a,b])$ tend vers $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$ lorsque n tend vers $+\infty$. L'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est définie par $\lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^0 t\,f(t)\mathrm{d}t + \lim\limits_{y \to +\infty} \int_0^y t\,f(t)\mathrm{d}t$ où f désigne la densité de cette loi. On peut établir qu'elle vaut 0. On admet que la variance, définie par $\mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right)$, vaut 1.
Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ d'espérance μ et d'écart-type σ.	• Utiliser une calculatrice ou un tableur pour calculer une probabilité dans le cadre d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. • Connaître une valeur approchée de la probabilité des événements suivants : $\{X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]\}$, $\{X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]\}$ et $\{X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]\}$, lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.	Une variable aléatoire X suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si $\frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On fait percevoir l'information apportée par la valeur de l'écart-type. ⇆ [SI et SPC] Mesures physiques sur un système réel en essai. La connaissance d'une expression algébrique de la fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ n'est pas un attendu du programme. On illustre ces nouvelles notions par des exemples issus des autres disciplines.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Intervalle de fluctuation	▣ Démontrer que si la variable aléatoire X_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$, alors, pour tout α dans $]0,1[$ on a, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha$, où I_n désigne l'intervalle $\left[p-u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p+u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$. • Connaître l'intervalle de fluctuation asymptotique(*) au seuil de 95 % : $\left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ où p désigne la proportion dans la population.	La démonstration ci-contre donne l'expression d'un intervalle de fluctuation asymptotique(*) au seuil $1-\alpha$ de la variable aléatoire fréquence $F_n = \frac{X_n}{n}$ qui, à tout échantillon de taille n, associe la fréquence obtenue f. Avec les exigences usuelles de précision, on pratique cette approximation dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$. En majorant $1,96\sqrt{p(1-p)}$, on retrouve l'intervalle de fluctuation présenté en classe de seconde. La problématique de prise de décision, déjà rencontrée, est travaillée à nouveau avec l'intervalle de fluctuation asymptotique.
Estimation Intervalle de confiance (*). Niveau de confiance.	• Estimer par intervalle une proportion inconnue à partir d'un échantillon. • Déterminer une taille d'échantillon suffisante pour obtenir, avec une précision donnée, une estimation d'une proportion au niveau de confiance 0,95.	Les attendus de ce paragraphe sont modestes et sont à exploiter en lien avec les autres disciplines. ▣ Il est intéressant de démontrer que, pour une valeur de p fixée, l'intervalle $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}, F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient, pour n assez grand, la proportion p avec une probabilité au moins égale à 0,95. On énonce alors que p est élément de l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec un niveau de confiance de plus de 95 %, où f désigne la fréquence observée sur un échantillon de taille n. Avec les exigences usuelles de précision, on utilise cet intervalle dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$. La simulation de sondages sur tableur permet de sensibiliser aux fourchettes de sondage.

		Il est important de noter que, dans d'autres champs, on utilise l'intervalle $\left[f-1{,}96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}, f+1{,}96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}\right]$ qu'il n'est pas possible de justifier dans ce programme. ⇆ [SVT] Analyse de graphiques où les données sont fournies par des intervalles de confiance. AP *Prise de décision lors de la comparaison de deux proportions (par exemple lors d'un essai thérapeutique).*

(*)Avec les notations précédentes :

Un intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F_n au seuil $1-\alpha$ est un intervalle déterminé à partir de p et de n et qui contient F_n avec une probabilité d'autant plus proche de $1-\alpha$ que n est grand.

Un intervalle de confiance pour une proportion p à un niveau de confiance $1-\alpha$ est la réalisation, à partir d'un échantillon, d'un intervalle aléatoire contenant la proportion p avec une probabilité supérieure ou égale à $1-\alpha$, intervalle aléatoire déterminé à partir de la variable aléatoire fréquence F_n qui, à tout échantillon de taille n, associe la fréquence.
Les intervalles de confiance considérés ici sont centrés en la fréquence observée f.

Algorithmique

En seconde, les élèves ont conçu et mis en œuvre quelques algorithmes. Cette formation se poursuit tout au long du cycle terminal.

Dans le cadre de cette activité algorithmique, les élèves sont entraînés à :
- décrire certains algorithmes en langage naturel ou dans un langage symbolique ;
- en réaliser quelques-uns à l'aide d'un tableur ou d'un programme sur calculatrice ou avec un logiciel adapté ;
- interpréter des algorithmes plus complexes.

Aucun langage, aucun logiciel n'est imposé.

L'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme (analyse, géométrie, statistiques et probabilités, logique) mais aussi avec les autres disciplines ou le traitement de problèmes concrets.
À l'occasion de l'écriture d'algorithmes et de programmes, il convient de donner aux élèves de bonnes habitudes de rigueur et de les entraîner aux pratiques systématiques de vérification et de contrôle.

Instructions élémentaires (affectation, calcul, entrée, sortie) Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables : • d'écrire une formule permettant un calcul ; • d'écrire un programme calculant et donnant la valeur d'une fonction, ainsi que les instructions d'entrées et sorties nécessaires au traitement.
Boucle et itérateur, instruction conditionnelle Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables de : • programmer un calcul itératif, le nombre d'itérations étant donné ; • programmer une instruction conditionnelle, un calcul itératif, avec une fin de boucle conditionnelle.

Notations et raisonnement mathématiques

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques, mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

En complément des objectifs rappelés ci-dessous, le travail sur la notion d'équivalence doit naturellement être poursuivi (propriété caractéristique, raisonnement par équivalence) et l'on introduit le raisonnement par récurrence.

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondants: $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$.

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés sur des exemples à :

- utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- formuler la négation d'une proposition ;
- utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

Enseignement de spécialité

L'enseignement de spécialité prend appui sur la résolution de problèmes. Cette approche permet une introduction motivée des notions mentionnées dans le programme.

Plusieurs exemples de problèmes sont donnés à titre indicatif. L'étude des situations envisagées dans le cadre de cet enseignement conduit à un travail de modélisation et place les élèves en position de recherche.

Les thèmes abordés sont particulièrement propices à l'utilisation des outils informatiques (logiciels de calcul, tableur) et à la mise en œuvre d'algorithmes.

Le niveau d'approfondissement des notions est guidé par les besoins rencontrés dans la résolution des problèmes traités.

Arithmétique

Les problèmes étudiés peuvent notamment être issus de la cryptographie ou relever directement de questions mathématiques, par exemple à propos des nombres premiers.

Exemples de problèmes	Contenus
Problèmes de codage (codes barres, code ISBN, clé du Rib, code Insee Problèmes de chiffrement (chiffrement affine, chiffrement de Vigenère, chiffrement de Hill).	• Divisibilité dans **Z**. • Division euclidienne. • Congruences dans **Z**. • PGCD de deux entiers. • Entiers premiers entre eux. • Théorème de Bézout. • Théorème de Gauss.
Questionnement sur les nombres premiers : infinitude, répartition, tests de primalité, nombres premiers particuliers (Fermat, Mersenne, Carmichaël). Sensibilisation au système cryptographique RSA.	• Nombres premiers. • Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers.

Matrices et suites

Il s'agit d'étudier des exemples de processus discrets, déterministes ou stochastiques, à l'aide de suites ou de matrices. On introduit le calcul matriciel sur des matrices d'ordre 2. Les calculs sur des matrices d'ordre 3 ou plus sont essentiellement effectués à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.

Exemples de problèmes	Contenus
Marche aléatoire simple sur un graphe à deux ou trois sommets. Marche aléatoire sur un tétraèdre ou sur un graphe à N sommets avec saut direct possible d'un sommet à un autre : à chaque instant, le mobile peut suivre les arêtes du graphe probabiliste ou aller directement sur n'importe quel sommet avec une probabilité constante p . Etude du principe du calcul de la pertinence d'une page web. Modèle de diffusion d'Ehrenfest : N particules sont réparties dans deux récipients ; à chaque instant, une particule choisie au hasard change de récipient. Modèle proie prédateur discrétisé : - évolution couplée de deux suites récurrentes ; - étude du problème linéarisé au voisinage du point d'équilibre.	• Matrices carrées, matrices colonnes : opérations. • Matrice inverse d'une matrice carrée. • Exemples de calcul de la puissance n-ième d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3. • Écriture matricielle d'un système linéaire. • Suite de matrices colonnes (U_n) vérifiant une relation de récurrence du type $U_{n+1} = AU_n + C$: - recherche d'une suite constante vérifiant la relation de récurrence ; - étude de la convergence. • Étude asymptotique d'une marche aléatoire.

$\boxed{\text{X1M0010 - MATHEMATIQUES 1 (72 heures CTDI)}}$

Cette unité nécessite comme prérequis une bonne connaissance du programme (hors spécialité) de TS. A cet égard, on se reportera aux documents ministériels ci-joints, qui précisent les contenus des classes terminales scientifiques pour les rentrées 2011 et 2012.

Le but de cette unité est de poser les fondements mathématiques nécessaires à toutes les études du portail MIPC, quelle que soit l'origine des étudiants, en insistant sur l'utilisation d'algorithmes et de résultats essentiels la plupart du temps admis.

Notions abordées

- Rappels sur les nombres réels, $\boxed{\text{sous forme de travail autonome}}$.
- Nombres complexes (propriétés calculatoires, forme algébrique et forme trigonométrique, racines carrées, équation de degré deux, racines n-ièmes, nombres complexes et factorisation des polynômes sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$).
- Systèmes linéaires généraux, pivot gaussien.
- Fonctions numériques (limites, continuité, dérivabilité).
- Programme d'étude d'une fonction numérique, et exemples (variations, étude aux bornes, branches infinies, convexité).
- Fonctions usuelles.
- Calculs des primitives.
- Equations différentielles simples.

<u>Compétences exigibles</u>

- ✓ Connaître les propriétés essentielles de $\mathbb{R}$, à l'exclusion de la borne supérieure.
- ✓ Savoir calculer correctement avec les nombres complexes, sous la forme algébrique et sous la forme trigonométrique, savoir calculer les racines carrées d'un complexe de deux manières, les racines n-ièmes sous la forme trigonométrique.
- ✓ Savoir parfaitement résoudre une équation de degré deux à coefficients complexes.
- ✓ Connaître et savoir appliquer les théorèmes de factorisation des polynômes sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
- ✓ Avoir parfaitement compris le principe du pivot gaussien, connaître les trois formes possibles de l'ensemble des solutions, savoir reconnaître un système de Cramer, savoir ce qui se passe dans le cas des systèmes homogènes, savoir discuter un système paramétré, et en particulier comprendre la distinction entre inconnue et paramètre.
- ✓ Très bien connaître les limites usuelles, ainsi que les théorèmes sur "limites et opérations", très bien connaître les formes indéterminées classiques ainsi que les diverses manières de les lever : calcul algébrique, majoration ou minoration, mise en facteur du terme prépondérant, règle de l'hôpital....
- ✓ Très bien connaître les énoncés essentiels sur les fonctions continues : définition et opérations sur les fonctions continues, théorème des valeurs intermédiaires, extrémums atteints, théorème de la "bijection continue strictement monotone", existence d'une primitive.
- ✓ Bien maîtriser le calcul des dérivées, ainsi que son application à la variation des fonctions.
- ✓ Bien connaître les fonctions usuelles, et leurs propriétés caractéristiques.
- ✓ Savoir étudier dans le détail une fonction numérique (variations, étude aux bornes, convexité).
- ✓ Avoir une bonne maîtrise du calcul des primitives (tableau de primitives classiques, linéarisation, primitivation par parties, changement de varaible, décomposition en éléments simples "raisonnable").
- ✓ Savoir résoudre les équations différentielles $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ et $y"(t) + \alpha y'(t) + \beta y(t) = f(t)$ où α et β sont des constantes réelles, et f une fonction simple.

<u>Compétences **non** exigibles</u>

- ✓ Borne supérieure et borne inférieure.
- ✓ Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles lorsque les calculs deviennent immondes...

X2M0010 - ANALYSE 1 (48 heures CTDI)

Cette unité nécessite comme prérequis une bonne connaissance du programme (hors spécialité) de TS (voir les documents ministériels ci-joints, qui précisent les contenus des classes terminales scientifiques pour les rentrées 2011 et 2012), ainsi qu'une maîtrise de l'unité X1M0010, détaillée ci-dessous :

- *Rappels sur les nombres réels.*
- *Nombres complexes (propriétés calculatoires, forme algébrique et forme trigonométrique, racines carrées, équation de degré deux, racines n-ièmes, nombres complexes et factorisation des polynômes sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$).*
- *Systèmes linéaires généraux, pivot gaussien.*
- *Fonctions numériques (limites, continuité, dérivabilité).*
- *Programme d'étude d'une fonction numérique, et exemples.*
- *Fonctions usuelles.*
- *Calculs des primitives.*
- *Equations différentielles simples.*

Dans cette unité X2M0010, le but est d'initier les étudiants au maniement des outils essentiels de l'analyse "abstraite", en introduisant la notion de limite rigoureusement, et en montrant comment elle s'applique aux suites et aux fonctions numériques. Il s'agit donc de reprendre dans un cadre plus formel une partie des thèmes abordés dans le module X1M0010, en définissant avec précision les notions introduites, et en démontrant la plupart des théorèmes majeurs.

Notions abordées

- Nombres réels : propriétés de R, archimédisme, partie entière, développement décimal, borne supérieure.
- Vocabulaire sur les fonctions et applications (image directe et réciproque, caractère injectif, caractère surjectif, bijection réciproque si elle existe).
- Suites numériques : vocabulaire usuel, convergence, opérations sur les suites convergentes, exemples fondamentaux, suites monotones, suites adjacentes, suites extraites, critère de Cauchy.
- Limites des fonctions numériques : définition, opérations sur les limites.
- Continuité des fonctions numériques : propriétés fondamentales des fonctions continues (valeurs intermédiaires, extremums atteints, condition suffisante d'existence d'une fonction réciproque).
- Dérivabilité des fonctions numériques : propriétes essentielles, théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, diverses formules de Taylor (formule de Taylor pour les polynômes, formule de Taylor-Young, formule de Taylor-Lagrange, formule de Taylor avec reste intégral).
- Développements limités et applications.

Compétences exigibles

✓ Bien connaître le vocabulaire de l'ordre dans $\mathbb{R}$, (majorant, plus grand élément, borne supérieure), ainsi que celui sur les fonctions et applications (image directe et réciproque, caractère injectif, caractère surjectif, bijection réciproque si elle existe).
✓ Connaître les propriétés de la valeur absolue dans $\mathbb{R}$, et des approximations décimales.
✓ Connaître parfaitement la définition quantifiée de la limite (quand elle existe) d'une suite.
✓ Savoir démontrer les théorèmes essentiels concernant les opérations sur les suites convergentes.
✓ Savoir démontrer les théorèmes essentiels concernant limites et inégalités.
✓ Savoir démontrer le théorème sur les suites monotones.
✓ Bien connaître les résultats sur les suites adjacentes.
✓ Connaître parfaitement, en sachant justifier, le comportement des suites suivantes : q^n, n^α $(-1)^n$, $\dfrac{q^n}{n^\alpha}$, $\dfrac{q^n}{n!}$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
✓ Connaître et savoir utiliser la définition d'une suite extraite, et savoir démontrer que si une suite converge, toute suite extraite converge vers la même limite.
✓ Savoir utiliser éventuellement des suites extraites pour prouver la divergence d'une suite.
✓ Connaître les différentes formes du critère de Cauchy.
✓ Savoir utiliser le critère de Cauchy à bon escient.

- ✓ Savoir que pour une suite numérique réelle, converger ou être de Cauchy sont des propriétés équivalentes.
- ✓ Connaître au moins un exemple de suite à termes rationnels, qui est de Cauchy, qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$, mais qui converge bien dans $\mathbb{R}$.
- ✓ Connaître parfaitement la définition quantifiée de la limite (finie ou infinie, quand elle existe) d'une fonction en un point.
- ✓ Savoir démontrer les théorèmes essentiels concernant les opérations sur les limites de fonctions numériques et sur limites et inégalités.
- ✓ Connaître parfaitement, du point de vue des limites, les fonctions usuelles.
- ✓ Connaître la démonstration du théorème des valeurs intermédaires.
- ✓ Connaître la démonstration du théorème de la "bijection" : si est f continue et strictement monotone sur intervalle I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$, et sa bijection réciproque est elle aussi continue.
- ✓ Savoir démontrer les théorèmes essentiels sur la dérivabilité.
- ✓ Connaître la démonstration du théorème de Rolle et de la formule des Accroissements Finis.
- ✓ Connaître l'énoncé de la formule de Taylor pour les polynômes, de la formule de Taylor-Lagrange, et de la formule de Taylor-Young.
- ✓ Connaître parfaitement les développements limités en zéro à l'ordre n des fonctions suivantes : exponentielle, sinus, sinus hyperbolique, cosinus, cosinus hyperbolique, $\dfrac{1}{1-x}$, $\dfrac{1}{1+x}$, $(1+x)^{\alpha}$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $\arctan(x)$.
- ✓ Savoir parfaitement calculer avec les développements limités raisonnables.

Compétences **non** exigibles

- ✓ Connaître la démonstration du théorème des extremums atteints.
- ✓ Savoir démontrer qu'une suite de Cauchy converge.
- ✓ Bien sûr, les séries numériques peuvent être présentées comme des cas particuliers de suites, mais, à l'exception de quelques exemples bien précis et peu nombreux (série géométrique ou série harmonique), leur étude est explicitement hors programme.
- ✓ Il est déraisonnable d'attendre une maîtrise technique irréprochable dans les calculs de développements limités quand ceux-ci deviennent trop immondes...

X2M0020 - Espaces Vectoriels et Applications Linéaires (72 h CTDI)

Cette unité nécessite en prérequis le module :

X1M0010 «Mathématiques 1 » :

- *Résolutions de systèmes linéaires.*

L'objectif de ce cours est une présentation de la structure d'espaces vectoriels en s'appuyant sur les techniques acquises de résolutions de systèmes homogènes d'équations linéaires. Il s'agit, avant tout, de comprendre et de savoir manipuler les résultats du cours en dimension 2, 3 et 4, tout en laissant entrevoir la généralisation aux dimensions supérieures et éventuellement à d'autres environnements (suites récurrentes, polynômes, solutions d'équations différentielles). Certaines notions gagneront à être illustrées par une représentation géométrique vectorielle (colinéarité, coplanarité, projections, symétries, aires, volumes,...)

Algèbre

- Espace vectoriel comme sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
- Applications linéaires ; noyau, image.
- Bases et dimensions ; théorème du rang.
- Représentation matricielle des applications linéaires.
- Déterminants 2×2 et 3×3.
- Axiomatique des espaces vectoriels.

Compétences exigibles

- ✓ Savoir dire et démontrer si un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel, et si une application entre espaces vectoriels est linéaire.
- ✓ Déterminer une base d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et savoir la compléter en une base d'un espace vectoriel le contenant.
- ✓ Savoir caractériser une application linéaire sur une base et l'exprimer en coordonnées en faisant le lien avec sa représentation matricielle.
- ✓ Déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire en échelonnant sa représentation matricielle ; savoir manipuler le théorème du rang.
- ✓ Savoir additionner et multiplier des matrices.
- ✓ Savoir caractériser une matrice inversible et savoir l'inverser.
- ✓ Savoir appliquer la formule de changement de bases.
- ✓ Utilisation de déterminants 2×2 et 3×3 pour déterminer l'équation d'une droite ou d'un plan.

Compétences **non** exigibles

- ✓ Déterminant d'un endomorphisme.
- ✓ Diagonalisation.

X2M0030 - FORMALISME et ARITHMETIQUE (20 heures CM - 28 heures TD)

Cette unité nécessite comme prérequis une bonne connaissance du programme (hors spécialité) de TS (voir les documents ministériels ci-joints, qui précisent les contenus des classes terminales scientifiques pour les rentrées 2011 et 2012), ainsi qu'une maîtrise de l'unité X1M0010, rappelée ci-dessous :

- *Rappels sur les nombres réels.*
- *Nombres complexes (propriétés calculatoires, forme algébrique et forme trigonométrique, racines carrées, équation de degré deux, racines n-ièmes, nombres complexes et factorisation des polynômes sur* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$ *).*
- *Systèmes linéaires généraux, pivot gaussien.*
- *Fonctions numériques (limites, continuité, dérivabilité).*
- *Programme d'étude d'une fonction numérique, et exemples.*
- *Fonctions usuelles.*
- *Calculs des primitives.*
- *Equations différentielles simples.*

Dans cette unité X2M0030, le but est d'abord d'introduire le langage des ensembles et des applications, puis de présenter un certain nombre de propriétés arithmétiques communes aux entiers relatifs et aux polynômes, en définissant avec précision les notions introduites, et en démontrant la plupart des théorèmes majeurs.

Notions abordées

- Ensembles, opérations sur les ensembles.
- Applications, caractère injectif, surjectif, bijectif.
- Dénombrabilité.
- Dénombrement élémentaire.
- Arithmétique dans Z : multiples, diviseurs, PGCD, PPMC, nombres premiers, congruences, systèmes de congruences.
- Arithmétique des polynômes : étude de la divisibilité, PGCD, PPMC, éléments irréductibles sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, factorisation.

Compétences exigibles

- ✓ Bien connaître le vocabulaire ensembliste et savoir l'utiliser.
- ✓ Savoir reconnaître si une relation fonctionnelle définit bien une application.
- ✓ Savoir reconnaître si une application donnée est injective ou surjective.
- ✓ Savoir démontrer qu'un ensemble à n éléments possède 2^n sous-ensembles.
- ✓ Connaître parfaitement la formule du binôme de Newton, savoir la démontrer, et connaître toutes les propriétés essentielles des coefficients binomiaux.
- ✓ Savoir dénombrer les injections d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à n éléments.
- ✓ Connaître la définition d'un ensemble dénombrable.
- ✓ Savoir démontrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables, mais que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
- ✓ Connaître les opérations ensemblistes liées aux ensembles dénombrables.
- ✓ Connaître parfaitement TOUTES les propriétés de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$.
- ✓ Savoir utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver un couple d'entiers α et β tels que $PGCD(a,b) = \alpha.a + \beta.b$
- ✓ Connaître parfaitement TOUTES les caractérisations du PGCD de deux entiers.
- ✓ Savoir résoudre l'équation diophantienne "$ax + by = c$".
- ✓ Connaître parfaitement TOUTES les propriétés des nombres premiers exposées dans le cours.
- ✓ Savoir démontrer le Théorème fondamental de l'Arithmétique.
- ✓ Connaitre et savoir démontrer les propriétés essentielles des congruences (relation d'équivalence, compatibilité avec opérations, éléments inversibles modulo n).
- ✓ Savoir résoudre l'équation congruente "$ax = b$", ainsi que les systèmes de congruences simultanées.
- ✓ Connaître l'énoncé et la démonstration du petit théorème de Fermat.
- ✓ Maîtriser parfaitement la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

- ✓ Connaître parfaitement les propriétés de la divisibilté dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
- ✓ Savoir utiliser l'algorithme d'Euclide polynômial pour trouver le PGCD d'un couple de polynômes A et B, ainsi qu'un couple de polynômes U et V tels que $PGCD(A, B) = AU + BV$.
- ✓ Connaître l'énoncé du Théorème de d'Alembert-Gauss, et du théorème de factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

Compétences **non** exigibles

- ✓ Les démonstrations du Théorème de d'Alembert-Gauss, et du théorème de factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ ne sont pas exigibles.
- ✓ La notion de groupe, même limitée à Z/nZ n'est pas au programme.

X2M0040 - Calcul différentiel et intégral (20h CM, 28h TD)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :

X1M0010 ≪Mathématiques 1 ≫ :

- *Révisions sur les nombres réels (en travail personnel). Rappels sur les nombres complexes.*
- *Résolution de systèmes linéaires.*
- *Fonctions d'une variable réelle : limite, continuité, dérivation et primitivation. Fonctions usuelles.*
- *Quelques méthodes de résolution d'équations différentielles d'ordre un ou deux.*

Le but de ce cours est de donner les outils de base du calcul différentiel et intégral.

- Formule de Taylor-Young et développements limités des fonctions d'une variable réelle.
- Limites et continuité des fonctions de deux ou trois variables.
- Calcul différentiel des fonctions de deux ou trois variables : dérivées partielles, fonctions C^1, extrema.
- Intégrale de Riemann et calcul de primitives.
- Intégrales généralisées.
- Notions de courbes paramétrées planes et d'intégrale curviligne.

Compétences exigibles

✓ Connaître les développements limités des fonctions usuelles et savoir déterminer le développement limité de fonctions simples en utilisant les opérations habituelles.
✓ Savoir montrer qu'une fonction de deux variables est continue.
✓ Savoir calculer des dérivées partielles de fonctions à deux ou trois variables et maitrisez la technique de calcul des dérivées partielles de fonctions composées.
✓ Savoir déterminer les points critiques d'une fonction de deux variables et d'en préciser la nature.
✓ Savoir calculer des primitives et des intégrales en utilisant les techniques d'intégration par partie et de changement de variable.
✓ Savoir appliquer les critères usuels de convergence pour les intégrales généralisées.
✓ Connaître la définition d'intégrale curviligne et savoir calculer dans des cas simples.

Compétences **non** exigibles

✓ La notion de développement asymptotique.
✓ La notion de différentiabilité pour les fonctions à plusieurs variables.
✓ La détermination de la nature des points critiques dans le cas des fonctions à trois variables.
✓ La construction de l'intégrale de Riemann.
✓ La notion d'intégrale à paramètre.
✓ L'étude des courbes paramétrées.

X2M0050 - Analyse réelle (28h CM, 44h TD)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :

X1M0010 «Mathématiques 1 » :

- *Révisions sur les nombres réels (en travail personnel). Rappels sur les nombres complexes.*
- *Résolution de systèmes linéaires.*
- *Fonctions d'une variable réelle : limite, continuité, dérivation et primitivation. Fonctions usuelles.*
- *Quelques méthodes de résolution d'équations différentielles d'ordre un ou deux.*

Ce cours s'adresse aux étudiants du parcours math-éco. Il présente les fondements de l'analyse avec un triple objectif : traiter des sujets essentiels pour une utilisation en économie (suite, fonctions, convexité, équations différentielles), consolider les techniques de calcul (dérivées, primitives, fonctions usuelles, développement limités), et développer une présentation rigoureuse permettant la poursuite d'études mathématiques (premier exposé rigoureux de la notion de limite, utilisation des quantificateurs et des fameux "epsilons", démonstration des théorèmes de base).

- Notions densemble, langage des applications, quantificateurs
- Nombres réels, majorer, minorer, valeur absolue, représentation des nombres
- Définition et calcul avec les nombres complexes
- Suites : définition, convergence, monotonie, suites géométriques, suites récurrentes
- Fonctions dune variable réelle : limite, continuité, dérivabilité, théorème des valeurs intermédiaires, fonction monotone, convexe, bornée sur un intervalle. Fonction réciproque. Théorème des accroissements finis.
- Fonctions usuelles : polynômiales, rationnelles, exponentielle et logarithme, puissances ; fonctions circulaires, quelques fonctions réciproques.
- Développements limités. formule de Taylor-Young.

Compétences exigibles

✓

Compétences **non** exigibles

✓

X2M0060 - ARITHMETIQUE (8 heures CM - 16 heures TD)

Cette unité nécessite comme prérequis une bonne connaissance du programme (hors spécialité) de TS (voir les documents ministériels ci-joints, qui précisent les contenus des classes terminales scientifiques pour les rentrées 2011 et 2012), ainsi qu'une maîtrise de l'unité X1M0010, rappelée ci-dessous :

- *Rappels sur les nombres réels.*
- *Nombres complexes (propriétés calculatoires, forme algébrique et forme trigonométrique, racines carrées, équation de degré deux, racines n-ièmes, nombres complexes et factorisation des polynômes sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$).*
- *Systèmes linéaires généraux, pivot gaussien.*
- *Fonctions numériques (limites, continuité, dérivabilité).*
- *Programme d'étude d'une fonction numérique, et exemples.*
- *Fonctions usuelles.*
- *Calculs des primitives.*
- *Equations différentielles simples.*

Dans cette unité X2M0060, le but est d'abord d'introduire le langage des applications, puis de présenter un certain nombre de propriétés arithmétiques des entiers relatifs, en définissant avec précision les notions introduites, de démontrer quelques théorèmes majeurs (la durée de l'unité ne permettant pas de tout prouver), et de terminer par l'application des congruences au codage RSA.

Notions abordées

- Applications, caractère injectif, surjectif, bijectif.
- Multiples, diviseurs, PGCD, PPMC.
- Nombres premiers.
- Congruences, systèmes de congruences simultanées.
- Application des congruences au codage Rvest-Shamir-Adleman.

Compétences exigibles

- ✓ Savoir reconnaître si une relation fonctionnelle définit bien une application.
- ✓ Savoir reconnaître si une application donnée est injective ou surjective.
- ✓ Connaître parfaitement la formule du binôme de Newton, savoir la démontrer, et connaître toutes les propriétés essentielles des coefficients binomiaux.
- ✓ Connaître parfaitement TOUTES les propriétés de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$.
- ✓ Savoir utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver un couple d'entiers α et β tels que $PGCD(a,b) = \alpha.a + \beta.b$
- ✓ Connaître parfaitement TOUTES les caractérisations du PGCD de deux entiers.
- ✓ Savoir résoudre l'équation diophantienne "$ax + by = c$".
- ✓ Connaître parfaitement TOUTES les propriétés des nombres premiers exposées dans le cours.
- ✓ Savoir démontrer le Théorème fondamental de l'Arithmétique.
- ✓ Connaitre et savoir démontrer les propriétés essentielles des congruences (relation d'équivalence, compatibilité avec opérations, éléments inversibles modulo n).
- ✓ Savoir résoudre l'équation congruente "$ax = b$", ainsi que les systèmes de congruences simultanées ("Restes Chinois", systèmes "modulo p^{α_i}" où p premier, systèmes quelconques).
- ✓ Connaître l'énoncé et la démonstration du petit théorème de Fermat.
- ✓ Savoir coder et décoder avec la procédure RSA.

Compétences **non** exigibles

- ✓ La notion de groupe, même limitée à Z/nZ n'est pas au programme.

X3M0010 - Réduction des endomorphismes (20h CM, 28h TD)

Cette unité nécessite en prérequis le module :

S12M020 / X2M0020 ≪Espaces vectoriels et applications linéaires≫ :

- *Sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^n$.
- *Applications linéaires ; noyau et image ; théorème du rang.*
- *Bases ; représentation matricielle d'une application linéaire.*

L'objectif de ce cours est dans un premier temps de reprendre la notion d'espace vectoriel abordée en première année (module S12M020/X2M0020), mais cette fois d'un point de vue plus abstrait : la théorie ≪axiomatique≫ est développée et on parle un peu de dualité.
Dans un deuxième temps, les notions d'endomorphisme (de matrice) diagonalisable ou trigonalisable sont abordées. Le but n'est pas de faire toute la théorie de la réduction (on ne parlera pas de polynôme d'endomorphisme), mais de démontrer les critères de diagonalisation et de trigonalisation faisant intervenir le polynôme caractéristique. Ce contexte est largement suffisant pour fournir de nombreux exemples.

Espaces vectoriels et applications linéaires

- Axiomatique des espaces vectoriels.
- Famille libre génératrice ; base, dimension.
- Applications linéaires. Représentation matricielle, matrice de la composée, changement de base.
- Rang, déterminant et trace d'une matrice, d'un endomorphisme.
- Théorème du rang.
- Isomorphismes, lien avec les bases.
- Décomposition en somme directe. Projecteur et symétrie.
- Forme linéaire, espace dual, base duale. Équation(s) d'un sous-espace vectoriel.

Pour ce qui est des exemples, les cas de $\mathbb{R}^n$ et de ses sous-espaces vectoriels doivent avoir été étudiés en première année (module S12M020/X2M0020). On pourra ici donner de nouveaux exemples : polynômes, solutions d'équations différentielles linéaires ...

Compétences exigibles

✓ Savoir déterminer si une famille est libre.
✓ Savoir déterminer une base d'un sous-espace vectoriel, écrire une matrice de changement de base ; calcul des coordonnées d'un vecteur *via* un tel changement.
✓ Savoir calculer la dimension d'un sous-espace vectoriel, le rang d'une matrice, d'un endomorphisme.
✓ Reconnaître une application linéaire, en déterminer le noyau et l'image.
✓ Savoir écrire la matrice d'une application linéaire et changer de base.
✓ Illustrer sur des exemples le fait qu'il existe un unique isomorphisme envoyant une base sur une autre.

Compétences **non** exigibles

✓ Espaces vectoriels de dimension infinie.
✓ Espaces vectoriels sur des corps autres que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
✓ Orthogonalité.

Réduction des endomorphismes

- Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme. Sous-espaces propres.
- Polynôme caractéristique χ_f d'un endomorphisme f (ou d'une matrice) ; ses racines sont les valeurs propres.
- Endomorphismes / matrices diagonalisables.
- Si χ_f est scindé à racines simples, l'endomorphisme est diagonalisable.
- Lien entre multiplicité des racines de χ_f et dimension des sous-espaces propres ; f est diagonalisable si, et seulement si, il y a égalité.
- Endomorphisme trigonalisable ; un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.
- Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.
- Applications : résolution de systèmes différentiels, suites récurrentes.

Compétences exigibles

- ✓ Savoir calculer un polynôme caractéristique.
- ✓ Savoir déterminer les éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice.
- ✓ Être capable sur des exemples d'appliquer les critères de diagonalisation ou de trigonalisation.
- ✓ En dimension 2 ou 3, effectuer explicitement des diagonalisations ou des trigonalisations.

Compétences **non** exigibles

- ✓ Pôlynôme d'endomorphisme, polynôme minimal.
- ✓ Théorème de Cayley-Hamilton.

X3M0020 - Analyse 2 (36h CM, 60h TD)

Cette unité nécessite en prérequis le module :

X2M0010 «Analyse 1»:

- *Nombres réels. Théorème de la borne supérieure.*
- *Suites numériques.*
- *Limites et continuité des fonctions d'une variable réelle.*
- *Développements limités.*

Le but de ce cours est d'introduire la théorie des séries numériques, l'intégrale de Riemann et de donner quelques notions de topologie et de calcul différentiel sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. On admettra par exemple la construction de l'intégrale de Riemann et on insistera sur la notion de norme sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. On n'insistera pas sur la notion de fonction différentiable.

Séries numériques.

- Rappels sur les bornes supérieure et inférieure.
- Séries numériques à termes positifs : critère de divergence, règles de comparaison et des équivalents, exemples.
- Séries absolument convergentes.
- Critère spécial des séries alternées.
- Calculs de sommes de séries.

Compétences exigibles

- ✓ Savoir reconnaître une série trivalement divergente.
- ✓ Connaître les séries de référence convergentes ou divergentes.
- ✓ Savoir estimer, comparer, majorer ou minorer le terme général d'une série positive avec le terme général d'une série de référence (utilisation des équivalents et des développements limités).
- ✓ Savoir étudier une série en vérifiant si elle est absolument convergente.
- ✓ Savoir utiliser le critère spécial des séries alternées.
- ✓ Savoir calculer quelques exemples simples de sommes de séries numériques.

Compétences **non** exigibles

- ✓ Le critère d'Abel.
- ✓ Comparaison série/intégrale (qui sera vu le semestre suivant).

Topologie et calcul différentiel.

- Normes sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
- Notion de topologie sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$: boules, ouverts et fermés.
- Notion de limite associée à une norme.
- Continuité des fonctions de deux ou trois variables.
- Dérivation des fonctions de deux ou trois variables : dérivées partielles, fonctions de classe C^1.
- Dérivation des fonctions composées. Matrice jacobienne.
- Inégalité des accroissements finis.
- Plan tangent à une surface $z = f(x,y)$.
- Dérivées secondes d'une fonction de classe C^2, théorème de Schwarz.
- Extrema locaux. Position d'une surface par rapport à son plan tangent.

Compétences exigibles

- ✓ Savoir montrer qu'un ensemble simple de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est ouvert, fermé.

✓ Savoir montrer qu'une fonction de plusieurs variables est continue.
✓ Savoir calculer les dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables.
✓ Savoir montrer qu'une fonction est de classe C^1.
✓ Savoir calculer les points critiques d'une fonction et de vérifier s'ils sont extrema ou pas.

Compétences **non** exigibles

✓ Notion de différentiabilité abstraite.
✓ Théorème des fonctions implicites et d'inversion locale.
✓ Extremas liés.

L'intégrale de Riemann pour les fonctions C^0 par morceaux.

- Définition (on admettra la construction) de l'intégrale de Riemann : sommes de Riemann, exemples.
- Linéarité, positivité, croissance.
- Inégalité triangulaire, inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Théorème fondamental de l'analyse.
- Méthodes de calculs : primitives, intégration par parties, changement de variables.
- Première formule de la moyenne.
- Formules de Taylor, applications.
- Introduction aux intégrales doubles.

Compétences exigibles

✓ Savoir utiliser les primitives pour calculer une intégrale.
✓ Savoir faire des intégrations par parties.
✓ Savoir reconnaître un changement de variables et l'utiliser pour le calcul d'une intégrale.

Compétences **non** exigibles

✓ Les fonctions réglées.
✓ Interversion limite/intégrale.

X3M0030 - Analyse et probabilités (28h CM, 44h TD)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :

X1M0010 ≪Mathématiques 1≫

X2M0020 ≪Espaces vectoriels et applications linéaires≫

X2M0050 ≪Analyse réelle≫

- Rappels ensemblistes. Espaces de probabilité : définitions, exemples.
- Probabilités conditionnelles et indépendance.
- Variables aléatoires discrètes. Espérance, variance d'une variable aléatoire discrète.
- Chaînes de Markov (nombre d'états fini) : définition. Réduction matricielle, calcul d'éléments propres. Classification des états, loi stationnaire, convergence.

Compétences exigibles

✓

Compétences **non** exigibles

✓

X3M0040 - Approximation de fonctions (28h CM, 44h TD)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :

X1M0010 ≪Mathématiques 1≫

X2M0050 ≪Analyse réelle≫

Le but du module est la maîtrise de deux objets : l'intégrale de fonctions d'une variable et la convergence de suite et séries de fonctions. Ce module s'appuie essentiellement sur le module d'Analyse réelle. La notion de convergence, et donc d'approximation de fonctions, est éclairée de différentes manières.

- Intervalles, borne supérieure d'une partie de R.
- Séries numériques absolument convergentes, exemples : séries géométriques, séries de Riemann. Critères de convergence. Exemples de séries semi-convergentes.
- Intégrale de Riemann. Notions d'intégration numérique. Exemples d'intégrales généralisées. Relation série-intégrale
- Suites et séries de fonctions, convergence simple, uniforme, normale. Exemple des séries entières

Compétences exigibles

✓ Savoir étudier la convergence de séries numériques simples (plusieurs critères)

✓ Utiliser les outils adaptés en fonction du signe du terme général d'une série

✓ Calculer des intégrales de fonctions numériques standard (IPP, changements de variables simples)

✓ Majorer, minorer des intégrales de fonctions positives

✓ Calculer des équivalents pour la convergence d'intégrale (théorèmes de comparaison)

✓ Calculer la limite simple d'une suite de fonctions, la somme d'une série de fonctions : démontrer le cas échéant la convergence uniforme, normale.

✓ Utilisation des théorèmes d'interversion.

Compétences **non** exigibles

✓

X3M0050 - Algèbre Linéaire pour Physique-Chimie (20 H CM , 28 H TD)

Cette unité nécessite en prérequis le module :

X1M0010 «Mathématiques 1 » :

- *Résolutions de systèmes linéaires.*

L'objectif de ce cours est une présentation des espaces vectoriels en s'appuyant sur les techniques acquises de résolutions de systèmes homogènes d'équations linéaires. Il s'agit, avant tout, de comprendre et de savoir manipuler les résultats du cours en dimension 2 et 3 (voire 4). Certaines notions profiteront à être illustrées par une représentation géométrique vectorielle (colinéarité, coplanéarité, projections, aires, volumes).

Algèbre

- Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et ses sous-espaces vectoriels.
- Applications linéaires - Matrices.
- Diagonalisation.
- Espaces Euclidiens. Produit scalaire.

Compétences exigibles

- ✓ Savoir dire et démontrer si un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel, et si une application entre espaces vectoriels est linéaire.
- ✓ Déterminer une base d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
- ✓ Savoir caractériser une application linéaire sur une base et l'exprimer en coordonnées en faisant le lien avec sa représentation matricielle.
- ✓ Savoir additionner et multiplier des matrices (dont formule du binôme).
- ✓ Savoir calculer le déterminant d'une matrice 2×2 et 3×3.
- ✓ Savoir caractériser une matrice inversible et savoir l'inverser.
- ✓ Savoir utiliser une matrice de changement de bases pour changer de coordonnées.
- ✓ Savoir diagonaliser une matrice.
- ✓ Savoir associer forme bilinéaire et matrice symétrique.
- ✓ Savoir diagonaliser une matrice symétrique sur une base orthonormée.

Compétences **non** exigibles

- ✓ Déterminants des endomorphismes.
- ✓ Espaces vectoriels abstraits

X3M0060 - Analyse et géométrie (36h CM, 60h TD)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :

X1M0010 ≪Mathématiques 1 ≫ :

- *Révisions sur les nombres réels (en travail personnel). Rappels sur les nombres complexes.*
- *Résolution de systèmes linéaires.*
- *Fonctions d'une variable réelle : limite, continuité, dérivation et primitivation. Fonctions usuelles.*
- *Quelques méthodes de résolution d'équations différentielles d'ordre un ou deux.*

X2M0010 ≪Analyse 1 ≫ :

- *Nombres réels, théorème de la borne supérieure.*
- *Suites numériques : suites monotones, suites adjacentes, critère de Cauchy.*
- *Limites et continuité des fonctions d'une variable réelle, théorèmes des valeurs intermédiaires et des bornes atteintes.*
- *Accroissements finis et formule de Taylor-Lagrange.*
- *Développements limités, formule de Taylor-Young.*

X2M0020 ≪Espaces vectoriels et applications linéaires≫ :

- *Sous-espaces vectoriel de* $\mathbb{R}^n$.
- *Applications linéaires ; noyau et image ; théorème du rang.*
- *Bases ; représentation matricielle d'une application linéaire.*

Le but de ce cours est d'appréhender le monde des fonctions à plusieurs variables aussi bien du point de vue analytique que du point de vue géométrique. Ce cours a également pour but de donner certains outils de calcul couramment utilisés en physique.

- Etude locale des courbes paramétrées dans le plan et dans l'espace.
- Notions de topologie sur $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
- Limites et continuité des fonctions de deux ou trois variables.
- Calcul différentiel des fonctions de deux ou trois variables : dérivées partielles, fonctions C^1, extrema.
- Intégrale de Riemann sur un segment : construction de l'intégrale, calcul de primitives.
- Intégrales doubles et triples : construction intuitives, aire ou volume d'un domaine.
- Analyse vectorielle : intégrale curviligne, intégrale de surface, formule de Green-Riemann et théorème de Stokes.
- Diagonalisation des matrices 2×2 ou 3×3 et application à la résolution de systèmes différentiels.

Compétences exigibles

✓ Savoir faire l'étude complète d'une courbe paramétrée plane (c'est à dire incluant l'étude des points singuliers et des asymptôtes) et en donner l'allure.

✓ Savoir calculer le repère de Frenet d'une courbe plane ou gauche ainsi que les invariants classiques (courbure et torsion).

✓ Connaître les normes usuelles et savoir dessiner les boules associées.

✓ Savoir montrer qu'un domaine élémentaire est, selon les cas, ouvert, fermé, compact.

✓ Savoir montrer qu'une fonction est continue.

✓ Savoir calculer des dérivées partielles et maitrisez la technique de calcul des dérivées partielles de fonctions composées. Connaître les notions de DL à l'ordre 1 et 2 pour une fonction régulière.

✓ Savoir déterminer les points critiques d'une fonction de deux variables et d'en préciser la nature.

- ✓ Savoir justifier l'existence d'extremum globaux d'une fonction de deux variables.
- ✓ Savoir calculer des primitives. Maitrisez les techniques d'intégration par partie et de changement de variable.
- ✓ Savoir calculer des intégrales doubles et triples simples ainsi que des aires et des volumes d'objets géométriques simples (sphères et surfaces de révolutions).
- ✓ Savoir utiliser la formule de Green-Riemann pour calculer des aires. Savoir calculer dans des cas simples des circulations et des flux à de champs de vecteurs.
- ✓ Connaître les critères de diagonalisation d'une matrice. Savoir diagonaliser une matrice et résoudre un système différentiel.

<u>Compétences **non** exigibles</u>

- ✓ L'étude approfondie des courbes en polaires.
- ✓ La topologie des espaces vectoriels normés.
- ✓ La notion de différentiabilité.
- ✓ Le calcul différentiel sur les formes différentielles.
- ✓ La trigonalisation des matrices.

X4M0010 - Analyse 3 (20h CM, 28h TD)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :

X2M010 ≪Analyse 1 ≫ :

- *Nombres réels, théorème de la borne supérieure.*
- *Suites numériques : suites monotones, suites adjacentes, critère de Cauchy.*
- *Limites et continuité des fonctions d'une variable réelle,*
- *théorèmes des valeurs intermédiaires et des bornes atteintes.*
- *Accroissements finis et formule de Taylor-Lagrange.*

X3M0020 ≪Analyse 2≫ :

- *Rappels sur les bornes supérieures.*
- *Séries numériques : séries à termes positifs, séries absolument convergentes, séries alternées.*
- *Intégrale de Riemann : construction, linéarité, positivité, croissance, majoration de la valeur absolue ;*
- *méthodes de calcul : primitives, changement de variable, intégration par partie ;*
- *formule de Taylor avec reste intégral.*
- *Notions de topologie sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, continuité et limites des fonctions de deux ou trois variables.*
- *Dérivation des fonctions de deux ou trois variables : fonctions de classe C^1,*

Le but de ce cours est d'introduire les notions de convergence uniforme et de convergence normale.

- Intégrales généralisées, comparaison séries/intégrales.
  - Définition :
  - Exemples classiques : intégrales de Riemman $\int_0^1 t^\alpha dt$ et $\int_1 \infty t^\alpha dt$
  - Intégrales généralisées de fonctions positives, critère de convergence.
  - Intégrales généralisées absolument convergente.
  - Exemple de $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$, $\int_0^\infty \sin(t^2) dt$...
  - Critère de comparaison série intégrale.
- Convergence de fonctions uniforme des suites de fonctions, convergence normale des séries de fonctions.
  - Définition de convergence simple, uniforme
  - Critère de Cauchy :
    Proposition *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs complexes. On suppose que*

    $$\forall \epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}, \text{tel que } \big(n, m \geq n_0(\epsilon)\big) \Rightarrow \sup_{x \in I} |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \ .$$

    Alors pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_n$ converge vers un nombre complexe $f_\infty(x)$ et la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f_∞.
  - Convergence normale.
  - Continuité, convergence uniforme et convergence normale :
    Théorème : *Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs complexes et f_∞ une fonction définie sur I et $x_0 \in I$. On suppose*
    – *la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f_∞,*
    – *Chaque fonction f_n est continue en x_0,*
    Alors f_∞ est continue en x_0. et de ces corollaires.
  - Exemples des fonctions $\exp, \sin, \cos$ définies à l'aide de leurs séries entières.
- Convergence uniforme et intégration (de fonctions continues ou continues par morceaux cela suffit amplement)

– Intégration sur un segment et convergence uniforme :
Théorème : *Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ qui converge uniformément vers f_∞. Alors on a*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f_\infty(t)dt \ .$$

– Intégrales généralisées :
Petit théorème de convergence dominée : *Soient I un intervalle de R , (f_n) une suite de fonctions continues sur I, f_∞ une fonction continue sur I, et g une fonction positive continue sur I, on suppose que*
- *$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in I,\ |f_n(x)|\le g(x)$.*
- *L'intégrale généralisée de g sur I converge.*
- *Pour chaque intervalle fermé borné $[a,b]\subset I$, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f_∞ sur $[a,b]$.*

Alors les intégrales généralisées de f_n et de f_∞ sur I convergent absolument et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)dt = \int_I f_\infty(t)dt \ .$$

– Intégration sur un segment et convergence normale :
Théorème *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ on suppose que la série de terme général u_n converge normalement sur $[a,b]$ alors*

$$\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b u_n(t)dt.$$

– Intégrale généralisée et convergence normale :
Théorème *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(u_n)_n$ une suite de fonctions continues sur I, on suppose*
- *Pour chaque entier n, l'intégrale généralisée de u_n sur I est absolument convergente.*
- *La série de terme général $\int_I |u_n(t)|dt$ est absolument convergente.*
- *Pour chaque intervalle $[a,b]$ inclus dans I, la série de terme général u_n converge normalement sur $[a,b]$*

Alors l'intégrale généralisée sur I de la fonction $t\mapsto(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)$ converge absolument et

$$\int_I\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_I u_n(t)dt.$$

- Convergence uniforme et fonctions de classe C^1 :
  – Convergence uniforme et primitive :
  Proposition : *Soient I un intervalle **borné** de $\mathbb{R}$ et $a\in I$, $C\in\mathbb{C}$. On suppose que $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continue sur I qui converge uniformément vers une fonction f_∞ [1] .Alors la suite de fonctions (F_n) définie par*

$$F_n(x) = C + \int_a^x f_n(t)dt$$

converge uniformément vers la fonction F_∞ définie par

$$F_\infty(x) = C + \int_a^x f_\infty(t)dt.$$

  – Convergence uniforme et régularité C^1 : On démontrera d'abord le résultat suivant :
  Théorème : *Soit I un intervalle **borné** de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe C^1 sur I, on suppose que*
  - *La suite des dérivées $(f_n')_n$ converge uniformément vers une fonction g.*
  - *Il y a un réel x_0 de I tel que la suite $(f_n(x_0))_n$ converge :*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = \ell$$

Alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f_∞ de classe C^1 telle que
- *$f_\infty(x_0) = \ell$*

1. Ainsi f_∞ est une fonction continue.

– $f'_\infty = g$.

– Convergence normale et régularité C^1 :

Théorème : *Soit I un intervalle **borné** de $\mathbb{R}$ et $(u_n)_n$ une suite de fonctions de classe C^1 sur I, on suppose que*

– La série de terme général u'_n converge normalement.

– Pour un $x_0 \in I$, la série de terme général $u_n(x_0)$ converge absolument.

Alors la série de terme général $u_n(x)$ converge normalement et la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est de classe C^1 et l'on a

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x)\ .$$

– Exemple : la fonction exp est de classe C^1 et $\exp' = \exp$.

- Intégrales à paramètres.

– Il faudra surement faire des rappels sur la continuité de fonctions à deux variables et le lien avec la convergence de suites du plan.

– Il y a ici un obstacle à traiter les intégrales à paramètres, car il faut pour cela une approche de l'uniforme continuité. C'est une notion difficile qui n'a pas a priori pas été introduite auparavant. De toute façon on ne peut pas faire l'économie du théorème de Bolzano-Weierstrass. On peut par exemple faire l'économie de la notion de convergence uniforme en utilisant le résultat suivant :

Théorème $\star$: *Soient (f_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ et f_∞ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) La suite (f_n) converge uniformément vers f_∞.

ii) Pour toute suite (u_n) de l'intervalle $[a, b]$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \big(f_n(u_n) - f_\infty(u_n)\big) = 0.$$

iii) Pour toute suite convergente (u_n) de l'intervalle $[a, b]$, on a

$$\lim_{n\to\infty} f_n(u_n) = f_\infty\big(\lim_{n\to\infty} u_n\big)\ .$$

On pourrait aussi admettre les résultats qui suivent sans preuve mais ces preuves permettent une réflexion sur la notion de fonction continue de deux variables.

– Avec ce résultat on peut démontrer :

Théorème : *Soient J et $[a, b]$ des intervalles et $h : J \times [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue alors la fonction $H : J \to \mathbb{C}$ définie par*

$$H(x) = \int_a^b h(x, t)dt$$

est continue. et aussi le résultat suivant concernant les intégrales généralisées :

Théorème : *Soient J et I des intervalles et $h : J \times I \to \mathbb{C}$ une fonction continue . On suppose qu'il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}_+$ continue telle que*

i) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_I g(t)dt$ converge .

ii) $\forall (x, t) \in J \times I\ ,\ |h(x, t)| \le g(t)\ ,$

alors la fonction $H : J \to \mathbb{C}$ définie par

$$H(x) = \int_I h(x, t)dt$$

est continue

– Concernant la dérivabilité des intégrales à paramètres, on a le résultat suivant concernant les intégrales à paramètres sur des segments :

Théorème $\star$: *Soient J et $[a, b]$ des intervalles et $h : J \times [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose que la dérivée partielle de h par rapport à x existe*[2] *et que la fonction $\dfrac{\partial h}{\partial x} : J \times [a, b] \to \mathbb{C}$ est continue alors la fonction $H : J \to \mathbb{C}$ définie par*

$$H(x) = \int_a^b h(x, t)dt$$

2. C'est à dire pour tout $t \in [a, b]$, la fonction $x \in J \mapsto h(x, t)$ est dérivable.

est de classe C^1 et

$$H'(x) = \int_a^b \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)dt \ .$$

et le résultats suivant concernant les intégrales généralisées à paramètres :

Théorème : *Soient J et I des intervalles et $h : J \times I \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose que la dérivée partielle de h par rapport à x existe et que la fonction $\frac{\partial h}{\partial x} : J \times I \to \mathbb{C}$ est continue. On suppose de plus qu'il existe des fonctions $g_0, g_1 \ I \to \mathbb{R}_+$ continue telle que*

i) Les intégrales généralisées $\int_I g_0(t)dt$ et $\int_I g_1(t)dt$ convergent .

ii) $\forall (x,t) \in J \times I$, $|h(x,t)| \leq g_0(t)$,

iii) $\forall (x,t) \in J \times I$, $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq g_1(t)$,

Alors la fonction $H : J \to \mathbb{C}$ définie par

$$H(x) = \int_I h(x,t)dt$$

est de classe C^1 et

$$H'(x) = \int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)dt \ .$$

- Séries entières :
  - Définition
  - Rayon de convergence :
    Définition : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, on appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ la borne supérieure de l'ensemble des réels $r \geq 0$ tel que la série de termes général $|a_n| r^n$ est convergente. C'est également la borne supérieure de l'ensemble des nombres réels $r \geq 0$ tel que la suite $(|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
    On donne ensuite quelques formules (on ne parle pas de limite supérieure dans les cours d'analyse de L1 et L2 et il n'est donc pas question de démontrer/énoncer la formule de Hadamart. On se contentera des formules utilisants les critères de d'Alembert et Cauchy avec les limites.
  - Continuité sur le disque de convergence. Il faudra pour cela faire quelque rappels sur la notion de fonction continue sur un ouvert du plan complexe.
  - Restriction à l'intervalle de l'axe réel contenu dans le disque de convergence : régularité C^1 et C^∞ (On notera bien ici qu'il n'est pas question de fonctions holomorphes qui seront traités en L3.
  - Fonctions dévellopables en séries entières
  - Quelques applications : équation différentielle, dénombrement...

Compétences exigibles

- ✓ Savoir démontrer le théorème de comparaison suite/intégrales.
- ✓ Savoir démontré qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue.
- ✓ Savoir démontré qu'une intégrale généralisée (absolument convergente) à paramètre est de classe C^1
- ✓ Savoir intervertir une limite uniforme pour les intégrales absolument convergentes.
- ✓ Savoir calculer un rayon de convergence d'une série entière élementaire.

Compétences **non** exigibles

- ✓ Convergence uniforme et intégrales généralisées semi-convergente.
- ✓ Démontration des théorèmes avec l'étiquette $\star$.
- ✓ L'étude des séries entières n'est faite que de façon superficielle. Le temps limité ne permet pas de s'approfondir sur des notions plus évoluées. Cette étude n'est faite que pour illustrer la convergence normale et les théorèmes de régularité qui s'y rattachent.

X4M0020 - Probabilités Discrètes (20 H CM , 20 H TD , 8 H TP)

Cette unité nécessite en prérequis le module :

X1M0010 «Mathématiques 1 » :

- *Révisions sur les nombres réels.*

L'objectif de ce cours est d'acquérir des méthodes de dénombremement et des notions de probabilités à travers les probabilités discrètes. C'est l'occasion d'aborder les premières techniques de dénombrement :
– Énumération par arrangement ; propriété d'exponentiation du cardinal.
– Estimation d'un cardinal par le principe des tiroirs.
– Utilisation du principe des bergers et calcul du nombre d'arrangements et de combinaisons.
– Technique de double comptage ; formule du crible.
On peut ensuite introduire l'axiomatique des espaces probabilisés finis (voire discrets) en s'appuyant sur des exemples de modélisation qui conduiront, grâce aux techniques de dénombrement, aux lois de probabilités associées, dont les lois classiques (uniforme, binomiale, hypergéométrique, Poisson). Enfin, on pourra montrer l'intérêt d'utiliser des variables aléatoires discrètes dans de nombreux problèmes de probabilités discrètes : lois usuelles, calcul d'espérance, variance... Une introduction au logiciel R sera proposée en TP avec exercices et exemples d'utilisations issus de l'étude des probabilités discrètes.

Probabilités discrètes

- Ensembles et dénombrement.
- Espaces probabilisés discrètes.
- Probabilités conditionnelles et indépendance.
- Variables aléatoires discrètes ; moments.

Compétences exigibles

✓ Maîtriser différentes techniques de dénombrement.
✓ Savoir reconnaître et dénombrer des listes, des arrangements, des combinaisons.
✓ Faire le lien entre probabilités conditionnelles et arbres de probabilités.
✓ Utilisation des formules de probabilités composées, totales, de la formule de Bayes.
✓ Savoir déterminer si des événements ou des variables aléatoires sont indépendantes.
✓ Déterminer les lois conjointes et lois marginales d'un couple de variables aléatoires discrètes ; déterminer la loi de leur somme et la loi de leur produit.
✓ Inégalités classiques : Markov, Tchebichev, Cauchy-Schwarz.
✓ Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire dicrète ; connaître l'espérance et la variance des lois usuelles. Coefficient de corrélation (cas d'égalité à ± 1).
✓ Savoir utiliser la formule de transfert.

Compétences **non** exigibles

✓ Tribus ;
✓ Variable densité ;
✓ Fonction génératrice.

X4M0030 - Introduction à l'Analyse Numérique (16h CM, 16h TD, 16h TP)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :

X1M010 «Mathématiques 1» :

- *Résolution de systèmes linéaires*
- *Fonctions d'une variable réelle.*

X2M010 «Analyse 1 » :

- *Suites numériques.*
- *Développements limités, formule de Taylor.*
- *Accroissements finis, théorème des valeurs intermédiaires.*

X2M020 «Espaces vectoriels et applications linéaires» :

- *Bases, déterminants.*

Le but de ce cours est d'introduire les méthodes élémentaires d'analyse numérique.
Les TP sont à la fois l'occasion de programmer les algorithmes et méthodes vus en cours, mais également de compléter les TD en permettant de constater des phénomènes difficiles à appréhender en TD.
Le nombre d'heures de TD étant faible, le cours devra être illustré d'exemples.

Notions abordées

- Représentation des nombres en machine.
- Résolution d'équations scalaires non linéaires.
- Interpolation de Lagrange.
- Quadrature.
- Méthodes directes de résolution de systèmes linéaires.

Compétences exigibles

- ✓ Savoir représenter un nombre selon la norme IEEE754, connaître les nombres spéciaux et les règles de l'addition et de la multiplication en machine. Comprendre la notion d'erreur d'arrondi.
- ✓ Comprendre et mettre en œuvre la méthode de dichotomie.
- ✓ Comprendre et mettre en œuvre des méthodes de point-fixes fournies : déterminer si elles convergent, leur ordre, dans quel intervalle choisir la condition initiale. Connaître la formule de la méthode de Newton-Raphson.
- ✓ Savoir calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange à la fois en utilisant la base de Lagrange et par les différences divisées.
- ✓ Connaître la formule du reste de l'interpolation.
- ✓ Maîtriser les notions de base de la quadrature : ordre (les deux définitions), formule élémentaire, formule composée.
- ✓ Connaître les quadratures de base (rectangles, trapèzes, Simpson) : expression, ordre, erreur. Connaître le principe des méthodes de Newton-Cotes.
- ✓ Maîtriser l'algorithme de décomposition LU et la résolution d'un système linéaire avec celle-ci. Maîtriser les variantes avec permutations par ligne ou par colonne. Connaître un équivalent du nombre d'opérations et savoir calculer les déterminants avec la décomposition LU.
- ✓ Savoir décomposer une matrice sdp avec la méthode de Choleski.
- ✓ Savoir programmer les algorithmes vus en cours.

Compétences **non** exigibles

- ✓ Déterminer le résidu d'une formule de quadrature (fait avec Taylor en cours, noyaux de Peano vus au niveau supérieur).

X4M0040 - Géométrie affine et euclidienne (20h CM, 28h TD)

Cette unité nécessite en prérequis le module :

S12M020 / X2M0020 «Espaces vectoriels et applications linéaires» :

- *Sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^n$.
- *Applications linéaires ; noyau et image ; théorème du rang.*
- *Bases ; représentation matricielle d'une application linéaire.*

S21M010 / X3M0010 «Réduction des endomorphismes» :

- *Espace vectoriel, application linéaire (axiomatique).*
- *Somme directe, projecteur, symétrie.*
- *Formes linéaires.*
- *Éléments propres d'un endomorphisme, polynôme caractéristique.*
- *Critères de diagonalisation / trigonalisation faisant intervenir le polynôme caractéristique.*
- *Les matrices symétriques réelles sont diagonalisables.*
- *Espaces vectoriels euclidiens ; isométries vectorielles en dimension 2.*

Ce cours a pour objectif l'étude de quelques figures du plan usuel (triangles et cercles). Dans ce but, quelques notions de géométrie affine et euclidienne sont abordées.

Notions affines

- Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$; direction.
- Repère cartésien ; repère affine.
- Barycentre, repère barycentrique.
- Application affine, application linéaire associée ; $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$.
- Translation, homothétie, projection et symétrie.
- Les théorèmes «classiques» : Thalès, Pappus, Desargues.

Compétences exigibles

✓ Savoir reconnaître un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa direction.
✓ Savoir situer un barycentre sur une figure.
✓ Savoir reconnaître une application affine et déterminer l'application linéaire associée.
✓ Une application affine est une translation (resp. une homothétie) si, et seulement si, son application vectorielle est Id (resp. λId avec $\lambda \notin \{0, 1\}$).
✓ Savoir déterminer l'image d'un point ou d'une droite par une translation, une homothétie, une projection ou une symétrie.

Compétences **non** exigibles

✓ Axiomatique des espaces affines.

Notions euclidiennes.

- Formes bilinéaires symétriques, produit scalaire.
- Orthogonalité, supplémentaire orthogonal.
- Base orthonormée, procédé de Gram-Schmidt.
- Orientation, produit vectoriel.
- Projection et symétrie orthogonale.

- Isométries vectorielles en dimension 2.
- Espace affine euclidien, distance.
- Théorème de Pythagore.
- Projection et symétrie orthogonale.
- Distance d'un point à une droite ou à un plan. Déterminant de Gram.
- Médiatrice ; plan médiateur ; bissectrices.
- En dimension 3, perpendiculaire commune à deux droites données.
- Isométries affines du plan.
- Angles orientés de demi-droites, de vecteurs, de droites.
- Caractérisation angulaire des bissectrices.
- Similitudes planes ; ce sont les transformations affines du plan qui préservent les angles.
- Connaître ces notions du point de vue des nombres complexes.

Compétences exigibles

- ✓ Savoir reconnaître un produit scalaire sur des exemples.
- ✓ Savoir déterminer l'orthogonal d'un sous-espace.
- ✓ Savoir mettre en œuvre le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
- ✓ Sur des exemples, savoir déterminer les notions vues en cours : distances, médiatrices, bissectrices ...
- ✓ Connaître et savoir reconnaître les isométries du plan affine euclidien.
- ✓ Savoir manipuler les angles.

Compétences **non** exigibles

- ✓ Isométrie en dimension supérieure à 2.
- ✓ Formes quadratiques.
- ✓ Adjoint d'un endomorphisme.

Triangles - Cercles

- Somme des angles d'un triangle.
- Triangles semblables.
- Relations métriques dans le triangle.
- Droite d'Euler, cercle des neuf points.
- Théorèmes de Céva et de Ménélaüs.
- Cercle, équation d'un cercle.
- Intersection d'un cercle avec une droite.
- Angle inscrit et angle au centre ; caractérisation angulaire de la cocyclicité de quatre points.
- Puissance d'un point par rapport à un cercle ; conjugaison, polarité, inversion.

Compétences exigibles

- ✓ Sur des exemples, savoir utiliser des transformations affines (telles que symétries, homothéties ou rotations) pour étudier une situation géométrique.
- ✓ Savoir déterminer une polaire ou un pôle par rapport à un cercle.
- ✓ Connaître l'inverse d'une droite ou d'un cercle.

Compétences **non** exigibles

- ✓ Faisceaux de cercles.

X4M0050 - Optimisation (28h CM, 44h TD)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :

X1M0010 ≪Mathématiques 1≫

X2M0020 ≪Espaces vectoriels et applications linéaires≫

X2M0050 ≪Analyse réelle≫

X3M0040 ≪Approximation de fonctions≫

Ce premier module d'optimisation permet de faire le lien avec les nombreux programmes d'optimisation en économie. L'objectif est une bonne matrise du calcul différentiel des fonctions de 2 variables : il s'agit de savoir résoudre des programmes d'optimisation sans contrainte, et des cas simples de contrainte égalité omniprésents en économie, en justifiant toutes les étapes.

- Topologie de Rd, applications continues, différentiables, de classe C1. Gradient, formule de Taylor, inégalité des accroissements finis.
- Lignes de niveau, théorème des fonctions implicites (admis), exemples de courbes paramétrées
- Dérivées d'ordre supérieur, lemme de Schwarz, convexité.
- Minimisation sans contrainte.
- Minimisation avec contrainte égalité, multiplicateur de Lagrange.
- Applications en économie.

Compétences exigibles

✓ Démontrer la continuité, la différentiabilité d'une fonction de 2 variables

✓ Comprendre le sens d'une approximation locale d'une fonction de 2 variables

✓ Etudier les lignes de niveau d'une fonction, représenter cette fonction avec son gradient.

✓ Reconnaître une fonction convexe, strictement convexe.

✓ Démontrer l'existence d'un minimum (cas compact, critères simples dans le cas non compact).

✓ Etudier les points critiques dans le cas sans contrainte.

✓ Paramétrer la contrainte dans des cas simples.

Compétences **non** exigibles

✓

X4M0060 - Statistiques et probabilités (20h CM, 24h TD)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :

X2M0020 ≪Espaces vectoriels et applications linéaires≫
X2M0050 ≪Analyse réelle≫
X3M0030 ≪Analyse et probabilités≫
X3M0040 ≪Approximation de fonctions≫

- Rappels de statistique descriptive.
- Notion de corrélation et covariance. Méthode des moindres carrés.
- Variables aléatoires densité. Vecteurs aléatoires.
- Loi faible des grands nombres. Théorème central limite (admis) et applications.

Compétences exigibles

✓

Compétences **non** exigibles

✓

X4M0070 - Théorie des jeux (8h CM, 12h TD)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :
? ? ? ? ?

- Introduction, jeux.
- Stratégies pures/mixtes.
- Information, équilibre de Nash.
- Introduction aux jeux répétés, à information incomplète.

Compétences exigibles

✓

Compétences **non** exigibles

✓

X4M0080 - Série et transformée de Fourier (20h CM, 28h TD)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :

X1M0010 «Mathématiques 1 » :

- *Révisions sur les nombres réels (en travail personnel). Rappels sur les nombres complexes.*
- *Résolution de systèmes linéaires.*
- *Fonctions d'une variable réelle : limite, continuité, dérivation et primitivation. Fonctions usuelles.*
- *Quelques méthodes de résolution d'équations différentielles d'ordre un ou deux.*

X2M0010 «Analyse 1 » :

- *Nombres réels, théorème de la borne supérieure.*
- *Suites numériques : suites monotones, suites adjacentes, critère de Cauchy.*
- *Limites et continuité des fonctions d'une variable réelle, théorèmes des valeurs intermédiaires et des bornes atteintes.*
- *Accroissements finis et formule de Taylor-Lagrange.*
- *Développements limités, formule de Taylor-Young.*

X3M0060 «Analyse et Géométrie » :

- *Etude locale des courbes paramétrées dans le plan et dans l'espace.*
- *Notions de topologie sur* $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ *et* $\mathbb{R}^3$.
- *Limites et continuité des fonctions de deux ou trois variables.*
- *Calcul différentiel des fonctions de deux ou trois variables : dérivées partielles, fonctions* C^1, *extrema.*
- *Intégrale de Riemann sur un segment : construction de l'intégrale, calcul de primitives.*
- *Intégrales doubles et triples : construction intuitives, aire ou volume d'un domaine.*
- *Analyse vectorielle : intégrale curviligne, intégrale de surface, formule de Green-Riemann et théorème de Stokes.*
- *Diagonalisation des matrices* 2×2 *ou* 3×3 *et application à la résolution de systèmes différentiels.*

Le but de ce cours est de donner les notions de base sur les suites et séries de fonctions ainsi qu'une introduction à l'analyse de Fourier.

- Séries numériques. Critères de convergence.
- Suites et séries de fonctions. Notions de convergence simple et uniforme.
- Séries entières. Développement de fonctions en séries entières.
- Séries de Fourier. Théorème de Dirichlet.
- Transformée de Fourier d'une fonction de la variable réelle.

Compétences exigibles

✓ Connaître les séries de référence convergentes ou divergentes.
✓ Connaître les critères usuels de convergence pour les séries.
✓ Savoir calculer quelques exemples simples de sommes de séries numériques.
✓ Savoir déterminer si une suite ou une série de fonctions converge simplement.
✓ Savoir déterminer le rayon de convergence d'une série entière.
✓ Savoir développer une fonction en série entière et savoir chercher des solutions d'équations différentielles du second ordre sous forme de séries entières.
✓ Savoir calculer la série de Fourier d'une fonction périodique.

- ✓ Savoir calculer les transformées de Fourier de fonctions simples.

Compétences **non** exigibles

- ✓ Le critère d'Abel pour les séries.
- ✓ L'étude approfondie de la convergence uniforme.

X4M0090 - Probabilité pour la physique (20h CM, 28h TD)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :

X1M0010 ≪Mathématiques 1 ≫ :

- *Révisions sur les nombres réels (en travail personnel). Rappels sur les nombres complexes.*
- *Résolution de systèmes linéaires.*
- *Fonctions d'une variable réelle : limite, continuité, dérivation et primitivation. Fonctions usuelles.*
- *Quelques méthodes de résolution d'équations différentielles d'ordre un ou deux.*

X2M0040 ≪Calcul différentiel et intégral ≫ :

- *Formule de Taylor-Young et développements limités.*
- *Limites et continuité des fonctions de deux ou trois variables.*
- *Calcul différentiel des fonctions de deux ou trois variables : dérivées partielles, fonctions C^1, extrema.*
- *Intégrale de Riemann et calcul de primitives.*
- *Intégrales généralisées.*
- *Notion de courbes paramétrées planes et d'intégrale curviligne le long d'une courbe.*

Le but de ce cours est d'inculquer les bases du calcul des probabilités en vue d'applications à la physique.

- Ensembles et dénombrement.
- Introduction au calcul des probabilités.
- Probabilités conditionnelles et indépendance.
- Variable aléatoires discrètes et continues. Lois usuelles.
- Moment des variables aléatoires discrètes et continues. Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
- Limite de suites de variables aléatoires (TCL).
- Intervalles de confiance.
- Statistiques à deux variables.

Compétences exigibles

✓ Savoir dénombrer dans des situations simples.
✓ Savoir calculer des probabilités. Connaître la formule de Bayes et savoir l'appliquer pour calculer des probabilités conditionnelles.
✓ Bien connaître les lois de probabilité discrètes usuelles (uniformes, binômiales, hypergéométriques, Poissons, géométriques) ainsi que les lois continues à densité usuelles (uniformes, exponentielles et Laplace-Gauss).
✓ Savoir déterminer les lois conjointes d'un couple de variables aléatoires discrètes.
✓ Savoir faire des calculs de moment.
✓ Connaître l'approximation de Moivre-Laplace.
✓ Savoir déterminer un intervalle de confiance pour une proportion.
✓ Savoir déterminer une droite de régression.

Compétences **non** exigibles

✓ La notion de tribu d'évènements et de probabilité abstraite.
✓ Les couples de variables aléatoires à densité.
✓ Les fonctions caractéristiques.

X5M0010 - Equations différentielles (16h CM, 24h TD)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :

- ✓ Analyse 1,
- ✓ Analyse 2,
- ✓ Analyse 3
- ✓ Espaces vectoriels et applications linéaires
- ✓ Réductions des endomorphismes.

Description du cours : Le but de ce cours est d'introduire l'étude des équations différentielles au travers des résultats fondamentaux d'existence et d'unicité. On donnera quelques outils permettant l'étude qualitative des solutions d'équations différentielles.

Ce cours se déroule en parallèle avec le module X5M0020 Topologie-Calcul différentiel. Il demande donc un peu de synchronisation. C'est pourquoi on commence le cours par introduire également une norme sur les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et donner des définitions de base de la topologie de $\mathbb{R}^n$ et on donnera quelques éléments de convergence dans l'espace vectoriel $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ en insistant sur le parallèle avec le cours d'anayse 3 qui traite de convergence uniforme. De plus il semble que le temps imparti pour ce cours soit relativement cours et que cela ne permette pas d'étudier les propriétés induites par la continuité et la différentiabilité des solutions par rapport aux conditions initiales ou aux paramètres, ni d'étudier la stabilité des points d'équilibres. De toute façon dans l'optique de réduire les syllabus pour ne pas perdre les étudiants, cela n'est pas raisonnable.

- Normes
  - On doit fixer le choix d'une norme sur $\mathbb{R}^n$. Par exemple :

$$\|(x_1, \dots, x_n) = \sup_j \{|x_j|\} \ .$$

  - On en donne les propriétés (inégalité triangulaire...), on lui associe la norme de matrice

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\| \ .$$

  - Rappel sur la convergence normale dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur un intervalle et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. (Continuité de la limite et passage à la limite dans les intégrales)
- Equation différentielles linéaires :

$$\triangle \ \dot{x} = Ax$$

  où A est une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans l'espace des matrices carrées $n \times n$.
  - Principe de superpositions des solutions. L'espace des solutions est un sous espace vectoriel de $C^0(I, \mathbb{R}^n)$.
  - Unicité de la solution au problème de Cauchy :

$$\diamondsuit \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \ . \end{cases}$$

    Théorème : *Si $x_1, x_2 \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ vérifient toutes deux $\diamondsuit$ alors $x_1 = x_2$.*
    Corollaire : *L'espace vectoriel des solutions de $\triangle$ est un espace vectoriel de dimension finie au plus n.*
    Application : *Cas où A est une matrice constante diagonalisable sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$, Base de l'espace des solutions dans ces cas là. Cas des équations du second ordre à coeffcients constants étudiés en L1.*
  - Existence d'une solution au problème de Cauchy :
    Théorème : *Si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in I$ alors le problème de Cauchy $\diamondsuit$ admet une unique solution .*
    Corollaire : *La dimension de l'espace vectoriel des solutions de $\triangle$ est n.*

  - Base de l'espace des solutions de $\triangle$, Wronskien d'une famille de n-solutions de l'équation différentielle $\triangle$. Exemple de l'équation $\ddot{x} + px\dot{x} + q = 0$ où $p, q \in C^0(I, \mathbb{R})$.
  - Étude de l'équation différentielle :

$$\heartsuit \quad \dot{x} = Ax + b$$

    où $A \in C^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n))$ et $b \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$.

    - Principe de la solution particulière et quelques exemples.
    - Méthodes de la variations des constantes. Illustrations sur le cas des équations $\ddot{x} + px\dot{x} + q = f$ où $p, q, f \in C^0(I, \mathbb{R})$.

- Le théorème de Cauchy-Lipschitz et ces conséquences.
  - La condition de Lipschitz. Exemple des fonctions de classe C^1.
  - Le théorème de Cauchy-Lipschitz :
  - Solutions maximales.
  - Explosion des solutions maximales :

    Théorème : *Soient I un intervalle ouvert, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^0(I \times \Omega, \mathbb{R}^n)$ une fonction localement Lipschitzienne par rapport à la seconde variable et $\varphi\colon]\alpha, \omega[\to \Omega$ une solution maximale de l'équation différentielle*

    $$\dot{x} = f(t, x) \ .$$

    Si ω n'est pas la borne supérieure de I (c'est à dire si $\omega \in I$) alors pour tout compact $K \subset \Omega$, il y a un temps $\tau_K \in]\alpha, \omega[$ telle que au delà de τ_K , φ ne soit plus dans K :

    $$t > \tau_K \Rightarrow \varphi(t) \notin K \ .$$

  - Équation différentielle autonome, Champs de vecteurs, Orbite, points d'équilibres.
  - Lemme de Gronwall et critère d'existence globale pour les champs de vecteurs définis sur $\mathbb{R}^n$ et à croissance au plus linéaire.
  - Continuité par rapport aux conditions initiales (résultat admis).

- Outils pour une étude qualitative des équations différentielles
  - Intégrales premières : équivalence avec solutions d'une EDP linéaire homogène d'ordre 1.
  - Si une ligne de niveau d'une intégrale première est compacte alors toute solution maximale partant de cette ligne de niveau est définie globalement.
  - Recherche d'intégrales premières dans le plan pour les champs de vecteurs à divergence nulle définie sur un rectangle.
  - Orbite périodique, critère pour avoir une orbite périodique dans le plan. **Théorème :** *Soient Ω un ouvert du plan et $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteur de classe C^1 sur Ω et $E\colon \Omega \to \mathbb{R}$ une intégrale première C^1 de X. On suppose que pour un réel c les trois propriétés suivantes soient vérifiées :*

    i) *La ligne de niveau $\Sigma_c = E^{-1}\{c\}$ est compacte.*

    ii) $\forall m \in \Sigma_c, X(m) \neq 0$

    iii) $\forall m \in \Sigma_c, DE(m) \neq 0$

    alors toute solution maximale de $\dot{x} = X(x)$ partant de Σ_c est périodique. De plus l'orbite de $m \in \Sigma_c$ est la compa osante deconenxe de Σ_c contenant m.
  - Techniques de barrières supérieures et inférieures pour les équations $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

Compétences exigibles

✓ Savoir utilisé la structure d'espace vectoriel de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaires (base de l'espace des solutions, variations des constantes et notament reliés cela à la théorie de la réduction des endomorphismes.

✓ Comprendre le cas des équations du type $\ddot{y} + qy = 0$ où p, q sont des fonctions continues.

✓ Savoir démontrer le résultat d'unicité au problème de Cauchy pour une équation équation différentielle linéaire.

✓ Savoir dessiner l'allure des orbites d'un champ de vecteur linéaires dans le plan.

✓ Savoir appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

✓ Preuve du lemme de Gronwall.

✓ Savoir utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz pour partitionner le plan suivant lorsque l'on dispose de solutions évidentes.

✓ Savoir utiliser le théorème d'explosion en temps fini des solutions maximales pour démontrer que ces solutions maximales sont définiées sur $\mathbb{R}$.

✓ Savoir trouver des intégrales premières de champs de vecteurs à divergence nulle sur un rectangle plan.

- ✓ En étant guidé, savoir étudier certaines équations différentielles ”classiques” : pendule non linéaire, Lotka-Volterra.

Compétences **non** exigibles

- ✓ Démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz
- ✓ Démonstration du critère pour avoir une orbite périodique.
- ✓ Pour les équations différentielles linéaires, on n’entre pas dans des outils sophistiqués liés à la réduction des endormorphismes. ce n’est pas un cours sur la réduction des endomorphismes. L’étudiant doit juste être capable, en étant un minimum guidé, de trouver une base de l’espace des solutions.

X5M0020 - Topologie et calcul différentiel (32h CM, 48h TD)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :

X3M0020 ≪Analyse 2≫ :

- *Séries numériques.*
- *Intégrale de Riemann.*
- *Topologie et calcul différentiel dans* $\mathbb{R}^2$ *et* $\mathbb{R}^3$*.*

X4M0010 ≪Analyse 3≫ :

- *Intégrales généralisées.*
- *Suites et séries de fonctions.*
- *Intégrales à paramètres.*

Le but de ce cours est de donner les notions de base de la topologie et du calcul différentiel sur $\mathbb{R}^n$. Il est le prolongement naturel du module X3M0020 Analyse 2. On commencera ce cours par l'étude des courbes paramétrées qui serviront de support à l'étude des portraits de phase dans le module X5M0010 Equations différentielles.

Courbes paramétrées.

- Courbes paramétrées dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
- Etude métrique des courbes paramétrées.

Compétences exigibles

- ✓ Savoir faire l'étude complète d'une courbe paramétrée plane (possiblement donnée en coordonnées polaires) et en donner l'allure.
- ✓ Savoir calculer la longueur de courbes planes et le repère de Frenet.
- ✓ Connaître les notions de développées et développantes d'une courbe plane.
- ✓ Savoir calculer le repère de Serret-Frenet d'une courbe gauche ainsi que les invariants classiques longueur, courbure et torsion.

Compétences **non** exigibles

- ✓ Surfaces paramétrées.

Topologie.

- Normes sur $\mathbb{R}^n$ et distances associées.
- Notions de topologie sur $\mathbb{R}^n$: parties ouvertes, fermées, compactes, connexes de $\mathbb{R}^n$.
- Limites et continuité des fonctions de $\mathbb{R}^n$. Théorème du maximum atteint. Théorème des valeurs intermédiaires.

Compétences exigibles

- ✓ Savoir montrer qu'une application est une norme.
- ✓ Savoir montrer qu'un ensemble simple de $\mathbb{R}^n$ est, selon les cas, ouvert, fermé, compact, connexe.
- ✓ Savoir montrer qu'une fonction sur $\mathbb{R}^n$ est continue.

Compétences **non** exigibles

- ✓ La topologie générale.
- ✓ Les espaces métriques autres que $\mathbb{R}^n$.
- ✓ Les espaces vectoriels normés de dimension infinie.

Calcul différentiel.

- Différentiation des fonctions de plusieurs variables : notions de dérivées partielles et de différentielle pour les fonctions de $\mathbb{R}^n$, différentielle d'une composée de fonctions, matrice Jacobienne, fonctions de classe C^1, théorème des accroissements finis.
- Théorème des fonctions implicites (admis). Applications aux courbes et surfaces régulières.
- Fonctions de classe C^k, théorème de Schwarz. Formule de Taylor-Young, extrema locaux.
- Extrema liés et multiplicateurs de Lagrange.
- Théorème d'inversion locale (admis) et notion de difféomorphisme. Applications aux changements de variables dans les intégrales et à la résolution d'EDP.

Compétences exigibles

✓ Savoir montrer qu'une fonction de $\mathbb{R}^n$ est différentiable. Savoir calculer des différentielles de fonctions composées.

✓ Savoir appliquer le théorème des fonctions implicites.

✓ Savoir déterminer les points critiques d'une fonction et d'en préciser la nature.

✓ Savoir justifier l'existence d'extremum liés et de les déterminer en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

✓ Savoir montrer qu'une application entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme et être capable de l'appliquer à la résolution de quelques EDP simples sur $\mathbb{R}^n$ ainsi qu'aux changements de variables dans les intégrales multiples.

Compétences **non** exigibles

✓ La différentiabilité dans les espaces de Banach.

✓ La notion de sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

X5M0030 - Analyse Numérique 1 (16h CM, 16h TD, 12h TP)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :

X4M030 «Introduction à l'analyse numérique» :

- *Interpolation.*
- *Quandrature.*
- *Décomposition LU et de Choleski.*

Ce cours est commun aux parcours Maths et Maths-Ingé, son but est de compléter l'introduction à l'analyse numérique vue en L2.
Les TP sont à la fois l'occasion de programmer les algorithmes et méthodes vus en cours, mais également de compléter les TD en permettant de constater des phénomènes difficiles à appréhender en TD.
Le nombre d'heures de TD étant faible, le cours devra être illustré d'exemples.

Notions abordées

- Méthodes élémentaires de résolution d'EDO.
- Quadrature avancée.
- Méthodes itératives de type relaxation pour la résolution de systèmes linéaires.
- Calcul d'éléments propres.

Compétences exigibles

- ✓ Maîtriser les méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et relaxation : définition, critères de convergence et implémentation.
- ✓ Connaître les schémas numériques de base pour des EDO scalaires du premier ordre : Euler, Runge, RK.
- ✓ Savoir prouver la consistance et la stabilité de schémas simples à un pas explicites.
- ✓ Connaître la définition d'un schéma à un pas implicite.
- ✓ Comprendre le principe des méthodes de quadrature de Gauss-Legendre : construction, ordre, formules composées.
- ✓ Connaître les extensions de la méthode de Gauss avec différents poids (Tchebychev, Laguerre).
- ✓ Savoir utiliser la méthode de la puissance et ses variantes (décalage, puissance inverse) pour calculer des valeurs propres.

Compétences **non** exigibles

- ✓

X5M0040 - Probabilités (16h CM, 28h TD)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :
- X4M0010 : Analyse 3.
- X4M0030 : Probabilités discrètes.
- X5M00 ? ? Topologie et Calcul différentiel (pour le changement de variables dans les intégrales multiples).

Le but de ce cours est d'introduire la théorie des probabilités sans utiliser de théorie de la mesure. En particulier les variables aléatoires absolument continues ne sont pas définies rigoureusement, seul le calcul d'espérance de certaines fonctions (et le calcul de certaines probabilités) est fait de façon rigoureuse.

Programme

1. Probabilités discrètes
   (a) Fonctions Génératrices :caractérisation de la loi, calcul pour les lois classiques, calcul des moments, convergence en loi.
   (b) Indépendance : caractérisation avec les fonctions génératrices, convolution (lois de sommes de vas indépendantes), relations de convolution classiques.
   (c) Schéma de Bernoulli
   (d) Identité de Wald : application au processus de Galton Watson.
2. Variables aléatoires admettant une densité
   (a) Approche heuristique via les sommes de Riemann. Aiguille de Buffon.
   (b) Lois classiques.
   (c) Définition de $\mathbb{E}[\phi(X)]$ pour une va X admettant une densité.
   (d) Moments et inégalités : Markov, Tchebyshev, Hölder, lien avec la fonction caractéristique.
   (e) Couple de variables aléatoires admettant une densité : lois marginales, covariance et corrélation, définition de l'indépendance, caractérisation avec les fonctions caractéristiques.
3. Thèorèmes Limites
   (a) Modes de convergence
   (b) Lemme de Borel Cantelli
   (c) Loi forte des grands nombres
   (d) Convergence en loi vers une loi à densité, caractérisation de Paul Lévy.
   (e) Théorème central limite et formule de de Moivre Laplace.

Compétences exigibles
- Critères classiques de convergence des séries numériques.
- Critères classiques de convergence des intégrales généralisées.
- Pour certains calculs et certaines démonstrations, on énoncera (sans donner de preuve) et on utilisera les théorèmes de convergence dominée et de continuité/dérivation sous le signe somme pour les intégrales de Riemann.

Compétences **non** exigibles
- Théorie de la mesure
- Théorie de l'intégration
- Indépendance entre une variable aléatoire discrète et une variable aléatoire admettant une densité. Lois de probabilités "mixtes", mesures de Stieltjes.

X5M0060 - Analyse Numérique 2 (8h CM, 0h TD, 8h TP)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :

X4M030 ≪Introduction à l'analyse numérique≫ :

Ce cours est particulier au parcous Maths-Ingé, son but est de donner aux étudiants les bases d'outils de programmation nécessaires à la suite de leur parcours.

Notions abordées

- Bases de shell et Emacs.
- Bases de Fortran90 : types de base, structures de contrôle, entrées/sorties, compilation séparée.
- Utilisation de make et Gnuplot.

Compétences exigibles

✓ Ecrire et compiler un programme (éventuellement avec des modules).

Compétences **non** exigibles

✓ Utilisation d'Emacs.

✓ Utilisation de make et Gnuplot.

X5M0070 - Algèbre linéaire et bilinéaire (20h CM, 28h TD)

Cette unité nécessite comme prérequis les modules

S12M020/X2M0020 ≪Espaces vectoriels et applications linéaires≫,

S21M010/X3M0010 ≪Réduction des endomorphismes≫,

S22M040/X4M0040 ≪Géométrie affine et euclidienne≫,

le module

S12M030/X2M0030 ≪Formalisme et arithmétique≫

étant fortement conseillé.

Le but de ce cours est de consolider et d'approfondir les connaissances en algèbre linéaire et bilinéaire.
Les notions abordées dans cette unité peuvent être l'occasion d'introduire la notion de groupe (sans en faire l'axiomatique). D'abord par les groupes GL, SL, O, SO : par exemple, l'ensemble des tranformations linéaires d'un e.v.e. qui préservent la norme est stable par composition et par prise d'inverse, etc. Ensuite, ensemble des isométries préservant par exemple un carré, un cube, ..., le groupe des similitudes. La conjugaison en géométrie (conservation de la nature d'une transformation) peut être une introduction à la notion de sous-groupe distingué ; le fait que toute isométrie est le produit de réflexions, une introduction à la notion de partie génératrice. Les exemples ne manquent pas !

Réduction

Les étudiants ont déjà rencontré les notions suivantes : valeurs et vecteurs propres, sous-espaces propres, polynôme caractéristique. Ils sont supposés savoir calculer le polynôme caractéristique χ_f d'un endomorphisme f afin d'en connaître les valeurs propres. Ils ont vu que si χ_f est scindé à racines simples, alors f est diagonalisable, et que si χ_f est scindé, alors f est trigonalisable. Ils savent déterminer une base de vecteurs propres s'il en existe une et trigonaliser une matrice sur des exemples simples.

Le but ici est de compléter de façon plus théorique ces connaissances.

- Polynômes d'endomorphismes ; lemme des noyaux.
- Sous-espaces stables.
- Théorème de Cayley-Hamilton (avec démonstration).
- Sous-espaces caractéristiques ; leur dimension est égale à la multiplicité de la valeur propre dans le polynôme caractéristique. Lien avec la diagonalisation et la trigonalisation.
- Endomorphisme nilpotent ; décomposition $D + N$.
- Polynôme minimal μ_f d'un endomorphisme f : c'est le polynôme annulateur unitaire de degré minimal (existence et unicité à démontrer) ; si $P(f) = 0$, alors μ_f divise P.
- Théorème : un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal est scindé à racines simples ; si, et seulement si, il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Compétences exigibles (en plus de ce qui a été acquis en deuxième année)

- ✓ Savoir déterminer un polynôme annulateur et mettre en œuvre le critère de diagonalisation faisant intervenir un tel polynôme.
- ✓ Exemples de calcul de polynôme minimal.
- ✓ Exemples de décomposition $D + N$.

Compétences **non** exigibles : réduction de Jordan.

Espaces vectoriels euclidiens

La notion d'espace vectoriel euclidien a été abordée en deuxième année, mais en principe uniquement en dimensions 2 et 3. L'objectif est ici d'aborder de façon plus théorique le cadre des espaces vectoriels euclidiens.

- Formes bilinéaires, formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques ; polarisation.
- Représentation matricielle, changement de base.
- Orthogonalité ; dualité ; noyau d'une forme quadratique, forme quadratique non dégénérée.
- Base orthogonale, orthonormée.
- Décomposition d'une forme quadratique en carrés, méthode de Gauss. Signature d'une forme quadratique.
- Forme quadratique définie, définie positive ; produit scalaire, espace vectoriel euclidien.
- Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski.
- Adjoint d'un endomorphisme ; matrice de l'adjoint.
- Pour un endomorphisme f d'un espace vectoriel euclidien, les propriétés suivantes sont équivalentes : f préserve le produit scalaire ; f préserve la norme ; f est inversible d'inverse son adjoint ; l'image par f d'une base orthonormée est une base orthonormée (endomorphisme orthogonal). Caractérisation matricielle.
- Ensembles $\mathrm{O}(n)$ et SO(n).
- Orientation ; produit vectoriel.
- Retour sur les isométries vectorielles en dimension deux. Classification des isométries vectorielles : E est somme directe des sous-espaces propres et de plans stables. Cas de la dimension 3.
- Tout endomorphisme orthogonal (resp. orthogonal direct) se décompose en un produit de $n-p$ réflexions (resp. retournements) si p est la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1.
- Endomorphisme symétrique ; tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée ; existence d'une base orthonormée pour le produit scalaire et orthogonale pour une forme quadratique.
- Similitudes ; un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien est une similitude si, et seulement si, il préserve l'orthogonalité ; si, et seulement si, il préserve les angles.

Compétences exigibles

✓ Les notions de formes bilinéaires et quadratiques devront être familières.
✓ Utilisation de la formule de polarisation.
✓ Calcul du noyau et des vecteurs isotropes. Déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel.
✓ Calcul de la signature d'une forme quadratique.
✓ Mise en œuvre du procédé de Gram-Schmidt.
✓ Connaître des exemples d'endomorphismes orthogonaux, symétriques.
✓ Savoir reconnaître un endomorphisme/une matrice orthogonal(e).
✓ En dimensions 2 et 3, identifier la nature et les éléments géométriques d'un endomorphisme orthogonal ; savoir le décomposer en produit de réflexions (ou de retournements s'il est direct).
✓ Identifier la composée de deux isométries/similitudes données.

Compétences **non** exigibles : la théorie des groupes.

Coniques euclidiennes

✓ Coniques comme lieux donnés par un polynôme du second degré à deux variables.
✓ Intersection d'une conique avec une droite ; tangente à une conique.
✓ Classification affine des coniques.
✓ Présentation des coniques par foyer et directrice.
✓ Classification des coniques dans le plan euclidien.
✓ Équation d'une conique en coordonnées polaires centrées en un foyer.
✓ Présentation bifocale des coniques.

Compétences exigibles : tout est dit dans le programme.

X5M0080 - Intégration et probabilités (24h CM, 44h TD)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :

X1M0010 ≪Mathématiques 1≫
X2M0050 ≪Analyse réelle≫
X3M0030 ≪Analyse et probabilités≫
X3M0040 ≪Approximation de fonctions≫
X4M0060 ≪Statistiques et probabilités≫

- Intégrale de Lebesgue sur R puis sur Rn, théorèmes de convergence.
- Introduction la théorie de la mesure (tribus, applications mesurables, mesure image) :
- Variables et vecteurs aléatoires réels, densités de probabilités : dictionnaire analyse-probabilités. Espérance : cadre de l'intégration abstraite. Application aux cas dénombrables, densité.
- Convergence (presque sûre, en probabilité, en loi), Lemmes de Borel Cantelli, suites de variables indépendantes, lois des grands nombres, théorème de la limite centrale.
- Transformée de Fourier.

Compétences exigibles

✓

Compétences **non** exigibles

✓

X5M0090 - Systèmes dynamiques (16h CM, 28h TD)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :

X1M0010 ≪Mathématiques 1≫

X2M0020 ≪Espaces vectoriels et applications linéaires≫

X2M0050 ≪Analyse réelle≫

X3M0040 ≪Approximation de fonctions≫

X4M0050 ≪Optimisation≫

Le but de ce module est de présenter des méthodes de résolution d'équations et systèmes différentiels 2x2. Pour les équations du premier ordre, il s'agit d'abord présenter quelques exemples. Le théorème de Cauchy Lipschitz est admis, par contre son utilisation (notion de fonction Lipschitzienne) doit tre maitrisée. Pour les systèmes 2x2 linéaires, une étude systématique est proposée, avec les réductions dans tout les cas (cas diagonalisable ou pas) et les étudiants doivent reconnaitre quel est le comportement en particulier en temps grand (notions de stabilité, de stabilité asymptotique). De mme pour les équations linéaires scalaires d'ordre 2, avec applications quelques équations issues de l'économie ou de la physique. Ensuite deux cas non linéaires particulier pour les systèmes 2x2 sont abordés : le cas de champs de gradient (avec la notion de fonction de Lyapunov) et le cas hamiltonien. Dans les deux cas les étudiants guidés doivent reconnaitre le type de système. Un bref aperu des systèmes discrets est proposé la fin du module.

- Equations différentielles du première ordre exemples de résolution
- Théorème de Cauchy-Lipschitz (admis), Lemme de Gronwall.
- Systèmes différentiels linéaires : définition, réduction des systèmes autonomes plans
- Linéarisation, stabilité, systèmes hamiltoniens
- Indications sur les systèmes dynamiques discrets : point fixe, cycles, équation logistique.

Compétences exigibles

✓

Compétences **non** exigibles

✓

X6M0010 - Calcul intégral et analyse de Fourier (28h CM, 44h TD)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :

X3M0020 ≪Analyse 2≫:
- *Intégrale de Riemann.*
- *Méthodes de calcul des intégrales de Riemann.*

X4M0010 ≪Analyse 3≫:
- *Intégrales généralisées.*
- *Suites et séries de fonctions.*
- *Convergence simple, uniforme et normale.*

X5M0020 ≪Topologie et calcul différentiel≫:
- *Normes, espaces vectoriels normés.*
- *Espaces complets.*

Le but de ce cours est d'exposer les principaux résultats et les techniques de calculs relatifs aux intégrales sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$. La construction de l'intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives, ainsi que le théorème de convergence monotone seront admis en préambule. Les questions fines de mesurabilité ne feront ni l'objet d'évaluation ni d'exercices de TD (on pourra se limiter par exemple au cas des fonctions continues par morceaux). La seconde partie du cours est consacrée à l'analyse de Fourier : transformée et série de Fourier.

Intégration

- Insuffisance de l'intégrale de Riemann.
- Intégrales des fonctions mesurables positives. Théorème de convergence monotone (admis).
- Mesure d'un ensemble, ensemble négligeable.
- Fonctions intégrables. Espace $\mathcal{L}^1$. Théorème de convergence dominée. Interversion série/intégrale.
- Liens entre intégrale de Riemann, intégrale généralisée et intégrale de Lebesgue.
- Fonctions définies par une intégrale : théorèmes de continuité et dérivabilité.
- Intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Théorèmes de Fubini et du changement de variables (admis).
- Espaces L^1 et L^2 : complétude.
- Produit de convolution $L^1 \times L^1$, $L^1 \times L^2$.

Compétences exigibles

✓ Savoir montrer qu'une fonction est intégrable au sens de Lebesgue.
✓ Savoir utiliser sur des exemples simples les grands théorèmes de convergence : convergence monotone et convergence dominée.
✓ Savoir utiliser les théorèmes de continuité et de dérivabilité pour les intégrales dépendant d'un paramètre.
✓ Savoir utiliser le théorème de changement de variables et le théorème de Fubini en le justifiant.
✓ Connaître quelques exemples d'ensembles négligeables.

Compétences **non** exigibles

✓ Exercices fins sur les fonctions mesurables.
✓ Théorie de la mesure abstraite.

Analyse de Fourier.

- Transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$
- Lien entre la transformée de Fourier et la convolution.

- Lemme de Riemann-Lebesgue (on admet que les fonctions continues à support compact sont denses dans L^1).
- Formule d'inversion dans L^1.
- Prolongement à L^2. Théorème de Plancherel.
- Applications à des problèmes physiques : cordes vibrantes, etc.
- Définition de la série de Fourier d'une fonction intégrable périodique.
- Convergence au sens L^2. Théorème de Parseval.
- Convergence pour les fonctions continues ou C^1 par morceaux périodiques (théorème de Jordan-Dirichlet, théorème de Féjer).
- Applications à des problèmes physiques, isopérimètre, etc.

Compétences exigibles

✓ Savoir calculer les transformées de Fourier de fonctions intégrables simples.
✓ Connaître la formule d'inversion pour la transformée de Fourier.
✓ Savoir calculer la série de Fourier d'une fonction périodique.
✓ Savoir étudier la convergence d'une série de Fourier en la justifiant.

Compétences **non** exigibles

✓ Transformée de Fourier sur l'espace de Schwartz.

X6M0020 - Fonctions analytiques (16h CM, 24h TD)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :

X3M0020 «Analyse 2»:
- *Séries numériques.*

X4M0010 «Analyse 3»:
- *Suites et séries de fonctions.*
- *Séries entières*

Le but de ce cours est d'exposer les principaux résultats de la théorie des fonctions d'une variable complexe. On fera ressortir le lien entre fonctions analytiques et fonctions holomorphes (l'équivalence sera admise). La dernière partie du cours sera consacrée à la théorie de Cauchy et aux calculs d'intégrales par la méthode des résidus.

Analyticité et holomorphie

- Rappels sur les séries entières d'une variable complexe : rayon de convergence, formules de d'Alembert et de Cauchy. Séries entières usuelles.
- Exponentielle complexe, fonctions circulaires complexes, nombre π.
- Fonctions analytiques.
- Analyticité d'une série entière sur son disque de convergence.
- Fonctions holomorphes. Conditions de Cauchy-Riemann. Exemples.
- Analyticité des fonctions holomorphes (admis).
- Théorème des zéros isolés. Prolongement analytique.

Compétences exigibles

✓ Savoir calculer le rayon de convergence d'une série entière.
✓ Connaître les séries entières usuelles.
✓ Savoir montrer qu'une fonction est holomorphe.

Théorie de Cauchy.

- Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin de classe C^1 par morceaux.
- Formules de Cauchy. Théorèmes de Liouville et de d'Alembert.
- Théorème de Morera. Limite uniforme sur tout compact de fonctions holomorphes.
- Primitive d'une fonction holomorphe. Détermination du logarithme sur un ouvert étoilé.
- Fonctions méromorphes et théorème des résidus.
- Applications aux calculs d'intégrales

Compétences exigibles

✓ Savoir intégrer le long d'un chemin une fonction continue.
✓ Savoir utiliser le théorème des résidus pour le calcul d'une intégrale usuelle.

Compétences **non** exigibles

✓ Les surfaces de Riemann.
✓ Les fonctions harmoniques.
✓ Les produits infinis.

X6M0030 - Algèbre et géométrie (36h CM, 60h TD)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :

S12M020/X2M0020 ≪Espaces vectoriels et applications linéaires≫,

S21M010/X2M0010 ≪Réduction des endomorphismes≫,

S22M040/X4M0040 ≪Géométrie affine et euclidienne≫,

S31M160/X5M0070 ≪Algèbre linéaire et bilinéaire≫.

Le but de ce cours est d'introduire la théorie des groupes et de prolonger la partie géométrique du cours du premier semestre (S31M160/X5M0160) par la géométrie affine (euclidienne). Ce cours est également l'occasion de traiter certains résultats de géométrie euclidienne du point de vue de la théorie des groupes : chaque notion abordée dans ce cadre-ci sera illustrée par des exemples géométriques.

Algèbre

- Groupes, sous-groupes.
- Morphisme de groupes. Noyau, image.
- Sous-groupe engendré par une partie. Ordre d'un élément.
- Rappels sur les relations d'équivalence et la factorisation des applications.
- Classes modulo un sous-groupe. Théorème de Lagrange.
- Sous-groupes distingués, groupes quotients. Factorisation des morphismes, premier théorème d'isomorphisme.
- Groupes cycliques, sous-groupes des groupes cycliques. Lemme chinois.
- Groupe des permutations d'un ensemble fini : décomposition en cycles à supports disjoints, générateurs, classe de conjugaison. Signature d'une permutation, groupe alterné. Application à la construction du déterminant.
- Opération d'un groupe sur un ensemble. Stabilisateur, orbites. Équation aux classes.

Compétences exigibles

✓ Savoir dire si une loi de composition interne sur un ensemble le munit d'une structure de groupe ou non.

✓ Reconnaître un morphisme de groupes et avoir calculé des exemples de noyaux.

✓ Connaître les groupes classiques : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, S^1, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$. Avoir vu les groupes ≪spéciaux≫ comme noyau du déterminant, par exemple.

✓ Exemples de calcul de sous-groupes engendrés par une partie donnée.

✓ Savoir calculer l'ordre d'un élément.

✓ Savoir utiliser le théorème de Lagrange pour déterminer, sur des exemples, l'ensemble des sous-groupes d'un groupe donné.

✓ Reconnaître un sous-groupe distingué ; utiliser le premier théorème d'isomorphisme pour identifier deux groupes.

✓ Savoir donner la liste exhaustive des sous-groupes d'un groupe cyclique sous quelque forme qu'il se présente.

✓ Connaître, à isomorphisme près, tous les groupes d'ordre inférieur ou égal à 7.

✓ Calculs dans le groupe symétrique : composition de permutations, décomposition en produits de cycles à supports disjoints, calcul de l'ordre et de la signature, classe de conjugaison.

✓ Savoir écrire l'équation aux classes pour une action donnée..

Compétences **non** exigibles

✓ Produit semi-direct.

✓ Théorème de Sylow.

✓ Classification des groupes abéliens finis.

Géométrie affine

- Espaces affines, sous-espaces affines.
- Barycentres, repère affine.
- Applications affines, groupe affine. Sous-espace affine des points fixes.
- Groupe des translations, des homothéties-translations ; projections, symétries, affinités.
- Les théorèmes «classiques» : Thalès, Pappus ...

Compétences exigibles

✓ Bien maîtriser les notions affines de base.

✓ Connaître les transformations affines usuelles (translations, homothéties, projections, symétries, affinités).

✓ Une application affine qui n'admet pas 1 comme valeur propre admet un unique point fixe.

Les étudiants devront également s'être familiarisés avec l'utilisation des transformations affines pour résoudre des problèmes géométriques.

Géométrie affine euclidienne

- Distances, distance d'un point à un sous-espace affine.
- Sous-espaces affines orthogonaux.
- Isométrie affine ; décomposition en un produit commutatif d'une translation et d'une isométrie ayant au moins un point fixe.
- Les réflexions engendrent le groupe des isométries affines.
- Classification des isométries affines en dimensions 2 et 3.
- Similitudes affines.
- Exemples de groupe des isométries laissant globalement invariante une figure du plan ou de l'espace. Groupe diédral.

Compétences exigibles

✓ Connaître la classification des isométries du plan et de l'espace affine euclidien ; identifier la nature et les éléments géométriques d'une isométrie donnée.

✓ Déterminer les éléments et la structure d'un groupe d'isométries laissant globalement invariante une figure du plan ou de l'espace (sur des exemples calculables !).

X6M0050 - Analyse Numérique 3 (16h CM, 20h TD, 20h TP)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :

X4M030 «Introduction à l'analyse numérique» :

- *Résolution d'équations scalaires non linéaires.*
- *Décomposition LU et de Choleski.*

X5M060 «Analyse numérique 1» :

- *Méthodes itératives de type relaxation.*
- *Résolution d'EDO.*

X5M150 «Analyse numérique 2» :

- *Bases du Fortran90.*

X5M010 «Equations différentielles»

X5M020 «Topologie-Calcul différentiel»

Ce cours est particulier au parcours Maths-Ingé, son but est de compléter le cours analyse numérique 1 vu au premier semestre.
Les TP sont à la fois l'occasion de programmer les algorithmes et méthodes vus en cours, mais également de compléter les TD en permettant de constater des phénomènes difficiles à appréhender en TD. Le langage de programmation pour les TP est le Fortan90 (vu dans le cous d'analyse numérique 2 au premier semestre).
Le nombre d'heures de TD étant faible, le cours devra être illustré d'exemples.

Notions abordées

- Méthodes avancées de résolution d'EDO.
- Introduction à la méthode des différences finies.
- Résolution de $F(X) = 0$ dans $\mathbb{R}^n$.
- Méthodes de gradients pour la résolution de systèmes linéaires.

Compétences exigibles

- ✓ Maîtriser les notions de consistance, stabilité et convergence pour des méthodes à un pas de résolution d'EDO.
- ✓ Connaître les méthodes de Runge-Kutta.
- ✓ Avoir la notion d'EDO raides.
- ✓ Maîtriser les notions de consistance, stabilité et convergences pour la méthodes des différences finies appliquées à des équations linéaires. Applications à l'équation de Poisson et l'équation de transport.
- ✓ Résoudre un système non-linéaire dans $\mathbb{R}^n$. Connaître la méthode de Newton-Raphson.
- ✓ Avoir compris les méthodes de descente ou de projection. Maîtriser la méthode du gradient conjugué.

Compétences **non** exigibles

- ✓ Méthodes multipas.

X6M0100 - Optimisation sous contrainte (20h CM, 36h TD)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :

X1M0010 ≪Mathématiques 1≫
X2M0020 ≪Espaces vectoriels et applications linéaires≫
X2M0050 ≪Analyse réelle≫
X3M0040 ≪Approximation de fonctions≫
X4M0050 ≪Optimisation≫

- Optimisation différentiable, avec contraintes d'égalités ou d'inégalités. Conditions du premier et second ordre, condition de Kuhn-Tucker, théorème de l'enveloppe.
- Optimisation convexe, condition de Kuhn-Tucker, fonction quasi-convexe.
- Dualité et point selle.
- Optimum de Pareto.
- Algorithmes d'optimisation avec et sans contraintes, programmes linéaire et quadratique, recuit simulé.

Compétences exigibles

✓

Compétences **non** exigibles

✓

X6M0110 - Inférence statistique (20h CM, 32h TD)

Cette unité nécessite en prérequis les modules :

X1M0010 ≪Mathématiques 1≫
X2M0050 ≪Analyse réelle≫
X3M0030 ≪Analyse et probabilités≫
X3M0040 ≪Approximation de fonctions≫
X4M0060 ≪Statistiques et probabilités≫
X5M0080 ≪Intégration et probabilités≫

- Simulation de variables aléatoires. Applications.
- Estimation de paramètres. Intervalles de confiance.
- Notions sur les tests. Tests sur les échantillons gaussiens.
- Tests du khi-deux.
- Modèle linéaire : Analyse de la variance, régression.
- Introduction à la statistique numérique.

Compétences exigibles

✓

Compétences **non** exigibles

✓