

## Introduction

Ce cours est difficile ; en général les étudiants éprouvent beaucoup de difficultés pour comprendre et faire les calculs ; ceci provient essentiellement d'un manque de pratique dans la manipulation des outils : dérivées partielles, changement de variables, résolutions d'équations différentielles. Il faut chercher, faire, re-chercher re-faire les exercices de TD, les anciens partiels et examens, et aussi les calculs et les preuves du cours pour pouvoir être à l'aise.

Le plan du cours est le suivant :

### Table des matières

Introduction .....	1
Le changement de variables ou changements de coordonnées .....	3
2.1. Le théorème d'inversion locale .....	3
2.1.1. L'énoncé .....	3
2.1.2. Un critère global .....	3
2.1.3. A quoi ça sert ? .....	4
2.2. Le théorème des fonctions implicites .....	6
2.2.1. L'énoncé .....	6
2.2.2. Application : suivre une racine simple de polynôme .....	6
2.3. Applications à l'étude des courbes planes .....	7
2.3.1. Redressement d'une courbe .....	7
2.3.2. Courbe définie implicitement .....	7
2.3.3. Résumé : sous variété de dimension 1 du plan : .....	7
2.3.4. Droite tangente .....	8
2.4. Applications : surfaces de l'espace .....	8
2.4.1. Définition .....	8
2.4.2. Plan tangent .....	10
2.4.3. Coordonnées locales sur une surface .....	10
2.4.4. Des exemples de surfaces .....	10
2.5. Le changement de variables en intégration .....	12
2.5.1. Le théorème .....	12
2.5.2. La preuve .....	12
2.5.3. L'aire des surfaces et intégration sur les surfaces .....	14

2.5.4. Des exemples : .....	15
td1 .....	17
Équations différentielles .....	27
3.1. Rappel sur le cours de licence. ....	27
3.1.1. Le théorème de Cauchy-Lipschitz .....	27
3.1.2. Solutions maximales .....	27
3.1.3. Dépendance par rapport aux conditions initiales. ....	27
3.1.4. Explosion en temps fini .....	28
3.2. Différentiabilité par rapport aux conditions initiales .....	30
3.2.1. Champs de vecteurs et flot .....	30
3.2.2. Différentiabilité par rapport aux conditions initiales .....	31
3.2.3. Différentiabilité d'ordre supérieur .....	32
3.2.4. Dépendance par rapport à un paramètre ..	32
3.2.5. Un exemple : une formule pour la différentielle de l'exponentielle de matrice .....	33
3.3. Quelques outils pour étudier les équations différentielles. ....	34
3.3.1. Orbites particulières .....	34
3.3.2. Intégrale première .....	34
3.3.3. Intégrale première et orbite périodique ..	35
3.3.4. Le pendule .....	36
3.3.5. Equation différentielle à variables séparables .....	37
3.3.6. Appendice à cette partie : formes différentielles .....	38
3.4. Symétries et champs de vecteurs .....	40
3.4.1. Comment transporter un champ de vecteurs par un changement de coordonnées. ....	40
3.4.2. Symétrie, crochet de Lie. ....	41
3.4.3. Exemples : les champs de vecteurs invariants par rotation sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . ....	42
3.4.4. Equation aux dérivées partielles du premier ordre et redressement du flot. ....	43
3.5. Champs de vecteurs sur les surfaces .....	44
3.5.1. Flot d'un champ de vecteurs sur une surface .....	45
td2 .....	46
Extrema et Calcul des variations .....	51

4.1. Extrema liés	51	6.3.5. Courbures	84
4.1.1. Deux exemples.	52	6.3.6. Allure de la surface par rapport à son plan tangent	84
4.2. Problème variationnel	53	6.3.7. Calcul des courbures d'une surface de révolution	86
4.2.1. Motivation : le chemin le plus court pour joindre deux points d'une surface.	53	6.3.8. Directions particulières	86
4.2.2. Equation d'Euler-Lagrange	54	6.3.9. Appendice : Surfaces totalement ombilicales	87
4.2.3. Avec une contrainte	56	6.4. Courbes sur une surface	88
4.2.4. Retour aux surfaces : géodésiques	58	6.4.1. Repère de Darboux	88
4.2.5. Géodésiques sur les surfaces de révolutions	59	6.4.2. Courbes particulières	89
td3	61	6.5. Les surfaces réglées	89
Les courbes	64	6.5.1. Définitions	89
5.1. Généralités	64	6.5.2. Surfaces développables	91
5.1.1. Les arcs géométriques	64	6.6. Les surfaces minimales	92
5.1.2. Longueur	64	6.6.1. Le problème	92
5.2. Paramétrisation par longueur d'arc	65	6.7. Exemple	93
5.3. Les courbes planes	66	6.8. Appendice : le Théorème Egregium de Gauss	95
5.3.1. La courbure	66	6.8.1. Géométrie intrinsèque versus géométrie extrinsèque.	95
5.3.2. Enveloppe de Droites	69	6.8.2. Le théorème Egregium	96
5.4. Les courbes gauches	72	td5	99
5.4.1. Courbure et Torsion	72		
5.4.2. Théorème fondamental	73		
td4	75		
Les surfaces	79		
6.1. Rappel sur les formes quadratiques et bilinéaires	79		
6.1.1. Définition	79		
6.1.2. Matrices et changement de base	79		
6.1.3. Formes quadratiques sur un espace euclidien	80		
6.2. La première forme fondamentale	80		
6.2.1. Définition	80		
6.2.2. Expression dans les cartes	81		
6.2.3. A quoi ça sert ?	81		
6.2.4. Quelques expressions	81		
6.3. La seconde forme fondamentale	81		
6.3.1. Définition	81		
6.3.2. Expression dans les cartes	82		
6.3.3. Quelques Calculs	83		
6.3.4. L'application de Weingarten ou "shape operator"	83		

Une bibliographie est la suivante :

- (1) Cartan, H. *Calcul différentiel* Hermann Paris 1967 Collection méthodes
- (2) Donato, Paul *Calcul différentiel pour la licence cours, exercices et problèmes résolus*. Dunod. Paris 2000 Sciences sup
- (3) M. Berger et B. Gostiaux : *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. Seconde édition ; Presses Universitaires de France, Paris, 1992.
- (4) Manfredo Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces* Prentice-Hall Inc. us Englewood Cliffs, NJ 1976.
- (5) Rouvière, François *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*. Cassini fr Paris 1999 Enseignement des Mathématique

(6) E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux : *Cours de mathématiques spéciales. 5. Applications de l'analyse à la géométrie.* Masson, Paris, 1981.

(7) M. Spivak, Michael : *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1965.

(8) M. Spivak, Michael : *A comprehensive introduction to differential geometry.* Vol. III. Publish or Perish, Inc., Boston, Mass., 1975.

(9) Dirk Struik, *Lectures on classical differential geometry* Addison-Wesley series in mathematics, 1961

(10) Leborgne, D. *Calcul différentiel et géométrie.* Presses Universitaires de France. Paris, 1982.

(11) Doss-Bachelet, Catherine Françoise, Jean-Pierre; Piquet, Claude *Géométrie différentielle avec 80 figures.* Ellipses, Paris 2000. Mathématiques pour le 2e cycle - cours et exercices corrigé

## Le changement de variables ou changements de coordonnées

Dans cette leçon,  $\| \cdot \|$  est une norme quelconque sur l'espace  $\mathbb{R}^n$ . Si  $U \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert et  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , on note  $C^r(U, \mathbb{R}^p)$  l'espace vectoriel des applications de  $r$  fois continûment différentiables sur  $U$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ . On note  $B(x, R)$  la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $R$ .

### 2.1. Le théorème d'inversion locale. —

2.1.1. *L'énoncé.* —

**Théorème 2.1.** — Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$  avec  $r \geq 1$ , si en  $x_0 \in U$ , la différentielle de  $f$ ,  $Df(x_0)$  est inversible alors il y a une boule  $B(x_0, \varepsilon) \subset U$  telle que

$$f : B(x_0, \varepsilon) \rightarrow f(B(x_0, \varepsilon))$$

soit un  $C^r$  difféomorphisme<sup>(1)</sup>. De plus la différentielle de la réciproque  $f^{-1}$  <sup>(2)</sup> est donnée par

$$D(f^{-1})(y) = \left( Df(f^{-1}(y)) \right)^{-1}$$

Je vous conseille de revoir la preuve dans votre cours de Licence. De ce théorème on en déduit un critère global :

2.1.2. *Un critère global.* —

**Proposition 2.2.** — Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in C^{r \geq 1}(U, \mathbb{R}^n)$ , on suppose que

$$\forall x \in U, Df(x) \in GL_n(\mathbb{R})$$

et que  $f$  est injective, alors  $f$  est un  $C^r$  difféomorphisme de  $U$  sur  $f(U)$ .

Une application de ce résultat est le suivant :

**Corollaire 2.3.** — Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application de classe  $C^{r \geq 1}$  injective, propre telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, Df(x) \in GL_n(\mathbb{R})$$

alors  $f$  est un  $C^r$  difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  sur lui même.

On donne la définition d'une application propre

**Définition 2.4.** — On dit qu'une application continue  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  est propre si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- i) Pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}^p$  alors  $f^{-1}(K)$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$ .
- ii)  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|f(x)\| = +\infty$

La première condition permet de définir la notion d'applications propres sur tout espace topologique (mais cela n'est intéressant que sur les espaces topologiques localement compacts).

<sup>(1)</sup>On rappelle qu'une application de classe  $C^{r \geq 1}$  est un  $C^r$  difféomorphisme si elle est bijective et si sa réciproque est aussi de classe  $C^r$ . Une application continue bijective dont la réciproque est continue est appelée homéomorphisme.

<sup>(2)</sup> C'est un léger abus de notation, car c'est la réciproque de la restriction de  $f$  à  $B(x_0, \varepsilon)$ .

Il est clair que ces deux définitions coïncident : ii) équivaut au fait que pour tout  $M > 0$  il y a  $R > 0$  telle que

$$\|x\| > R \Rightarrow \|f(x)\| > M.$$

Ou encore que

$$\|f(x)\| \leq M \Rightarrow \|x\| \leq R$$

i.e. ii) nous dit que l'image réciproque de tout ensemble borné de  $\mathbb{R}^p$  est borné.

Mais puisque  $f$  est continue, l'image réciproque d'un compact est toujours fermée (car l'image réciproque d'un fermé par une application continue est fermé) ; en particulier puisque les compacts de  $\mathbb{R}^n$  sont les fermés bornés, i) équivaut aussi au fait que l'image réciproque de tout ensemble borné de  $\mathbb{R}^n$  est borné.

Pour montrer le corollaire il suffit de montrer qu'une telle application  $f$  est surjective. Comme  $\mathbb{R}^n$  est connexe, il suffit de démontrer que sous ces hypothèses  $f(\mathbb{R}^n)$  est ouvert et fermé.

– Si  $y_0 = f(x_0) \in f(\mathbb{R}^n)$  alors grâce au théorèmes d'inversion locale 2.1, il y a  $\varepsilon > 0$  telle que l'ouvert  $f(B(x_0, \varepsilon))$  soit bien sur inclus dans  $f(\mathbb{R}^n)$ ,  $f(\mathbb{R}^n)$  contient donc un ouvert contenant  $y_0$ , et ceci pour tout  $y_0 \in f(\mathbb{R}^n)$  :  $f(\mathbb{R}^n)$  est bien ouvert.

– On montre maintenant que  $f(\mathbb{R}^n)$  est fermé : si  $(y_k = f(x_k))_k$  est une suite convergente de  $f(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_k y_k = y_\infty$$

alors l'ensemble constitué de cette suite et de sa limite est un compact de  $\mathbb{R}^n$  donc son image réciproque est un compact de  $\mathbb{R}^n$ , en particulier la suite  $(x_k)_k$  vit dans un compact : on peut extraire de cette suite une sous suite convergente  $(x_{n(k)})_k$

$$\lim_k x_{n(k)} = x_\infty$$

et par continuité de  $f$  on a forcément  $y_\infty = f(x_\infty)$ . Donc  $f(\mathbb{R}^n)$  est fermé.

2.1.3. *A quoi ça sert ?*— Cela sert à montrer qu'une application est localement bijective, ou à montrer que l'inverse d'une application est  $C^r$  ; par exemple : **la racine carrée des matrices symétriques définies positives** Soit  $\text{Sym}_n^+ = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^tA = A, A > 0\}$  l'ensemble des matrices carrées  $n \times n$  symétriques définies positives : c'est un ouvert de l'espace vectoriel  $\text{Sym}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^tA = A, \}$  des matrices symétriques. De plus si  $A \in \text{Sym}_n^+$  on sait qu'il existe une unique  $\sqrt{A} \in \text{Sym}_n^+$  tel que  $(\sqrt{A})^2 = A$ . Alors

$$\sqrt{\cdot} : \text{Sym}_n^+ \rightarrow \text{Sym}_n^+$$

est  $C^\infty$ .

La construction de la racine carrée d'une matrice symétrique définie positive ne donne pas ce résultat. On montre plutôt que son inverse

$$\begin{aligned} C : \text{Sym}_n^+ &\rightarrow \text{Sym}_n^+ \\ A &\mapsto A^2 \end{aligned}$$

est un  $C^\infty$ -difféomorphisme.

C'est évidemment une application  $C^\infty$  puisque les coefficients de la matrice de  $A^2$  sont des polynômes en les coefficients de  $A$ , elle est bijective (par définition de la racine carrée!). Le théorème d'inversion globale 2.2 nous dit que si  $DC(A)$  est inversible pour tout  $A \in \text{Sym}_n^+$  alors  $C$  sera un  $C^\infty$ -difféomorphisme. Mais  $DC(A) \in \text{End}(\text{Sym}_n)$  et pour  $H \in \text{Sym}_n$ , nous avons :

$$DC(A)(H) = AH + HA$$

Soit donc  $H \in \text{Sym}_n$  tel que  $AH + HA = 0$ . En multipliant cette identité par  $H$  à gauche on obtient  $H AH + H^2 A = 0$  puis en prenant la trace de cette identité on obtient :

$$\text{Tr } H AH + H^2 A = 2 \text{Tr } H AH = 0$$

(car  $\text{Tr } H^2 A = \text{Tr } H H A = \text{Tr } H AH$ ) mais on a aussi

$$H AH = {}^t(\sqrt{A} H)(\sqrt{A} H),$$

on a donc  $\text{Tr } {}^t(\sqrt{A} H)(\sqrt{A} H) = 0$ , mais un petit calcul montre que cette trace est exactement la somme des carrés des coefficients de la matrice

$\sqrt{A}H$ , la matrice  $\sqrt{A}H$  est donc nulle et puisque  $\sqrt{A}$  est inversible, on a aussi  $H = 0$ .

On a donc de vérifier que  $\ker DC(A) = \{0\}$  donc  $DC(A)$  est bien inversible pour tout  $A \in \text{Sym}_n^+$ .

Cela sert aussi à trouver des coordonnées plus adaptées (exemple plus loin des coordonnées polaires, cylindriques, sphériques). Il faut voir cela comme une version non linéaire du changement de base (qui correspond à un changement de coordonnées) en algèbre linéaire : celui ci vous permet d'exprimer une application linéaire de façon plus simple.

Exemple : **Le lemme de Morse en dimension 2**<sup>(3)</sup> :

**Théorème 2.5.** — Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $f \in C^r(U, \mathbb{R})$  avec  $r \geq 3$ , on suppose qu'en  $(x_0, y_0) \in U$   $Df(x_0, y_0) = 0$  et que  $D^2f(x_0, y_0)$  est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Grâce au lemme de Gauss, il y a une base  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  telle que

$$D^2f(x_0, y_0)(ue_1 + ve_2, ue_1 + ve_2) = \begin{cases} u^2 + v^2 & \text{si } D^2f(x_0, y_0) > 0 \\ -u^2 - v^2 & \text{si } D^2f(x_0, y_0) < 0 \\ u^2 - v^2 & \end{cases}$$

Alors il y a  $\varepsilon > 0$  et un  $C^{r-2}$  difféomorphisme sur son image  $C : B((x_0, y_0), \varepsilon) \mapsto \mathbb{R}^2$ ,

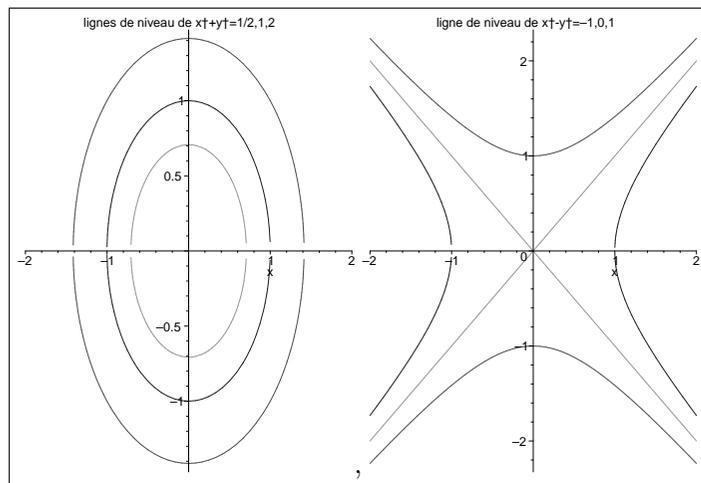
$$C(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

avec  $C(x_0, y_0) = (0, 0)$  et telle que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}D^2f(x_0, y_0)(u(x, y)e_1 + v(x, y)e_2, u(x, y)e_1 + v(x, y)e_2) \\ &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(\pm u^2(x, y) \pm v^2(x, y)) \end{aligned}$$

Avant de prouver ce théorème, voyons comment il peut être utiliser pour l'étude des lignes de niveau  $\{f = C^{\text{te}}\}$ . Dans le cas où  $D^2f(x_0, y_0)(ue_1 + ve_2, ue_1 + ve_2) = u^2 + v^2$ , on sait donc que pour  $c < f(x_0, y_0)$ , l'ensemble des points de  $B((x_0, y_0), \varepsilon)$  qui vérifie  $\{f(x, y) = c\}$  est vide alors que pour  $c = f(x_0, y_0)$ , cet ensemble est réduit au point  $(x_0, y_0)$  et que pour  $c > f(x_0, y_0)$ , c'est une courbe qui est l'image par le difféomorphisme  $C^{-1}$  d'un cercle de rayon  $\sqrt{2(c - f(x_0, y_0))}$ . On a un résultat analogue dans les

autres cas. Ainsi dans les coordonnées  $(u, v)$  l'application  $f$  est beaucoup plus simple.



*Démonstration.* — On suppose que  $x_0 = y_0 = f(x_0, y_0) = 0$  (cela pour alléger l'écriture) et on ne fait la preuve que pour le troisième cas :

$$D^2f(0, 0)(ue_1 + ve_2, ue_1 + ve_2) = u^2 - v^2.$$

Les autres cas se montre de la même façon (il suffit de changer de signe au bon endroit).

Et on travaille dans la base  $(e_1, e_2)$  c'est à dire  $(x, y) = xe_1 + ye_2$ .

Grâce à la formule de Taylor avec reste intégral, on a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^1 (1-t)D^2f(tx, ty)((x, y); (x, y))dt \\ &= \int_0^1 (1-t) \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(tx, ty)x^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(tx, ty)xy + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(tx, ty)y^2 \right] dt \end{aligned}$$

Ceci étant valide dans une boule  $B(0, \eta) \subset U$ . Posons

$$\begin{aligned} a(x, y) &= 2 \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(tx, ty)dt \\ b(x, y) &= 2 \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(tx, ty)dt \\ c(x, y) &= 2 \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(tx, ty)dt \end{aligned}$$

<sup>(3)</sup>Un tel résultat existe aussi en dimension supérieure.

Ces trois fonctions sont de classe  $C^{r-2}$  et ainsi

$$f(x, y) = \frac{1}{2} [a(x, y)x^2 + 2c(x, y)xy + b(x, y)y^2]$$

on a

$$(1) \quad \begin{aligned} a(0, 0) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0, 0) = 1, & b(0, 0) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(0, 0) = -1, \\ \text{et } c(0, 0) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Quitte à réduire  $\eta$ , on peut supposer que sur  $B(0, \eta)$  on a  $a(x, y) > 0$ . Alors on peut écrire

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \left[ a \left( x + \frac{c}{a} y \right)^2 + \frac{ba - c^2}{a} y^2 \right] \quad (4)$$

à réduire encore  $\eta$ , on peut supposer que sur  $B(0, \eta)$ , on a  $ba - c^2 < 0$ . Alors on pose

$$u(x, y) = \sqrt{a} \left( x + \frac{c}{a} y \right) \quad \text{et} \quad v(x, y) = \sqrt{\frac{c^2 - ba}{a}} y$$

alors  $u$  et  $v$  sont bien des fonctions de classe  $C^{r-2}$  et nous avons bien par construction

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (u(x, y)^2 - v(x, y)^2).$$

En grâce à (1) on sait que

$$\frac{\partial}{\partial x} u(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h, 0) - u(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a(h, 0)} h}{h} = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(0, h) - u(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a(0, h)} \frac{c(0, h)}{a(0, h)} h}{h} = 0$$

et de même :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} v(0, 0) &= 0 \\ \text{et } \frac{\partial}{\partial y} v(0, 0) &= 1. \end{aligned}$$

La matrice de la différentielle de  $C = (u, v)$  en  $(0, 0)$  est donc  $\text{Id}_2$ , Cette différentielle est donc inversible et le théorème d'inversion locale (2.1) nous fournit  $\varepsilon > 0$  telle que  $C$  soit un  $C^{r-2}$  difféomorphisme de  $B(0, \varepsilon)$  sur son image.  $\square$

<sup>(4)</sup> On a écrit  $a$  pour  $a(x, y)$ ,  $b$  pour  $b(x, y)$  et  $c$  pour  $c(x, y)$ .

## 2.2. Le théorème des fonctions implicites. —

2.2.1. L'énoncé. —

**Théorème 2.6.** — Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  et  $f \in C^r(\mathcal{O}, \mathbb{R}^p)$  (où  $r \geq 1$ ). On suppose qu'en  $(x_o, y_o) \in \mathcal{O}$ ,  $D_2 f(x_o, y_o)$  <sup>(5)</sup> est inversible, alors il existe un voisinage ouvert  $U \times V$  de  $(x_o, y_o)$  et  $\psi : U \rightarrow V$  une application de classe  $C^r$  telle que

$$\begin{cases} (x, y) \in U \times V \\ f(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in U \\ y = \psi(x) \end{cases}$$

De plus on a

$$D\psi(x) = - (D_2 f(x_o, y_o))^{-1} D_1 f(x_o, y_o)$$

2.2.2. Application : suivre une racine simple de polynôme. —

**Proposition 2.7.** — Soit  $P_o \in \mathbb{C}_n[X]$  et  $z_o \in \mathbb{C}$  une racine simple de  $P_o$ , alors pour  $P \in \mathbb{C}_n[X]$  voisin de  $P_o$ ,  $P$  a une unique racine  $z(P)$  voisine de  $z_o$  et

$$z(P) = z_o - \frac{P(z_o)}{P'_o(z_o)} + o(\|P - P_o\|)$$

*Démonstration.* — D'abord l'application  $\mathcal{E} : \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$\mathcal{E}(P, z) = P(z)$$

est de classe  $C^\infty$ . En effet si on identifie  $\mathbb{C}_n[X]$  à  $\mathbb{C}^{n+1}$  avec  $(a_0, \dots, a_n) \mapsto \sum_i a_i X^i$ , alors  $\mathcal{E}$  est juste l'application

$$(a_0, \dots, a_n, z) \mapsto \sum_i a_i z^i,$$

c'est une application polynomiale. De plus la différentielle au point  $(P_o, z_o)$  de  $\mathcal{E}$  par rapport à la variable  $z$  est l'application de multiplication par  $P'_o(z_o)$  :

$$\text{pour } h \in \mathbb{C}, \quad D_2 \mathcal{E}(P_o, z_o)h = P'_o(z_o)h$$

<sup>(5)</sup> C'est la différentielle de  $f$  par rapport à la seconde variable  $y \in \mathbb{R}^p$ ; c'est une application linéaire de  $\mathbb{R}^p$  dans lui-même.

En particulier comme on a supposé que  $z_o$  est racine simple de  $P_o$  on a  $P'(z_o) \neq 0$ , donc  $D_2\mathcal{E}(P_o, z_o)$  est bien une application linéaire inversible. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites (2.6) : Il y a donc  $U$  un voisinage ouvert de  $P_o$  dans  $\mathbb{C}_n[X]$ ,  $V$  un voisinage ouvert de  $z_o$  dans  $\mathbb{C}$  et  $\psi : U \rightarrow V$  une application  $C^\infty$  tels que

$$\begin{cases} (P, z) \in U \times V \\ P(z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} P \in U \\ z = \psi(P) \end{cases}$$

De plus lorsqu'on fixe  $z_o$ , l'application  $P \mapsto P(z_o)$  est linéaire donc

$$\text{pour } H \in \mathbb{C}_n[x], D_1\mathcal{E}(P_o, z_o)H = H(z_o)$$

On a donc

$$D\psi(P_o)H = -\frac{1}{P'(z_o)}D_1\mathcal{E}(P_o, z_o)H = -\frac{H(z_o)}{P'(z_o)}.$$

Lorsque  $P \in U$ ,  $P$  a donc une unique racine  $z = \psi(P)$  dans  $V$  et on a

$$\begin{aligned} z = \psi(P) &= \psi(P_o) - D\psi(P_o)(P - P_o) + o(\|P - P_o\|) \\ &= z_o - \frac{P(z_o)}{P'(z_o)} + o(\|P - P_o\|). \end{aligned}$$

□

### 2.3. Applications à l'étude des courbes planes. —

#### 2.3.1. Redressement d'une courbe. —

**Proposition 2.8.** — Soient  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une application de classe  $C^{r \geq 1}$  et  $t_o \in I$  telle que  $c'(t_o) \neq 0$ . Alors il existe

- $\delta > 0$  tel que  $]t_o - \delta, t_o + \delta[ \subset I$ ,
- $U$  un voisinage ouvert de  $c(t_o)$ ,
- et  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  un  $C^r$  difféomorphisme sur son image

tels que

$$\Phi(c(t)) = (t - t_o, 0).$$

*Démonstration.* — Soit  $\vec{v}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^2$  non colinéaire à  $c'(t_o)$ , et considérons

$$\Psi(s, h) = c(t_o + s) + h\vec{v}.$$

Cette application  $\Psi$  est évidemment de classe  $C^r$ , ces dérivées partielles en  $(0, 0)$  sont

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s}(0, 0) = c'(t_o) \text{ et } \frac{\partial \Psi}{\partial h}(0, 0) = \vec{v},$$

elles forment donc une base de  $\mathbb{R}^2$ , la différentielle de  $\Psi$  en  $(0, 0)$  est donc inversible. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale (2.1) pour trouver  $U$  un voisinage ouvert de  $c(t_o)$  et  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  un  $C^r$  difféomorphisme sur son image tel que  $(0, 0) \in \Phi(U)$  et  $\Phi(\Psi(s, h)) = (s, h)$ . En particulier  $\Phi(\Psi(s, 0)) = \Phi(c(t_o + s)) = (s, 0)$ . □

Si la courbe est un graphe  $\{y = f(x)\}$  elle est paramétrée par  $t \mapsto (t, f(t))$  et un difféomorphisme redressant la courbe est :  $(x, y) \mapsto (x, y - f(x))$ .

**2.3.2. Courbe définie implicitement.** — On paraphrase ici le théorème des fonctions implicites en dimension 2 :

**Proposition 2.9.** — Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $F \in C^r(U, \mathbb{R})$  (avec toujours  $r \geq 1$ ) on suppose qu'en  $(x_o, y_o) \in U$  on a  $DF(x_o, y_o) \neq 0$  i.e.

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x}(x_o, y_o), \frac{\partial F}{\partial y}(x_o, y_o) \right) \neq (0, 0)$$

On considère  $C = \{(x, y) \in U, F(x, y) = 0\}$  alors au voisinage de  $(x_o, y_o)$   $C$  est

- soit un graphe  $y = f(x)$  (lorsque  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_o, y_o) \neq 0$ )
- soit un graphe  $x = g(y)$  (lorsque  $\frac{\partial F}{\partial x}(x_o, y_o) \neq 0$ ).

#### 2.3.3. Résumé : sous variété de dimension 1 du plan :—

**Théorème 2.10.** — Soit  $\mathcal{C}$  un sous ensemble du plan  $\mathbb{R}^2$  et  $r \geq 1$ , il y a équivalence entre

i) Pour tout  $m \in \mathcal{C}$ , il existe  $U$  un ouvert contenant  $m$  et  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{B}$  un  $C^r$  difféomorphisme telle que

$$\Phi(U \cap \mathcal{C}) = \{(x, 0); |x| < 1\}.$$

ii) Pour tout  $m \in \mathcal{C}$ , il existe  $U$  un ouvert contenant  $m$  et  $E : U \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^r$  tel que  $DE(m) \neq 0$  et

$$E^{-1}\{0\} = \mathcal{C} \cap U.$$

iii) Pour tout  $m \in \mathcal{C}$ , il existe  $U$  un ouvert contenant  $m$  de la forme  $I \times J$  ou  $I, J$  sont des intervalles de  $\mathbb{R}$  et il existe

– soit une application  $C^r$   $g : I \rightarrow J$  telle que  $\mathcal{C} \cap U$  soit le graphe de  $g$

– soit une application  $C^r$   $f : J \rightarrow I$  telle que  $\mathcal{C} \cap U$  soit le graphe de  $f$ .

iv) Pour tout  $m \in \mathcal{C}$ , il existe  $U$  un ouvert contenant  $m$  et  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $c : I \rightarrow U$  une application de classe  $C^r$  avec  $c'(t) \neq 0, \forall t \in I$  telle que  $c : I \rightarrow \mathcal{C} \cap U$  soit un **homéomorphisme**.

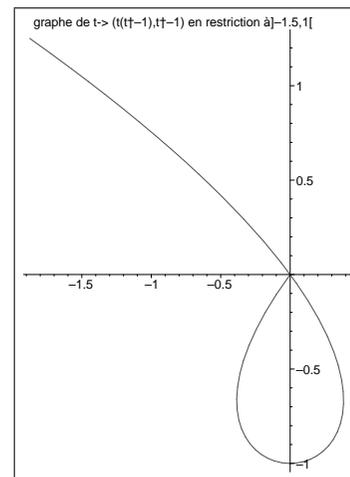
On dit alors que  $\mathcal{C}$  est un sous-variété de dimension 1 du plan de classe  $C^r$ .

*Démonstration.* — En effet l'équivalence  $ii) \Leftrightarrow iii)$  est juste le théorème des fonctions implicites. Il est aussi clair que  $iii) \Rightarrow iv)$ ; la proposition sur le redressement des courbes (2.8) assure que  $iv) \Rightarrow i)$  en effet avec  $iv)$  cette proposition assure que si  $m \in \mathcal{C}$  alors il existe  $V \subset U$  un voisinage ouvert de  $m$ ,  $J \subset I$  un intervalle ouvert et  $\Phi : V \rightarrow \mathbb{B}$  un  $C^r$  difféomorphisme tel que  $\Phi(c(J)) = \{(x, 0), \|x\| < 1\}$  mais comme  $c$  est un homéomorphisme sur son image on a  $c : J \rightarrow U$  est encore un homéomorphisme sur son image, en particulier  $c(J)$  est un voisinage ouvert de  $m$  dans  $c(I)$ , il y a donc un ouvert  $V'$  de  $\mathbb{R}^2$  telle que

$$c(J) = c(I) \cap V'$$

et donc  $c(J) = c(I) \cap (V' \cap V)$ . La restriction à  $V \cap V'$  de  $\Phi$  convient donc. Pour démontrer  $i) \Rightarrow ii)$  à partir des hypothèses de  $i)$  il suffit de poser  $F(x, y) = \Phi_2(x, y)$  si  $\Phi(x, y) = (\Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y))$ .  $\square$

Remarquons que dans  $iv)$  l'hypothèse **homéomorphisme** est très importante : exemple l'image de  $c(t) = (t(t^2 - 1), t^2 - 1)$  sur  $\mathbb{R}$  ne vérifie pas  $iv)$  et même en restriction à  $] - \infty, 1[$  où elle est injective :



Le point  $c(0) = (0, 0)$  de la courbe n'a pas de voisinage homéomorphe à un segment.

2.3.4. *Droite tangente.* — Soit  $\mathcal{C}$  une sous-variété de dimension 1 du plan de classe  $C^r$  et  $m \in \mathcal{C}$  alors si dans un voisinage de  $m$ ,  $\mathcal{C}$  est définie par l'équation  $E(p) = 0$  où  $E$  est une fonction de classe  $C^r$  à valeurs réelles et telle que  $DE(m) \neq 0$ , la droite affine tangente à  $\mathcal{C}$  en  $m$  est la droite  $T_m\mathcal{C}$  qui passe par  $m$  et dirigée par  $\ker DF(m)$  (la droite vectoriel tangente est juste  $\overrightarrow{T_m\mathcal{C}} = \ker DF(m)$  (6)). Cette droite ne dépend pas de l'équation choisie pour définir  $\mathcal{C}$  au voisinage de  $m$ . En effet si  $\mathcal{C}$  est paramétrée par  $c : I \rightarrow U$   $C^r$  avec  $c'(t) \neq 0, \forall t \in I$  et  $c(0) = m$  alors on a forcément  $E \circ c = 0$  et donc

$$DE(m)c'(0) = 0$$

ainsi la droite  $\overrightarrow{T_m\mathcal{C}}$  est dirigée par  $c'(0)$  et cette caractérisation ne dépend donc plus de l'équation choisie pour définir  $\mathcal{C}$ ; de la même façon elle ne dépend pas de la paramétrisation  $c$  choisie.

## 2.4. Applications : surfaces de l'espace. —

2.4.1. *Définition.* —

**Théorème 2.11.** — On dit qu'un sous ensemble  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  est une surface  $C^r$  si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

(6) C'est bien un sous espace vectoriel de dimension 1 par le théorème du rang.

i) Pour tout  $m \in \Sigma$ , il existe  $U$  un ouvert contenant  $m$  et  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{B}^3$  un  $C^r$  difféomorphisme tel que

$$\Phi(U \cap \Sigma) = \{(x, y, 0); x^2 + y^2 < 1\}.$$

ii) Pour tout  $m \in \Sigma$ , il existe  $U$  un ouvert contenant  $m$  et  $E : U \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^r$  tel que  $DE(m) \neq 0$  et

$$E^{-1}\{0\} = \Sigma \cap U.$$

iii) Pour tout  $m \in \Sigma$ , il existe  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base de  $\mathbb{R}^3$  et  $U$  un ouvert contenant  $m$  de la forme  $] -a, a[ \times ] -a, a[ \times ] -b, b[$  dans le repère  $(m, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et une application de classe  $C^r$   $G : ] -a, a[ \times ] -a, a[ \rightarrow ] -b, b[$  telle que

$$\Sigma \cap U = \{m + (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}), (x, y) \in ] -a, a[ \times ] -a, a[ \text{ et } z = G(x, y)\}$$

iv) Pour tout  $m \in \Sigma$ , il existe  $U$  un ouvert contenant  $m$  et  $P : \mathbb{B}^2 \rightarrow U$   $C^r$  avec  $P(0, 0) = m$  telle que

-  $P : \mathbb{B}^2 \rightarrow \Sigma \cap U$  soit un **homéomorphisme**

- et  $\forall (u, v) \in \mathbb{B}^2, DP(u, v)$  est injective c'est à dire  $\forall (u, v) \in \mathbb{B}^2$

$$\frac{\partial}{\partial u} P(u, v) \wedge \frac{\partial}{\partial v} P(u, v) \neq 0$$

**Remarque 2.12.** — Dans le critère iv) on peut remplacer  $\mathbb{B}^2$  par n'importe quel ouvert du plan. Dans iv) au lieu de supposer que  $\forall (u, v) \in \mathbb{B}^2$   $\frac{\partial}{\partial u} P(u, v) \wedge \frac{\partial}{\partial v} P(u, v) \neq 0$  quitte à réduire  $U$  et prendre une boule de rayon plus petit, on peut supposer  $\frac{\partial}{\partial u} P(0, 0) \wedge \frac{\partial}{\partial v} P(0, 0) \neq 0$

i) nous dit qu'une surface est un ensemble de l'espace telle que à changement de coordonnées près  $\Sigma$  est un morceau de plan.

*Démonstration.* — On montre facilement que ii)  $\Rightarrow$  iii) grâce au théorème des fonctions implicites : si on suppose qu'en  $m$  ii) est vérifiée alors on a

$$\left( \frac{\partial E}{\partial x}(m), \frac{\partial E}{\partial y}(m), \frac{\partial E}{\partial z}(m) \right) \neq 0$$

une des dérivées partielles de  $E$  en  $m$  n'est pas nulle supposons par exemple que  $\frac{\partial E}{\partial z}(m) \neq 0$ . On considère alors  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et alors le théorème des fonctions implicites nous dit qu'il y a un voisinage de  $m$

de la forme  $(] -a, a[)^2 \times ] -b, b[$  dans le repère  $(m, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et une application de classe  $C^r$   $G : (] -a, a[)^2 \rightarrow ] -b, b[$  telle que

$$\begin{cases} p = m + (x, y, z) \in (] -a, a[)^2 \times ] -b, b[ \\ E(p) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x, y) \in (] -a, a[)^2 \\ z = G(x, y) \end{cases}$$

Ce qui est exactement l'énoncé iii).

Il est aussi facile de démontrer que iii)  $\Rightarrow$  iv) : si on suppose que iii) est vérifiée en  $m \in \Sigma$  alors  $F(x, y) = m + (x\vec{i} + y\vec{j} + G(x, y)\vec{k})$  convient ; l'homéomorphisme réciproque est juste

$$(m + (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})) \mapsto (x, y).$$

La preuve de iv)  $\Rightarrow$  i) suit le même cheminement que la preuve du redressement des courbes : supposons donc que iv) est vérifiée en  $m \in \Sigma$  posons

$$\vec{e}_3 = \frac{\partial P}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial P}{\partial v}(0, 0)$$

ainsi  $(\frac{\partial P}{\partial u}(0, 0), \frac{\partial P}{\partial v}(0, 0), \vec{e}_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et considérons l'application

$$\Psi(u, v, w) = P(u, v) + w\vec{e}_3.$$

Cette application est bien de classe  $C^r$  et elle est définie sur  $\mathbb{B}^2 \times \mathbb{R}$  les dérivées partielles de  $\Psi$  en  $(0, 0, 0)$  sont

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u}(0, 0, 0) = \frac{\partial P}{\partial u}(0, 0), \frac{\partial \Psi}{\partial v}(0, 0, 0) = \frac{\partial P}{\partial v}(0, 0) \text{ et } \frac{\partial \Psi}{\partial w}(0, 0, 0) = \vec{e}_3,$$

elles forment donc une base de  $\mathbb{R}^3$ , la différentielle de  $\Psi$  en  $(0, 0, 0)$  est donc inversible, grâce au théorème d'inversion local, on trouve  $\varepsilon > 0$  tel que  $\Psi : \mathbb{B}^3(\varepsilon) \rightarrow V$  soit un difféomorphisme de classe  $C^r$  et on a

$$\Psi\{(x, y, z) \in \mathbb{B}^3(\varepsilon), z = 0\} = \{P(x, y), x^2 + y^2 < \varepsilon^2\}.$$

Mais  $P : \mathbb{B}^2 \rightarrow U \cap \Sigma$  est un homéomorphisme, donc  $\{P(x, y), x^2 + y^2 < \varepsilon^2\}$  est un voisinage ouvert de  $m = P(0, 0)$  dans  $\Sigma$ , il y a donc  $V'$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $\{P(x, y), x^2 + y^2 < \varepsilon^2\} = V' \cap \Sigma$ . Si on considère  $\Phi$  la restriction de  $\Psi^{-1}$  à  $V \cap V'$ , celui ci convient.

Montrons que i)  $\Rightarrow$  ii) : supposons donc que i) est vérifiée en  $m \in \Sigma$ , considérons  $\Phi(p) = (\Phi_1(p), \Phi_2(p), \Phi_3(p))$ . On choisit  $E(p) = \Phi_3(p)$ , i) nous dit exactement que  $E^{-1}\{0\} = \Sigma \cap U$ , de plus puisque  $D\Phi(m)$  est

surjective, on a  $DE(m) \neq 0$  (sinon l'image de  $D\Phi(m)$  serait incluse dans le plan  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ ).  $\square$

**2.4.2. Plan tangent.** — Soit  $\Sigma$  une surface de classe  $C^r$  de  $\mathbb{R}^3$  et  $m \in \Sigma$ , on appelle plan tangent à  $\Sigma$  en  $m$  le plan affine  $T_m\Sigma$  qui passe par  $m$  et dirigé par  $\ker DE(m)$  lorsque au voisinage de  $m$ ,  $\Sigma$  est définie par  $E(p) = 0$  et que  $DE(m) \neq 0$ ; c'est aussi le plan affine passant par  $m$  et dirigé par  $\frac{\partial F}{\partial u}(0,0), \frac{\partial F}{\partial v}(0,0)$  lorsque au voisinage de  $m$ ,  $\Sigma$  est paramétrée par  $F$  avec  $F(0,0) = m$  (qui vérifie les hypothèses iv)).

Comme pour les sous variétés de dimension 1 du plan; ceci est bien défini : ça ne dépend pas de l'équation choisie, ni de la paramétrisation. On note  $\overrightarrow{T_m\Sigma}$  la direction de  $T_m\Sigma$ .

**2.4.3. Coordonnées locales sur une surface.** — Nous donnons maintenant deux définitions. Soit  $\Sigma$  une surface de classe  $C^r$  et  $V$  un ouvert de  $\Sigma$ .

**Définition 2.13.** — On dit qu'une application  $F : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$  définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  est une paramétrisation  $C^r$  de  $V$  si  $F$  satisfait aux conditions iv) de la définition d'une surface, c'est à dire que  $F$  est un homéomorphisme de  $U$  sur  $V$  et que  $DF(p)$  est injective en tout point  $m$  de  $U$ . Ce qui signifie que  $DF(m)$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\overrightarrow{T_m\Sigma}$ .

**Définition 2.14.** — On dit que deux fonctions  $u, v : V \rightarrow \mathbb{R}^2$  sont des coordonnées si l'application  $C : V \rightarrow C(V)$  définie par  $C(p) = (u(p), v(p))$  est un homéomorphisme et si l'homéomorphisme réciproque  $F = C^{-1}$  est une paramétrisation  $C^r$  de  $V$ .

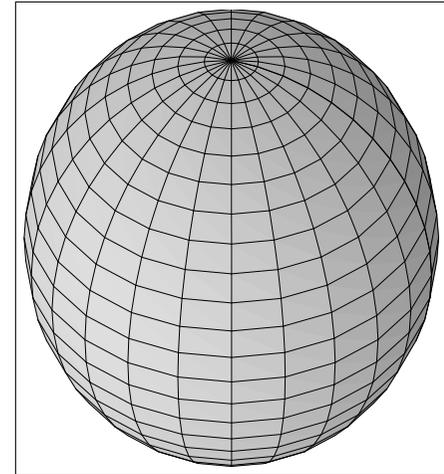
Remarquons que si  $F : U \rightarrow V$  et  $G : U' \rightarrow V$  sont deux paramétrisations  $C^r$  de  $V$  alors le changement de cartes :  $C = F^{-1} \circ G$  est un  $C^r$  difféomorphisme de  $U'$  sur  $U$ . C'est en effet clairement un homéomorphisme de  $U'$  sur  $U$ . Le caractère  $C^r$  provient du fait que si  $p \in V$  alors pour  $\eta > 0$  assez petit alors l'application  $(x, y, z) \mapsto F(x, y) + ze_3$  est un  $C^r$  difféomorphisme d'une boule de rayon  $\eta$  centré en  $F^{-1}(p) \times \{0\}$  sur son image. Si  $\varphi$  est le difféomorphisme réciproque alors sur un petit voisinage de  $G^{-1}(p)$ , l'application  $C = F^{-1} \circ G = \varphi \circ G$  est bien  $C^r$  par composition de deux applications  $C^r$ . Et il en est de même de  $C^{-1} = G^{-1} \circ F$ .

Par exemple : Dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de  $\mathbb{R}^3$ , les fonctions  $x, y : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$  sont des coordonnées au voisinage de  $m \in \Sigma$  si et seulement si  $\overrightarrow{T_m\Sigma}$  ne contient pas la direction  $\vec{k}$ .

En effet si  $E = 0$  est une équation de  $\Sigma$  au voisinage de  $m$ , alors  $\overrightarrow{T_m\Sigma}$  ne contient pas la direction  $\vec{k}$ , si et seulement si  $\frac{\partial E}{\partial z}(m) \neq 0$ . C'est à dire si et seulement si au voisinage de  $m$ ,  $\Sigma$  peut se définir comme un graphe  $z = f(x, y)$ .

**2.4.4. Des exemples de surfaces.** —

- i) Un **plan** de  $\mathbb{R}^3$  est évidemment une surface.
- ii) **La sphère :**



$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \text{ tel que } x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  est une surface  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^3$ . En effet l'application  $E(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$  est bien  $C^\infty$  et puisque

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 2x, \frac{\partial E}{\partial y} = 2y \text{ et } \frac{\partial E}{\partial z} = 2z,$$

$$DE(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

Donc si  $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$  alors  $DE(x, y, z) \neq 0$ . Puisqu'on a aussi  $DE(m)v = 2 \langle m, v \rangle$  le plan tangent à la sphère  $\mathbb{S}^2$  en  $m$  est le plan passant par  $m$  et orthogonal au vecteur  $\overrightarrow{Om}$ .

On peut paramétrer la sphère par exemple grâce aux coordonnées sphériques. On introduit les vecteurs

$$\vec{u}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \text{ et } \vec{v}_\theta = \frac{d}{d\theta} \vec{u}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

et  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ , ainsi  $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta, \vec{k})$  forment une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^3$ . On définit

$$F(\theta, \varphi) = \cos \varphi \vec{u}_\theta + \sin \varphi \vec{k}$$

$\theta$  représente la longitude et  $\varphi$  la latitude. On calcule facilement

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \cos \varphi \vec{v}_\theta, \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \vec{u}_\theta + \cos \varphi \vec{k}.$$

Donc

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \cos \varphi F \neq 0$$

si  $\varphi \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ .

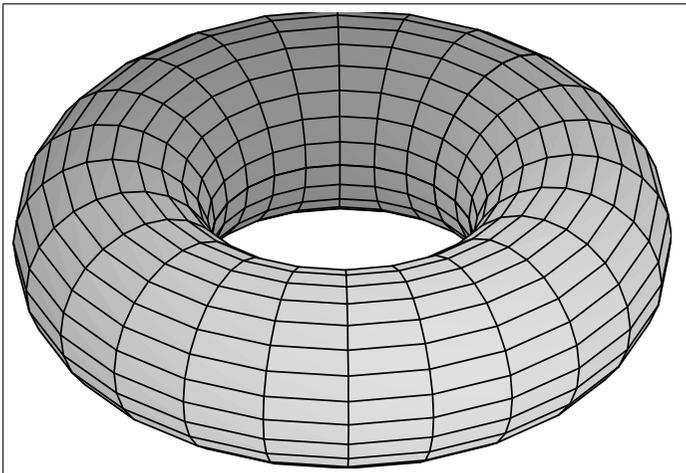
Il est facile de vérifier que  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  est surjective. La façon la plus commode pour montrer que  $F$  est une paramétrisation d'une partie de  $\mathbb{S}^2$  est d'introduire un redressement : On introduit  $P(r, \theta, \varphi) = rF(\theta, \varphi)$  les coordonnées sphériques, on montre que  $P$  est un  $C^\infty$  difféomorphisme de  $]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[ \times ]-\pi/2, \pi/2[$  sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z), z \in \mathbb{R} \text{ et } x \geq 0\}$ . Ceci implique que  $P^{-1}$  redresse  $\mathbb{S}^2 \setminus \{(x, 0, z), z \in \mathbb{R} \text{ et } x \geq 0\}$  sur  $\{1\} \times ]0, 2\pi[ \times ]-\pi/2, \pi/2[$  et aussi que

$$F : ]0, 2\pi[ \times ]-\pi/2, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{(x, 0, z), z \in \mathbb{R} \text{ et } x \geq 0\}$$

est bien un homéomorphisme et donc une paramétrisation.

Si on veut paramétrer un autre morceau de la sphère, il suffit de changer la base orthonormée choisie pour définir  $\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta$  et  $\vec{k}$ .

### iii) Tore de révolution



Soit  $a > r > 0$ , le tore de révolution  $\mathbf{T}_{a,r}$  est l'image de l'application  $F$  définie par  $F(\theta, \varphi) = (a + r \cos \varphi) \vec{u}_\theta + r \sin \varphi \vec{k}$ , on a

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = (a + r \cos \varphi) \vec{v}_\theta, \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \vec{u}_\theta + r \cos \varphi \vec{k}.$$

Donc

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right\| = r(a + r \cos \varphi)$$

qui reste bien toujours strictement positif car on a supposé  $a > r$ . On montre<sup>(7)</sup> que

$$(x, y, z) \in \mathbf{T}_{a,r} \Leftrightarrow E(x, y, z) = 0$$

où  $E(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2)$  On calcule facilement

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= 4x(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - r^2), & \frac{\partial E}{\partial y} &= 4y(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - r^2) \\ \text{et } \frac{\partial E}{\partial z} &= 4z(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2). \end{aligned}$$

On a

$$x \frac{\partial E}{\partial x} + y \frac{\partial E}{\partial y} = 4(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - r^2)$$

Remarquons que l'axe  $Oz = \{x = 0, y = 0\}$  ne rencontre pas  $\mathbf{T}_{a,r}$ ; si  $DE(x, y, z) = 0$ , on doit avoir  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + r^2$  et  $\frac{\partial E}{\partial z} = 4z(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2) = 0$ . Donc on a

- soit  $z = 0$  et  $x^2 + y^2 = a^2 + r^2$
- soit  $x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2 = 0$  et  $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - r^2 = 0$ .

La deuxième possibilité est exclue, mais sur  $\mathbf{T}_{a,r}$  lorsque  $z = 0$  alors  $x^2 + y^2 = (a \pm r)^2 \neq a^2 + r^2$ , la première possibilité est donc aussi exclue sur  $\mathbf{T}_{a,r}$  : on a donc toujours  $(x, y, z) \in \mathbf{T}_{a,r} \Rightarrow DE(x, y, z) \neq 0$ .  $E$  définit une équation de  $\mathbf{T}_{a,r}$  qui est bien une surface  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^3$ .

On veut démontrer que  $F$  permet de paramétrer  $\mathbf{T}_{a,r}$  : pour cela on introduit les coordonnées adéquates dans  $\mathbb{R}^3$  :  $R(t, \theta, \varphi) = F(\theta, \varphi) + t r N(\theta, \varphi)$  où  $N(\theta, \varphi) = \cos \varphi \vec{u}_\theta + \sin \varphi \vec{k}$ . En  $(0, \theta_0, \varphi_0)$ , on calcule

$$\frac{\partial R}{\partial t} = r N(\theta_0, \varphi_0), \quad \frac{\partial R}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial R}{\partial \varphi} = \frac{\partial F}{\partial \varphi}$$

C'est une famille orthogonale de 3 vecteurs non nuls, donc grâce au théorème d'inversion locale, il y a  $\delta > 0$ , tel que la restriction de  $R$  à  $] -$

<sup>(7)</sup>Montrer le!

$\delta, \delta[\times]\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta[\times]\varphi_0 - \delta, \varphi_0 + \delta[$  soit un difféomorphisme sur un voisinage  $U$  de  $F(\theta_0, \varphi_0)$ . Un calcul (long mais facile) montre que

$$E : (R(t, \theta, \varphi)) = t(t+2)r^2 (4a(a+r(1+t)\cos\varphi) + t(t+2)r^2).$$

Ainsi si on suppose  $\delta < (a-r)/(2a)$  et  $\delta < 2$ , on a bien

$$\begin{aligned} ((t, \theta, \varphi) \in ]-\delta, \delta[\times]\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta[\times]\varphi_0 - \delta, \varphi_0 + \delta[, E(R(t, \theta, \varphi)) = 0) \\ \Leftrightarrow t = 0. \end{aligned}$$

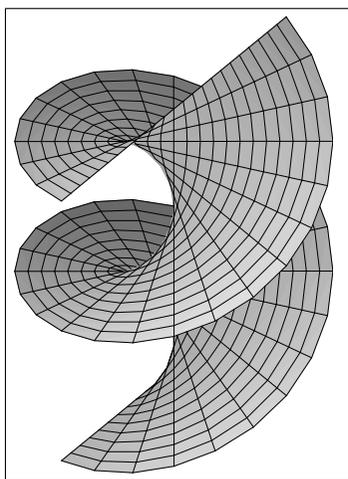
Donc  $R^{-1}(U \cap \mathbf{T}_{a,r}) = \{0\} \times ]\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta[\times]\varphi_0 - \delta, \varphi_0 + \delta[$  et la restriction de  $F$  à  $] \theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta[\times]\varphi_0 - \delta, \varphi_0 + \delta[$  est bien une paramétrisation de  $U \cap \mathbf{T}_{a,r}$ .

De plus puisqu'on a

$$(F(\theta, \varphi) = F(\theta', \varphi')) \Leftrightarrow \theta - \theta' = 0 \text{ mod}(2\pi) \text{ et } \varphi - \varphi' = 0 \text{ mod}(2\pi) \quad (8)$$

alors  $F : ]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbf{T}_{a,r} \setminus \{(x, 0, z), z \in \mathbb{R}, x > 0\}$  est une application continue bijective qui est localement un homéomorphisme, c'est donc bien un homéomorphisme.

iv) **Hélicoïde** C'est l'image de l'application définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $F(\theta, t) = t\vec{u}_\theta + \theta\vec{k}$ . Notons le  $\mathcal{H}$ .



Les vecteurs

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = t\vec{v}_\theta + \vec{k}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \vec{u}_\theta$$

<sup>(8)</sup>Vérifier le vous même!

sont bien linéairement indépendants. Pour vérifier que  $F$  est un homéomorphisme sur son image on peut écrire une équation de  $\mathcal{H}$ . On a

$$(2) \quad (x, y, z) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \exists(\theta, t) \text{ tel que } x = t \cos \theta, y = t \sin \theta, z = \theta$$

Ce qui équivaut à

$$\sin(z)x - \cos(z)y = 0.$$

L'application  $E(x, y, z) = \sin(z)x - \cos(z)y$  est  $C^\infty$ , de plus un petit calcul montre que sur  $\mathbb{R}^3$ ,  $DE(x, y, z) \neq 0$ , donc  $\mathcal{H}$  est bien une surface  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^3$ . Au voisinage des points où  $z \neq 0 \text{ mod}(\pi)$ ,  $\mathcal{H}$  est un graphe  $x = y \cotan z$  et au voisinage des points où  $z \neq \frac{\pi}{2} \text{ mod}(\pi)$ ,  $\mathcal{H}$  est un graphe  $y = x \tan z$ .  $F$  est clairement une bijection continue de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathcal{H}$ . De plus les formules 2 permettent de déterminer un inverse continu à  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{H} : F$  est donc bien un homéomorphisme. De plus le plan tangent à  $\mathcal{H}$  en  $(x_0, y_0, z_0)$  a pour équation :

$$\sin(z_0)(x - x_0) - \cos(z_0)(y - y_0) + (x_0 \cos z_0 + y_0 \sin z_0)(z - z_0) = 0.$$

## 2.5. Le changement de variables en intégration. —

### 2.5.1. Le théorème. —

**Théorème 2.15.** — Soit  $U, V$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow V$  un  $C^1$  difféomorphisme. On note  $J_f(x) = |\det Df(x)|$ . Si  $v \in L^1(V)$  alors  $J_f v \circ f \in L^1(U)$  et

$$\int_V v(y) dy = \int_U v(f(x)) J_f(x) dx.$$

2.5.2. La preuve. — On prouve ici le théorème avec du calcul différentiel et un soupçon de théorie de la mesure. Pour une preuve qui utilise plus de théorie de la mesure, je vous invite à lire le passage concerné dans le livre de Rudin (Analyse réelle et complexe.) La preuve présentée ici est extraite du livre de Spivak (Calculus on manifolds). Cette preuve part du fait que la formule de changement de variable est vraie en dimension 1 : si

$f : [a, b] \rightarrow [c, d]$  est un  $C^1$  difféomorphisme et si  $v \in C^0([c, d])$  alors

$$\begin{aligned} \int_{[c,d]} v(y)dy &= \int_{[a,b]} v(f(x))|f'(x)|dx \\ &= \begin{cases} \int_a^b v(f(x))f'(x)dx & \text{si } f \text{ est croissante} \\ \int_b^a v(f(x))(-f'(x))dx & \text{si } f \text{ est décroissante} \end{cases} \end{aligned}$$

Ceci s'étend évidemment au cas où  $v$  est  $L^1$  par densité.

On propose donc de montrer ce théorème uniquement en dimension 2, la preuve s'adapte facilement en dimension supérieure mais au prix de notations encombrantes.

**Première étape :** si

$$(3) \quad f(x, y) = (x, \phi(x, y))$$

sur un ouvert  $U$ . On suppose que  $P = [a, b] \times [c, d] \subset U$ . On a alors pour  $(x, y) \in U$

$$J_f(x, y) = \left| \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y) \right| \neq 0$$

En particulier à  $x$  fixé, l'application  $y \mapsto \phi(x, y)$  est strictement monotone, supposons la strictement croissante (l'autre cas se traite de la même façon).

Alors

$$f(P) = Q = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } t \in [a, b] \text{ et } s \in [\phi(t, a), \phi(t, b)]\}$$

Alors si  $v \in C^0(V)$  on a grâce au théorème de Fubini :

$$\int_Q v(t, s) dt ds = \int_{[a,b]} \left( \int_{[\phi(t,a), \phi(t,b)]} v(t, s) ds \right) dt.$$

Or grâce au théorème de changement de variables en dimension 1, lorsque  $t \in [a, b]$ , on a

$$\int_{[\phi(t,a), \phi(t,b)]} v(t, s) ds = \int_{[c,d]} v(t, \phi(t, y)) J_f(t, y) dy = \int_{[c,d]} v(f(t, y)) J_f(t, y) dy;$$

D'où en intégrant cette identité sur  $[a, b]$  et utilisant le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \int_Q v(t, s) dt ds &= \int_{[a,b]} \left( \int_{[c,d]} v(f(t, y)) J_f(t, y) dy \right) dt \\ &= \int_P v(f(x, y)) J_f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Ceci s'étend à toutes les fonctions  $v \in L^1(V)$  et en décomposant un ouvert  $U$  en réunion disjointe dénombrable de pavés de la forme  $[a, b] \times [c, d]$ <sup>(9)</sup>. Le théorème de changement de variable est valide pour tout difféomorphisme de la forme (3) ou ses avatars :

On a en particulier le même résultat si le difféomorphisme est de la forme  $f(x, y) = (\psi(x, y), y)$ . ou même  $f(x, y) = (\lambda x, \phi(x, y))$  ou encore  $f(x, y) = (\psi(x, y), \lambda y)$  avec  $\lambda \neq 0$ .

**Seconde étape : le cas où  $f$  est linéaire :**

On suppose donc  $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$  avec  $ad - bc \neq 0$ . Si  $d = 0$ , on a  $f(x, y) = (ax + by, cx)$  on est ramené à la situation précédente et la formule est vraie. Si  $d \neq 0$  on décompose

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a - bc/d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

On a  $f = h \circ g$  avec  $g(x, y) = ((a - bc/d)x, cx + dy)$  et  $h(x, y) = (x + by/d, y)$ ; et si  $v \in L^1(\mathbb{R}^2)$  alors grâce à la première étape :  $v \circ h \in L^1(\mathbb{R}^2)$  et

$$\int_{\mathbb{R}^2} v = \int_{\mathbb{R}^2} v \circ h,$$

puis on ré-applique les résultats de la première étape et on a  $v \circ f = (v \circ h) \circ g \in L^1(\mathbb{R}^2)$  et puisque  $J_f = J_g = |ad - bc|$

$$\int_{\mathbb{R}^2} v = \int_{\mathbb{R}^2} v \circ h = |ad - bc| \int_{\mathbb{R}^2} v \circ f.$$

On a donc montré que si  $A \in GL_2(\mathbb{R})$  et  $v \in L^1(\mathbb{R}^2)$  alors  $v \circ A \in L^1(\mathbb{R}^2)$  et

$$\int_{\mathbb{R}^2} v = |\det A| \int_{\mathbb{R}^2} v \circ A.$$

**Troisième étape : On montre le théorème localement :** soit  $a \in U$  et  $A = Df(a) \in GL_2(\mathbb{R})$ , on considère le difféomorphisme :  $\tilde{f} = A^{-1}f$ , on a  $\tilde{f}(x, y) = (\psi(x, y), \phi(x, y))$  et puisque  $D\tilde{f}(a) = \text{Id}$  on a

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(a) = 1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(a) = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x}(a) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(a) = 1$$

<sup>(9)</sup> Il est bien sûr équivalent d'intégrer sur  $[a, b] \times [c, d]$  ou sur  $[a, b] \times [c, d]$ .

Considérons l'application  $h_a(x, y) = (\psi(x, y), y)$ , cette application  $h_a$  est bien de classe  $C^1$  sur  $U$  et

$$Dh_a(a) = \text{Id}$$

donc grâce au théorème d'inversion locale on peut trouver un voisinage ouvert  $U_a$  de  $a$  sur lequel  $h_a$  est un  $C^1$  difféomorphisme sur son image  $h_a(U_a)$ . On pose alors  $k_a = \tilde{f} \circ h_a^{-1}$  qui est bien un difféomorphisme de  $h_a(U_a)$  sur  $\tilde{f}(U_a)$  car c'est la composée de deux difféomorphismes. Mais on a

$$k_a(x, y) = (x, \phi(h_a^{-1}(x, y))).$$

Sur  $U_a$  on a donc  $f = A \circ k_a \circ h_a$  et grâce aux deux premières étapes on sait que  $A, k_a, h_a$  vérifient le théorème de changement de variables. Soit alors  $v \in L^1(f(U_a))$ , on sait que  $v \circ A \in L^1(k_a \circ h_a(U_a))$  et que

$$(4) \quad \int_{f(U_a)} v = |\det A| \int_{k_a \circ h_a(U_a)} v \circ A$$

Puis on sait que  $J_{k_a} v \circ A \circ k_a \in L^1(h_a(U_a))$  et que

$$(5) \quad \int_{h(U_a)} v \circ A = \int_{h_a(U_a)} J_{k_a}(x, y) v(Ak_a(x, y)) dx dy$$

Et finalement on sait que  $J_{h_a} J_{k_a} \circ h_a v \circ f \in L^1(U_a)$  et

$$(6) \quad \int_{h_a(U_a)} J_{k_a}(x, y) v(Ak_a(x, y)) dx dy = \int_{U_a} J_{h_a}(t, s) J_{k_a}(h_a(t, s)) v(f(t, s)) dt ds.$$

Mais grâce au théorème de dérivation des fonctions composées, on sait que

$$Df(t, s) = A \circ Dk_a(h_a(t, s)) \circ Dh_a(t, s)$$

et donc en prenant le déterminant de cette identité :

$$J_f(t, s) = |\det A| J_{k_a}(h_a(t, s)) J_{h_a}(t, s).$$

Cette égalité et les formules (4,5,6) montrent bien que  $J_f v \circ f \in L^1(U_a)$  et que

$$\int_{f(U_a)} v = \int_{U_a} J_f v \circ f.$$

**Dernière étape :** On extrait du recouvrement  $U = \cup_{a \in U} U_a$  un sous recouvrement dénombrable :  $U = \cup_{i \in \mathbb{N}} U_i$  (où on note  $U_i = U_{a_i}$ ). On définit alors

$$W_0 = U_0, W_1 = U_1 \setminus W_0, \dots, W_k = U_k \setminus \cup_{i < k} W_i, \dots$$

Par définition les  $W_i$  sont deux à deux disjoints  $W_i \subset U_i$  et

$$U = \cup W_i,$$

on a aussi  $V = f(U) = \cup_i f(W_i)$  et les  $f(W_i)$  sont deux à deux disjoints. Maintenant si  $v \in L^1(V)$ , on a montré que pour tout  $i \in \mathbb{N}$

$$\int_{W_i} v \circ f J_f = \int_{f(W_i)} v$$

en sommant cette identité sur  $i \in \mathbb{N}$ , on obtient le résultat voulu.

*2.5.3. L'aire des surfaces et intégration sur les surfaces.* — Soit  $P$  un plan dans  $\mathbb{R}^3$ , si  $A \subset P$  est une partie mesurable de  $P$ , on peut lui associer son aire, car  $P$  porte une mesure de Lebesgue induite par la structure euclidienne de  $P$ . Si  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est une base orthonormée de  $\vec{P}$  et  $m \in P$  alors

$$F : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto m + u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2$$

est une isométrie et  $\text{Aire}(A) = \text{Aire}(F^{-1}(A))$ . Par invariance par translation de la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^2$ , ceci ne dépend pas du point  $m \in P$  choisi.

Si maintenant on considère une autre base  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$  pas forcément orthonormée de  $\vec{P}$ , on a une autre paramétrisation de  $P$  par  $G(x, y) = m + x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2$ , alors pour  $B \subset \mathbb{R}^2$ , on a

$$\text{Aire}(G(B)) = \text{Aire}(B) \|\vec{f}_1 \wedge \vec{f}_2\|$$

En effet, l'application  $F^{-1} \circ G$  est linéaire inversible sur  $\mathbb{R}^2$ , en conséquence par définition et grâce à la formule de changement de variable :

$$\text{Aire}(G(B)) = \text{Aire}(F^{-1} \circ G(B)) = |\det(F^{-1} \circ G)| \text{Aire}(B).$$

Il y a des réels  $(a, b, c, d)$  tels que

$$\vec{f}_1 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 \text{ et } \vec{f}_2 = c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2$$

la matrice de l'application linéaire  $F^{-1} \circ G$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  est donc

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix};$$

alors que  $\vec{f}_1 \wedge \vec{f}_2 = (ad - bc)\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$ . On a bien  $|\det(F^{-1} \circ G)| = |ad - bc| = \|\vec{f}_1 \wedge \vec{f}_2\|$  puisque  $\|\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2\| = 1$ .

Remarquons que  $\|\vec{f}_1 \wedge \vec{f}_2\|^2 = \|\vec{f}_1\|^2\|\vec{f}_2\|^2 - \langle \vec{f}_1, \vec{f}_2 \rangle^2$ .

Ceci amène à considérer les mêmes objets pour une surface de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $P : U \rightarrow S$  une paramétrisation d'un morceau  $P(U)$  d'une surface  $S$  ( $C^\infty$ ) de  $\mathbb{R}^3$ . Lorsque  $A = P(B) \subset P(U)$ , on définit son aire par :

$$\text{Aire}(A) = \int_B \left\| \frac{\partial P}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial P}{\partial v}(u, v) \right\| dudv = \int_B \sqrt{EG - F^2} dudv$$

où les fonctions  $E$ ,  $F$  et  $G$  sont définies par

$$E(u, v) = \left\langle \frac{\partial P}{\partial u}(u, v), \frac{\partial P}{\partial u}(u, v) \right\rangle, \quad F(u, v) = \left\langle \frac{\partial P}{\partial u}(u, v), \frac{\partial P}{\partial v}(u, v) \right\rangle$$

$$\text{et } G(u, v) = \left\langle \frac{\partial P}{\partial v}(u, v), \frac{\partial P}{\partial v}(u, v) \right\rangle.$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

est en fait la matrice de Gramm de la famille des vecteurs

$$\left( \frac{\partial P}{\partial u}(u, v), \frac{\partial P}{\partial v}(u, v) \right);$$

C'est aussi la matrice de  ${}^t DP(u, v)DP(u, v)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ , en effet la matrice de  $DP(u, v)$  est la matrice dont la première colonne exprime les coefficients de  $\frac{\partial P}{\partial u}(u, v)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et la seconde représente ceux de  $\frac{\partial P}{\partial v}(u, v)$ .

Cette définition de l'aire ne dépend pas de la paramétrisation choisie : si  $M : V \rightarrow S$  une paramétrisation d'un morceau  $M(V)$  de  $S$ , avec  $M(V) \cap P(U) \neq \emptyset$ , alors on dispose d'un changement de cartes ou de coordonnées :  $C = M^{-1} \circ P : U \cap P^{-1}(M(V)) \rightarrow M^{-1}(P(U)) \cap V$ .

On a donc  $P = M \circ C$  et donc

$$DP(u, v) = DM(C(u, v))DC(u, v)$$

et

$${}^t DP(u, v)DP(u, v) = {}^t DC(u, v){}^t DM(C(u, v))DM(C(u, v))DC(u, v)$$

et prenant le déterminant de cette identité, on a

$$\det({}^t DP(u, v)DP(u, v)) = (\det DC(u, v))^2 \det({}^t DM(C(u, v))DM(C(u, v))).$$

Donc pour  $A \subset P(U) \cap M(V)$ , on a

$$\begin{aligned} \text{Aire}(A) &= \int_{P^{-1}(A)} \sqrt{\det({}^t DP(u, v)DP(u, v))} dudv \\ &= \int_{P^{-1}(A)} \sqrt{\det({}^t DM(C(u, v))DM(C(u, v)))} |\det DC(u, v)| dudv \\ &= \int_{M^{-1}(A)} \sqrt{\det({}^t DM(x, y)DM(x, y))} dx dy. \end{aligned}$$

Où on a utilisé la formule de changement de variables pour obtenir la dernière inégalité.

Puisque  $S$  peut être recouvert par des ouverts de la forme  $P(U)$  où  $P$  est une paramétrisation on peut parler l'aire d'une partie relativement compacte d'une surface, et même intégrer des fonctions continues (ou même positive mesurable ou intégrable) sur une surface : si  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue à support compact :  $\int_S f dA = \sum_{i=1}^N \int_{P_i(U_i)} f dA$ , où on a recouvert le support de  $f$  par un nombre fini d'ouvert  $P_i(U_i)$  où  $U_i$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $P_i$  une paramétrisation et on a posé :

$$\int_{P_i(U_i)} f dA = \int_{U_i} f(P_i(u, v)) \left\| \frac{\partial P_i}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial P_i}{\partial v}(u, v) \right\| dudv.$$

2.5.4. Des exemples :—

– On peut ainsi calculer l'aire de sphère

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \text{ tel que } x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

L'application définie par

$$F(\theta, \varphi) = \cos \varphi \vec{u}_\theta + \sin \varphi \vec{k}$$

est une paramétrisation  $C^\infty$  de  $\mathbb{S}^2 \setminus \{(x, 0, z), z \in \mathbb{R} \text{ et } x \geq 0\}$ . Lorsque  $(\theta, \varphi) \in ]0, 2\pi[ \times ]-\pi/2, \pi/2[$ . Mais  $\mathbb{S}^2 \cap \{(x, 0, z), z \in \mathbb{R} \text{ et } x \geq 0\}$  a une aire nulle en effet cet ensemble est la réunion du pôle nord  $(0, 0, 1)$ , du pôle sud  $(0, 0, -1)$  et de  $F(\{0\} \times ]-\pi/2, \pi/2[)$  qui est d'aire nul. En effet

en restriction à  $] - \pi, \pi[ \times ] - \pi/2, \pi/2[$ ,  $F$  est une paramétrisation de  $\mathbb{S}^2 \cap \{(x, 0, z), z \in \mathbb{R} \text{ et } x \leq 0\}$  et donc dans ces coordonnées  $F(\{0\} \times ] - \pi/2, \pi/2[)$  est un segment qui est bien négligeable. On a calculé

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right\| = |\cos \varphi|$$

donc

$$\begin{aligned} \text{Aire}(\mathbb{S}^2) &= \text{Aire}(\mathbb{S}^2 \setminus \{(x, 0, z), z \in \mathbb{R} \text{ et } x \geq 0\}) \\ &= \int_{]0, 2\pi[ \times ] - \pi/2, \pi/2[} \cos \varphi d\theta d\varphi \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

– L'aire du tore de révolution  $\mathbf{T}_{a,r}$ , de la même façon, Rappelons que si  $F(\theta, \varphi) = (a+r \cos \varphi)\vec{u}_\theta + r \sin \varphi \vec{k}$  alors la restriction de  $F$  à  $]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[$  permet de paramétrer

$$\mathbf{T}_{a,r} \setminus (\{(x, 0, z), z \in \mathbb{R}, x > 0\} \cup \{(x, y, 0), x^2 + y^2 = (a-r)^2 \in \mathbb{R}\}).$$

On peut aussi paramétrer

$$\mathbf{T}_{a,r} \setminus (\{(x, 0, z), z \in \mathbb{R}, x < 0\} \cup \{(x, y, 0), x^2 + y^2 = (a+r)^2 \in \mathbb{R}\}).$$

par la restriction de  $F$  à  $] - \pi, \pi[ \times ] - \pi, \pi[$ , et dans cette paramétrisation  $\mathbf{T}_{a,r} \cap \{(x, 0, z), z \in \mathbb{R}, x > 0\}$  est un segment, il est donc négligeable. Il en est de même de  $\mathbf{T}_{a,r} \cap \{(x, y, 0), x^2 + y^2 = (a-r)^2 \in \mathbb{R}\}$ . Ainsi  $\text{Aire}(\mathbf{T}_{a,r}) = \text{Aire}(\mathbf{T}_{a,r}) \setminus \{(x, 0, z), z \in \mathbb{R}, x < 0\}$ . Et donc puisque

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right\| = r(a + r \cos \varphi),$$

on a

$$\text{Aire}(\mathbf{T}_{a,r}) = \int_{]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[} r(a + r \cos \varphi) d\theta d\varphi = 4\pi^2 r a.$$

## Exercices de révision sur le calcul différentiel.

**Exercice 2.1.** — (1) Calculer la différentielle à l'origine des applications différentiables :

$$f(x, y, z) = 2 + 3z + xy + z \sin(x^2 + y^2) \quad , \quad g(x, y) = 1 + x\sqrt{y^2 + 2}.$$

(2) Calculer les dérivées partielles de la fonction  $g$  et montrer qu'elles sont continues.

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.2.** — Écrire la matrice jacobienne des applications suivantes :

$$(1) \quad f(x, y, z) = (\sin(xyz), x + e^z, y + z) \quad ,$$

$$(2) \quad f(x, y, z) = (x \cosh y, e^y \cos z)$$

$$(3) \quad f(x, y, z) = e^{xy}(\cos z + \sin y) \quad ,$$

$$(4) \quad f(x, y) = (x, ye^x, xy^2) \quad ,$$

$$(5) \quad f(x) = (e^x, x^3, \cos x)$$

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.3.** — (1) Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(0, 0) = 0$  et  $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$  pour  $(x, y) \neq (0, 0)$ . L'application  $f$  est-elle continue ? Calculer ses dérivées partielles. Sont-elles continues sur  $\mathbb{R}^2$  ? Calculer directement la dérivée partielle de  $f$  en  $(0, 0)$  dans la direction du vecteur de coordonnées  $(X, Y)$ . L'application  $f$  est-elle différentiable en  $(0, 0)$  ?

(2) Même question avec l'application  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g(0, 0) = 0$  et  $g(x, y) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}$  pour  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.4.** — Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(0, 0) = 0$  et  $f(x, y) = \frac{y \exp(-\frac{1}{x^2})}{y^2 + \exp(-\frac{2}{x^2})}$  pour  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Montrer que  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ , mais que toutes ses dérivées directionnelles en  $(0, 0)$  existent.

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.5.** — Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(0, 0) = 0$  et  $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$  pour  $(x, y) \neq (0, 0)$ . L'application  $f$  est-elle continue en  $(0, 0)$  ? Calculer ses dérivées partielles sur  $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ . Déterminer ses dérivées directionnelles en  $(0, 0)$  quand elles existent. Démontrer que  $f$  n'est pas différentiable en  $(0, 0)$ ; en déduire que les dérivées partielles  $\partial_1 f$  et  $\partial_2 f$  ne sont pas continues en  $(0, 0)$ .

Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  étudier la continuité des fonctions  $x \mapsto \partial_1 f(x, b)$ ,  $x \mapsto \partial_2 f(x, b)$ ,  $x \mapsto \partial_1 f(a, y)$  et  $x \mapsto \partial_2 f(a, y)$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.6.** — Étudier la différentiabilité de l'application  $f$  dans les cas suivants :

$$(1) \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ où } f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

$$(2) \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ où } f(x, y) = (x + y)^2 \ln(|x| + |y|) \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

$$(3) \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ où } f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0.$$

$$(4) \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ où } f(x, y) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y} \text{ si } x \neq y \text{ et } f(x, x) = \cos x.$$

$$(5) \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ où } f(x, y) = y^2 \sin \frac{x}{y} \text{ si } y \neq 0 \text{ et } f(x, 0) = 0.$$

$$(6) \quad f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ où } f(x, y, z) = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \text{ si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \text{ et } f(0) = 0.$$

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.7.** — Soit  $\Omega$  un ouvert d'un espace de Banach,  $A : \Omega \rightarrow GL(E)$  et  $B : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(E)$  deux applications différentiables. On fixe  $y \in E$  et on considère l'application  $C : \Omega \rightarrow E$  définie par

$$C(x) = (A(x)^{-1} \circ B(x) \circ A(x)).y + x .$$

Sans chercher à justifier la différentiabilité de  $C$ , calculer  $DC(x).h$  pour tout  $h \in E$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.8.** — Soit  $E = \mathbb{R}^n$  muni de sa base canonique.

(1) Calculer la différentielle du déterminant  $\det : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

(2) On fixe  $(a_1, \dots, a_n) \in E$  et on définit une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{vmatrix} a_1 + x & x & \cdots & x \\ x & a_2 + x & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & a_n + x \end{vmatrix}.$$

Calculer  $f'(x)$  et  $f''(x)$ . En déduire  $f(x)$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.9.** — Montrer que  $\det : GL(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable de différentielle en  $u$  donnée par

$$\forall h \in \text{End}(\mathbb{R}^n) \quad (D(\det)(u).h = \det(u)\text{tr}(u^{-1} \circ h))$$

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.10.** — On note  $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application diagonale et  $\Delta$  son image, la diagonale de  $\mathbb{R}^2$ .

(1) Résoudre l'équation  $\partial_1 f + \partial_2 f = 0$  en  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  après avoir calculé la dérivée de  $f \circ \delta$ .

(2) Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ . On définit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par  $f(x, y) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y}$  si  $(x, y) \notin \Delta$  et par  $f \circ \delta = g'$ . Montrer que  $f$  est différentiable et calculer sa différentielle.

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.11.** — Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une application différentiable. Pour tout réel  $t$  on définit  $\varphi(t) = f(t, f(t, f(t, t)))$ . Calculer  $\varphi'(t)$  en fonction des dérivées partielles de  $f$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.12.** — Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^\infty$  telle que

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k)}(0) = 0 .$$

Montrer que  $g(x) = \frac{f(x)}{x^{k+1}}$  pour  $x \neq 0$  et  $g(0) = \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(0)$  définit une fonction de classe  $C^\infty$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.13.** — (1) Montrer que la fonction  $u$  définie par  $u(t) = \exp(-\frac{1}{t})$  pour  $t > 0$  et  $u(t) = 0$  pour  $t \leq 0$  est de classe  $C^\infty$  et plate en 0 (toutes ses dérivées s'annulent en 0). Est-elle analytique ? (c'est à dire développable localement en tout point en série entière)

(2) Soit  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $\varphi(x) = 1 - \|x\|^2$  où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ . Construire à l'aide de  $\varphi$  et de  $u$  une fonction réelle de classe  $C^\infty$  définie sur  $\mathbb{R}^n$  qui soit non-nulle à support compact.

(3) Trouver une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$  constante égale à 1 sur la boule unité  $B(0, 1)$  et dont le support est inclus dans la boule  $B(0, 2)$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.14.** — (1) Montrer qu'une norme n'est jamais différentiable en l'origine.

(2) Montrer que  $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  qui associe à chaque vecteur  $x = (x_1, \dots, x_n)$  sa "norme 1"  $N(x) = |x_1| + \dots + |x_n|$  est différentiable en  $x$  si et seulement si aucune des coordonnées de  $x$  n'est nulle ; calculer ses dérivées partielles en précisant leur domaine de définition.

(3) Même question pour la norme  $N_\infty(x_1, \dots, x_n) = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.15.** — On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne usuelle. Soit  $a = (a_1, \dots, a_n) \neq 0$ . On considère la fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  par :

$$f(x) = \langle a|x \rangle e^{-\|x\|^2} = \left( \sum_{i=1}^n a_i x_i \right) \exp \left( - \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) .$$

Montrer que  $f$  est différentiable et calculer sa différentielle :

- en utilisant les dérivées partielles de  $f$ .
- sans utiliser les applications coordonnées, si bien que le résultat passe tel quel sur un espace pré hilbertien réel ( $f$  est définie sur un tel espace).

Déterminer les points critiques de  $f$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.16.** — Soit  $E$  un espace vectoriel normé . On considère l'application  $\varphi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$  définie par  $\varphi(A) = A^n = \overbrace{A \circ \dots \circ A}^{n \text{ fois}}$ . Montrer que  $\varphi$  est différentiable et calculer  $D\varphi(A).H$  pour  $A$  et  $H \in \mathcal{L}(E)$  (*conseil* : commencer par  $n = 1, 2, 3$ ).

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.17.** — On munit  $\mathbb{R}^n$  de la norme euclidienne  $\|\cdot\|$ . Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow B(0, 1)$ , où  $B(0, 1)$  désigne la boule unité de  $\mathbb{R}^n$ , l'application définie par  $f(x) = \tanh(\|x\|) \frac{x}{\|x\|}$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ .

Montrer que  $f$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.18.** — (examen septembre 03) On suppose que  $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  est harmonique, i.e.  $f$  vérifie l'équation

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = 0.$$

On introduit la fonction  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  définie par :

$$F(x, y) = (x^3 - 3y^2x, -y^3 + 3yx^2).$$

- (1) Montrer que la fonction  $f \circ F$  est encore harmonique.

- (2) On introduit les coordonnées polaires sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \geq 0\}$  :

$$(r, \theta) \in ]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[ \mapsto P(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

- (3) On dispose ainsi d'un difféomorphisme réciproque

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \geq 0\} \mapsto (r(x, y), \theta(x, y)).$$

Exprimer en fonction de  $x, y, r(x, y)$  les dérivées partielles :  $\frac{\partial}{\partial x} r, \frac{\partial}{\partial y} r, \frac{\partial}{\partial x} \theta, \frac{\partial}{\partial y} \theta, \frac{\partial^2}{\partial x^2} r, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} r, \frac{\partial^2}{\partial y^2} r, \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \theta, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \theta$ .

- (4) Montrer que  $u = f \circ P$  vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} u + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u = 0.$$

- (5) Montrer que sur  $]0, \infty[ \times ]0, 2\pi/3[$ , on a  $F \circ P(r, \theta) = P(r^3, 3\theta)$ .

(6) Vérifiez par le calcul que la fonction  $v : (r, \theta) \in ]0, \infty[ \times ]0, 2\pi/3[ \mapsto u(r^3, 3\theta)$  est solution de l'équation trouvée en 2 pour  $u$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

### Exercices sur les fonctions implicites et l'inversion locale

**Exercice 2.19.** — Soit  $k$  une constante strictement positive et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^1$  supposée  $k$  dilatante, i.e.

$$\|f(x) - f(y)\| \geq k\|x - y\|,$$

pour tout  $x, y$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

(1) Montrer que  $f$  est injective et que  $f(\mathbb{R}^n)$  est un fermé de  $\mathbb{R}^n$  (on pourra raisonner sur les suites).

(2) Montrer que la différentielle  $df(x)$  est inversible pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

(3) Montrer, grâce au théorème de l'inversion local que  $f(\mathbb{R}^n)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  ; en déduire que  $f$  est un  $C^1$  difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  sur lui-même.

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.20.** — Soit  $U$  le plan privé de l'origine et  $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ . Montrer que  $f$  est un difféomorphisme au voisinage de chacun des points de  $U$  mais qu'il n'est pas un difféomorphisme global. Expliciter des ouverts  $V$ , aussi large que possible tel que  $f$  soit un difféomorphisme de  $V$  sur  $f(V)$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.21.** — Soit  $f(x) = x + x^2 \sin \frac{\pi}{x}$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ . Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et que  $f'(0) = 1$ , mais que  $f$  n'est inversible sur aucun voisinage de 0. Que se passe-t-il ? (On pourra comparer les valeurs prises par  $f$  aux points  $x = 1/k, x = 1/(k+1)$  et  $x = 1/(k+0.5)$ .)

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.22.** — (1) Deviner deux solutions particulières  $u, v$  de l'équation aux dérivées partielles, à inconnue  $f$

$$(y - z) \frac{\partial}{\partial x} f + (z - x) \frac{\partial}{\partial y} f + (x - y) \frac{\partial}{\partial z} f = 0.$$

(2) Si  $w$  est une autre fonction de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  tel que  $(u, v, w)$  soit un système de coordonnées locales alors écrire l'équation précédente dans ces coordonnées et en déduire sa solution générale.

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.23.** — Soit  $C$  l'ensemble des  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  tels que

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

- (1) Cette équation définit-elle  $y$  comme fonction implicite de  $x$  ?
- (2) Lorsque cette fonction existe calculer sa dérivée.
- (3) Répondez aux mêmes questions à propos de  $x$  comme fonction implicite de  $y$ .
- (4) Dessinez  $C$  et précisez les asymptotes. (paramétrer  $C$  à l'aide de  $t$  tel que  $y = tx$ )
- (5)  $C$  et  $C - \{(0, 0)\}$  sont-ils des sous-variétés de dimension 1 de  $\mathbb{R}^2$  ?

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.24.** — On se propose de tracer la cubique  $\mathcal{C}$  d'équation  $f(x, y) = y^3 + 6xy - 3x^2 - 9y = 0$  dans  $\mathbb{R}^2$  et de déterminer les extremums de la fonction  $f$ .

(1) Montrer que  $f$  est  $C^\infty$ . Déterminer et dessiner les ensembles  $X_i = \{(x, y) \mid (\partial_i f)(x, y) = 0\}$  pour  $i = 1$  et  $2$ .

Préciser les valeurs critiques de  $f$  et en déduire que  $\mathcal{C}$  n'a que des points réguliers.

(2) Déterminer les points d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec l'axe des  $y$  et avec la droite d'équation  $y = 3$ , ainsi que les points de  $\mathcal{C}$  à tangente horizontale. En utilisant le théorème des fonctions implicites, faire une étude locale de  $\mathcal{C}$  au voisinage des six points trouvés ; illustrer par des dessins.

(3) Montrer que les points de  $\mathcal{C}$  à tangente verticale sont les points d'intersections des deux coniques d'équations  $y^2 + 2x - 3 = 0$  et  $3x^2 - 4xy + 6y = 0$ . Tracer ces deux coniques. Préciser la position des points d'intersections par rapport aux axes et à la première bissectrice, et faire une étude locale de  $\mathcal{C}$  en ces points.

(4) Montrer que la droite d'équation  $y = 1$  ne coupe pas  $\mathcal{C}$ . En déduire que  $\mathcal{C}$  n'est pas connexe.

(5) Montrer que  $\mathcal{C} \cap \mathbb{R} \times ]1, +\infty[$  et  $\mathcal{C} \cap \mathbb{R} \times ]-\infty, 1[$  sont deux fermés de  $\mathbb{R}^2$ .

(6) Montrer que pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}$  l'intersection  $\mathcal{C} \cap K \times \mathbb{R}$  est bornée dans  $\mathbb{R}^2$ .

(7) En déduire que  $\mathcal{C} \cap \mathbb{R} \times ]1, +\infty[$  est le graphe d'une fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ .

(8) Montrer que  $\mathcal{C} \cap \mathbb{R} \times ]1, +\infty[$  admet quand  $x \rightarrow +\infty$  et quand  $x \rightarrow -\infty$  des branches paraboliques dans la direction de  $Ox$ .

(9) Montrer que  $\mathcal{C} \cap \mathbb{R} \times ]-\infty, 1[$  est une courbe compacte (on se souviendra que la courbe  $\mathcal{C}$  est une cubique et que, par suite, toute droite la coupe en au plus trois points).

(10) Esquisser le dessin de  $\mathcal{C}$ .

(11) Déterminer les extremums de  $f$  et les indiquer sur le dessin de  $\mathcal{C}$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

## Exercices sur les surfaces.

**Exercice 2.25.** — Décider si les sous-ensembles définis ci-dessous sont des surfaces de  $\mathbb{R}^3$  :

- (1)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1\}$  (Pensez à l'identité d'Euler)
- (2)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, R^4 - 12R^2 + 20x^2 + 16 = 0, R^2 = x^2 + y^2 + z^2\}$
- (3)  $\{\cos t(2 + \cos s), \sin t(2 + \cos s), \sin s\} ; (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$
- (4)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 = z^2\}$

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.26.** — On considère dans  $\mathbb{R}^3$  l'ensemble  $S = \{(x, p, q) \in \mathbb{R}^3, x^3 + px + q = 0\}$

- (1) Montrer que  $S$  est une surface de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer son plan tangent en  $O$ .
- (2) Soit  $h : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ , l'application définie par  $h(x, p, q) = (p, q)$ . Déterminer l'ensemble  $C$  des points de  $S$  où  $h$  ne définit pas des coordonnées locales de  $S$ .
- (3) Représenter dans le plan  $Opq$  le lieu des zéros du discriminant  $\Delta(p, q) = 4p^3 + 27q^2$  ; est-ce une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$  ? Quel lien y-a-t-il entre ce lieu et la courbe  $C$  ?

Indications ★ ; Corrigé : ★

### Exercices sur les calculs d'intégrales et d'aires.

**Exercice 2.27.** — Soit  $f$  une application  $C^1$  d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $1 < n$ . Montrer que si  $P$  est un intervalle compact de  $U$ , alors  $f$  est lipschitzienne sur  $P$ , en déduire que la mesure de  $f(P)$  est nulle (découper  $P$  en  $k$  intervalles égaux, et montrer que la mesure de l'image de ces intervalles est majorée par  $C(|P|/k)^n$ ). En déduire que  $f(U)$  est de mesure nulle.

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.28.** — (examen septembre 02)

On note  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ , la boule unité de  $\mathbb{R}^3$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^3$ . On introduit les coordonnées sphériques

$$P : ]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[ \times ]-\pi/2, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}^3$$

où

$$P(r, \theta, \phi) = (r \cos \theta \cos \phi, r \sin \theta \cos \phi, r \sin \phi)$$

(1) Montrer que  $P$  réalise un difféomorphisme de  $]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[ \times ]-\pi/2, \pi/2[$  sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z), x \in \mathbb{R}_+, z \in \mathbb{R}\}$ .

(2) Énoncer le théorème de changement de variable en intégration.

(3) En déduire le volume de  $B$  ainsi que  $\int_B (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ .

(4) Montrer que les trois intégrales  $\int_B x^2 dx dy dz$ ,  $\int_B y^2 dx dy dz$  et  $\int_B z^2 dx dy dz$  sont égales. En déduire leurs valeurs.

(5) Soit  $A$  une matrice symétrique  $3 \times 3$  à coefficients réels et  $q(v) = \langle Av, v \rangle$  la forme quadratique associée. Exprimer  $\int_B q(x, y, z) dx dy dz$  en fonction de la trace de la matrice  $A$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.29.** — Sur  $\mathbb{R}^3$ , on introduit les coordonnées cylindriques

$$P : ]0, \infty[ \times ]-\pi, \pi[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

où

$$P(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

(1) Montrer que  $P$  réalise un difféomorphisme de  $]0, \infty[ \times ]-\pi, \pi[ \times \mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z), x \in \mathbb{R}_-, z \in \mathbb{R}\}$ .

(2) Énoncer le théorème de changement de variable en intégration.

(3) En déduire le volume de l'ensemble  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x^2 + y^2 + z^2 < 1 \text{ et } x^2 + y^2 < x\}$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.30.** — On considère

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq (1 - z)^{-2} \text{ et } z < 0\}$$

et

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = (1 - z)^{-2} \text{ et } z < 0\}$$

(1) Montrer que l'application  $C : \mathbb{R}_+^* \times ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3, x > 0\}$  définie par  $C(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$  est un  $C^\infty$  difféomorphisme (les coordonnées cylindriques).

(2) A l'aide des coordonnées cylindriques, montrer que le volume de  $D$  est fini.

(3) Montrer que  $\Sigma$  est une surface  $C^\infty$  dans l'ouvert  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z < 0\}$ .

(4) Toujours, à l'aide des coordonnées cylindriques, donner une paramétrisation de  $\Sigma \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3, x > 0\}$ .

(5) Calculer l'aire de  $\Sigma \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -R < z < 0\}$ . En déduire que l'aire de  $\Sigma$  est infini.

On a donc trouvé un domaine de  $\mathbb{R}^3$ , qu'on peut remplir d'un volume fini de peinture alors que sa surface est infini.

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.31.** — Calculer l'intégrale  $\int_D f(x, y) dx dy$  dans les cas suivants :

(1)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1, y > 1, x + y < 3\}$  et  $f(x, y) = \frac{1}{(x + y)^3}$ .

(2)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y, y > x^2\}$  et  $f(x, y) = x \sin y$ .

(3)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < xy < 2, x^2 < y < 2x^2\}$  et  $f(x, y) = x^3 + y^3$ .

(4)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x < 0\}$  et  $f(x, y) = xy(x^2 + y^2)$ .

(5)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, 1 < (x - 2)^2 + y^2 < 4\}$  et  $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2 - 4x + 4)$ .

(6)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 1, x - y > 0, 4(x - 1)^2 + 9(y - 1)^2 < 36\}$  et  $f(x, y) = xy$ .

(7)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, x + y > 1\}$  et  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$ .

(8)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$  et  $f(x, y) = \frac{1}{(1 + x)(1 + xy^2)}$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.32.** — Soit  $a$  un nombre positif.

(1) Calculer  $\int_0^{2a} \left( \int_0^{\sqrt{2ax - x^2}} (x^2 + y^2) dy \right) dx$ .

(2) Calculer l'aire du domaine délimité par la cardioïde d'équation (en polaires)  $\rho = a(1 + \cos \theta)$ .

(3) Même question avec la lemniscate d'équation  $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ .

(4) Calculer le volume du domaine commun aux deux cylindres d'équation  $x^2 + y^2 = a^2$  et  $x^2 + z^2 = a^2$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.33.** — Calculer l'aire de la sphère de rayon unité des deux manières suivantes :

– en utilisant la projection stéréographique :  $\pi(x, y, z) = (x/(1 - z), y/(1 - z))$

– en utilisant les coordonnées sphériques.

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 2.34.** — Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^{*+}$  une fonction de classe  $C^r$ . Montrer que l'équation

$$x^2 + y^2 = f(z)^2$$

définit une surface de classe  $C^r$  et exprimer son aire en fonction de  $f$ .

Retrouver ainsi l'aire du tore d'équation  $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.1.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.2.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.3.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.4.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.5.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.6.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.7.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.8.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.9.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.10.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.11.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.12.* — Utiliser le développement de Taylor de  $f$  à l'ordre  $k$  en 0 avec reste intégral.

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.13.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.14.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.15.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.16.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.17.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.18.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.19.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.20.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.21.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.22.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.23.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.24.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.25.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.26.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.27.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.28.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.29.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.30.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.31.* — Pour la dernière intégrale : on pourra justifier le changement de variables  $x = u^2$  et  $y = \frac{u}{v}$

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.32.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.33.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 2.34.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Corrigé exercice 2.1.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.2.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.3.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.4.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.5.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.6.* — (1) non-différentiable en  $(0, 0)$

(2) non-différentiable en  $(x, y)$  avec  $xy = 0$  sauf en  $(0, 0)$ .

(3) différentiable de différentielle nulle en 0.

(4) différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ .

(5) différentiable en  $(x, 0)$  de différentielle nulle.

(6) non-différentiable en 0.

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.7.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.8.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.9.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.10.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.11.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.12.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.13.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.14.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.15.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.16.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.17.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.18.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.19.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.20.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

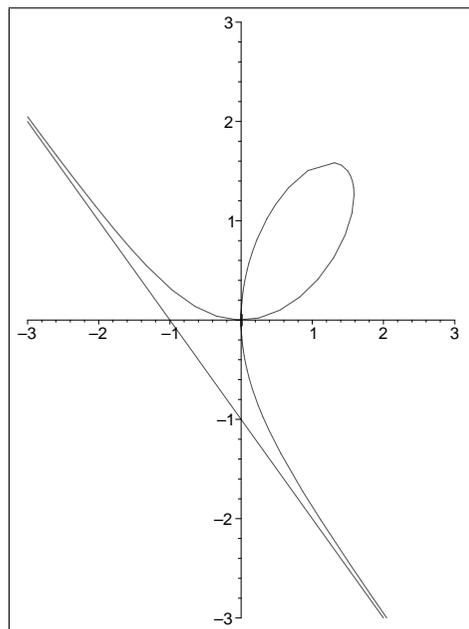
*Corrigé exercice 2.21.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.22.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

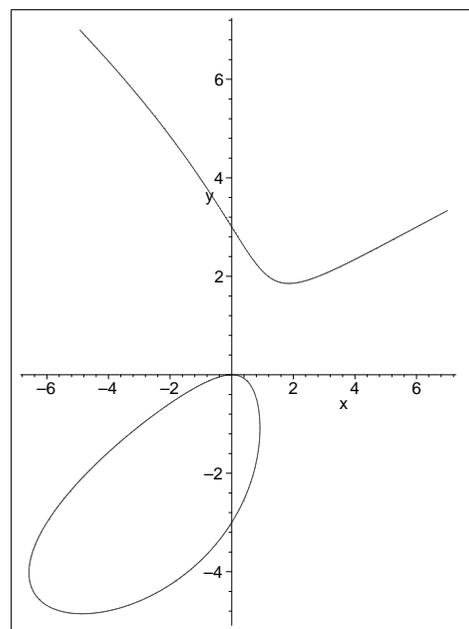
Exercice : ★ ; Indication : ★



*Corrigé exercice 2.23.* —

Le folium de Descartes

Exercice : ★ ; Indication : ★



*Corrigé exercice 2.24.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.25.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.26.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.27.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.28.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.29.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.30.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.31.* — (1)  $\frac{1}{36}$

(2)  $1 - \frac{\sin 1}{2} - \cos 1$

(3)  $\frac{37}{36}$

(4) 0

(5)  $\frac{\pi}{2}(\sin 4 - \sin 1)$

(6)  $3 \arctan \frac{3}{2} + \frac{10}{\sqrt{13}} + \frac{185}{26}$

(7)  $\frac{1}{2}$

(8)  $\frac{\pi^2}{16}$

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.32.* — (1)  $\frac{3}{4}a^4\pi$

(2)  $\frac{3a^2\pi}{2}$

$$(3) a^2$$

$$(4) \frac{16}{3}a^3$$

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.33.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 2.34.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

## Équations différentielles

### 3.1. Rappel sur le cours de licence.—

#### 3.1.1. Le théorème de Cauchy-Lipschitz. —

**Théorème 3.1.** — Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in C^0(I \times U, \mathbb{R}^n)$  localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable  $x \in U$ . Alors pour tout  $(t_0, x_0) \in I \times U$ , il existe  $J \subset I$  un intervalle contenant  $t_0$  et  $c : J \rightarrow U$  une courbe  $C^1$  tels que :

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}c(t) = f(t, c(t)) , \forall t \in J \\ c(t_0) = x_0 \end{cases} .$$

De plus ce couple  $(J, c)$  est unique au sens où si  $\tilde{c}$  est une courbe  $C^1$  de  $U$  définie sur  $\tilde{J}$  un intervalle contenant  $t_0$  tel que sur  $\tilde{J}$ ,  $\tilde{c}$  vérifie (7) alors

$$\forall t \in J \cap \tilde{J}, c(t) = \tilde{c}(t).$$

**Remarque 3.2.** — L'hypothèse "localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable" signifie que pour tout  $(t, x) \in I \times U$ , on trouve  $\mathcal{O}$  un voisinage de  $(t, x)$  et  $k \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall (s, y_1) \in \mathcal{O}, \forall (s, y_2) \in \mathcal{O}, \|f(s, y_1) - f(s, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|.$$

C'est par exemple le cas des fonctions  $f \in C^1(I \times U, \mathbb{R}^n)$ . Cette hypothèse est fondamentale pour avoir l'unicité : par exemple le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = 2\sqrt{x(t)} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

a une infinité de solutions sur  $\mathbb{R}$  : si  $a \geq 0$  alors la fonction  $C^1$  définie par

$$x_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ (t-a)^2 & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

en est bien solution.

#### 3.1.2. Solutions maximales. —

**Définition 3.3.** — Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz alors pour tout  $(t_0, x_0) \in I \times U$ , il existe une unique solution maximale  $(J, c)$  de (7). Au sens où si  $(\tilde{J}, \tilde{c})$  est une autre solution de (7) alors  $\tilde{J} \subset J$  et donc  $c = \tilde{c}$  sur  $\tilde{J}$ .

Par exemple : sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , on considère la fonction  $f(t, x) = -x^2$ . La solution maximale de

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -x(t)^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

est

$$c(t) = \frac{x_0}{1 + x_0(t - t_0)}$$

définie sur  $\mathbb{R}$  si  $x_0 = 0$  ou sur  $]t_0 - \frac{1}{x_0}, +\infty[$  si  $x_0 > 0$  ou encore sur  $] -\infty, t_0 - \frac{1}{x_0}[$  si  $x_0 < 0$ .

3.1.3. Dépendance par rapport aux conditions initiales.— Plaçons nous encore dans le cadre des hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz et soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  une solution de  $\dot{\gamma}(t) = f(t, \gamma(t))$ .

**Proposition 3.4.** — Si  $t_0 \in ]a, b[$  et  $x_0 = \gamma(t_0)$  alors il existe  $\delta > 0$  tel que la solution maximale de

$$\frac{d}{dt}c(t) = f(t, c(t))$$

vérifiant les conditions initiales :

$$c(s) = x$$

où  $|s - t_0| \leq \delta$  et  $\|x - x_0\| \leq \delta$  soit définie sur l'intervalle  $[a, b]$ . De plus si on note  $\gamma_{t_0, x_0} : J_{t_0, x_0} \rightarrow U$  la solution maximale de (7) alors l'application :

$$\begin{aligned} ]a, b[ \times ]t_0 - \delta, t_0 + \delta[ \times B(x_0, \delta) &\rightarrow U \\ (s, t, x) &\rightarrow \gamma_{t, x}(s) \end{aligned}$$

est continue.

Ceci permet d'affirmer que

$$\Omega = \bigcup_{(t_0, x_0) \in I \times U} J_{t_0, x_0} \times \{(t_0, x_0)\}$$

est un ouvert de  $\mathbb{R} \times I \times U$  et que l'application

$$(8) \quad \begin{aligned} \Phi : \Omega &\rightarrow U \\ (s, t, x) &\rightarrow \Phi(s, t, x) = \gamma_{t, x}(s) \end{aligned}$$

est continue.

De plus, on a

$$J_{t_0, x_0} = J_{(t, \Phi(t, t_0, x_0))}$$

et sur cette intervalle

$$\Phi(\tau, t_0, x_0) = \Phi(\tau, t, \Phi(t, t_0, x_0))$$

car la solution maximale passant par  $\gamma_{t_0, x_0}(t)$  au temps  $t$  est bien sur :  $\tau \mapsto \gamma_{t_0, x_0}(\tau)$ .

**3.1.4. Explosion en temps fini.** — On se place toujours dans le cadre des hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz et on suppose que

$$\gamma : ]t_-, t_+[ \rightarrow U$$

est une solution maximale de  $x' = f(t, x)$  alors

**Proposition 3.5.** — - soit  $t_+ \in \partial I \cup \{+\infty\}$

- soit  $t_+ \in I$  et alors pour tout compact de  $K \subset U$ , il y a un temps  $t_K \in ]t_-, t_+[$  tel que sur  $]t_K, t_+[$ , cette solution maximale ne soit pas dans  $K$ , c'est à dire :

$$\forall s > t_K, \gamma(s) \notin K.$$

*Démonstration.* — En effet supposons que sous l'hypothèse  $t_+ \in I$ , la conclusion ne soit pas vraie alors on trouve une suite  $(t_l)_l$  convergent vers  $t_+$  tel que l'image de cette suite par  $\gamma$  reste dans le compact  $K$  :

$$\gamma(t_l) \in K, \quad \forall l.$$

Puisque  $K$  est compact, on peut extraire de cette suite une sous suite convergente

$$\lim_l \gamma(t_{n(l)}) = x_\infty \in K.$$

Soit  $c : J \rightarrow U$  la solution maximale de

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} c(t) = f(t, c(t)) \quad \forall t \in J \\ c(t_+) = x_\infty \end{cases}$$

supposons que  $[t_+ - \eta, t_+ + \eta] \subset J$  alors grâce à la proposition 3.4, on sait que pour un réel  $\delta > 0$  la solution maximale de

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = f(t, x(t)) \\ x(s) = x \end{cases}$$

où  $|t_+ - s| \leq \delta$  et  $\|x - x_\infty\| \leq \delta$  est définie sur  $[t_+ - \eta, t_+ + \eta]$ . En particulier pour  $l$  assez grand on a bien  $|t_+ - t_{n(l)}| \leq \delta$  et  $\|\gamma(t_{n(l)}) - x_\infty\| \leq \delta$  donc la solution maximale de

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_{n(l)}) = \gamma(t_{n(l)}) \end{cases}$$

qui est exactement  $\gamma : ]t_-, t_+[ \rightarrow U$  est définie sur  $[t_+ - \eta, t_+ + \eta]$ . Ce qui n'est pas possible car  $\gamma$  est la solution maximale : elle ne peut être prolongé au delà de  $t_+$  en une solution de  $\dot{x} = f(t, x)$ .  $\square$

**Remarque 3.6.** — Il y a évidemment un énoncé analogue pour  $t_-$ .

On utilise souvent les corollaires suivants :

**Corollaire 3.7.** — Si  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et si  $\gamma : ]t_-, t_+[ \rightarrow U$  est une solution maximale de  $\dot{x} = f(t, x)$  et  $t_+ < \infty$  alors

$$\lim_{t \rightarrow t_+} \|\gamma(t)\| = \infty.$$

Ou par contraposition, si on sait que  $\gamma([t_0, t_+])$  est un ensemble borné de  $\mathbb{R}^n$  alors  $t_+ = +\infty$ .

**Corollaire 3.8.** — Si  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1$  est telle que pour des constantes  $\alpha, \beta$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|X(x)\| \leq \alpha\|x\| + \beta$$

alors les solutions maximales de

$$\frac{d}{dt}x(t) = X(x(t))$$

sont définies sur  $\mathbb{R}$ .

Pour montrer ce deuxième corollaire, on utilise le lemme de Gronwall :

**Lemme 3.9.** — Si  $u : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  vérifie :

$$u(t) \leq B + A \int_a^t u(s) ds$$

alors

$$\forall t \in [a, b[, u(t) \leq B e^{A(t-a)}.$$

Et son corollaire immédiat :

**Corollaire 3.10.** — Si  $y : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  est  $C^1$  et vérifie :

$$\|\dot{y}(t)\| \leq \beta + \alpha\|y(t)\|$$

alors

$$\forall t \in [a, b[, \|y(t)\| \leq (\beta(b-a) + \|y(a)\|) e^{\alpha(b-a)}.$$

On montre d'abord le lemme de Gronwall (3.9) :

*Démonstration.* — Si  $U(t) = B + A \int_a^t u(s) ds$  alors  $U$  est  $C^1$  et vérifie :

$$U'(t) = Au(t) \leq AU(t)$$

ainsi la fonction  $t \mapsto e^{-A(t-a)}U(t)$  a sa dérivée négative, c'est une fonction décroissante donc  $e^{-A(t-a)}U(t) \leq U(a) = B$ , d'où

$$u(t) \leq U(t) \leq B e^{A(t-a)}.$$

□

Le corollaire (3.10) est une application du lemme de Gronwall (3.9) appliqué à

$$\begin{aligned} u(t) = \|y(t)\| &= \left\| y(a) + \int_a^t \dot{y}(s) ds \right\| \\ &\leq \|y(a)\| + \int_a^t \|\dot{y}(s)\| ds \\ &\leq \|y(a)\| + \beta(b-a) + \int_a^t \alpha\|y(s)\| ds. \end{aligned}$$

On peut maintenant démontrer le corollaire (3.8) :

*Démonstration.* — Soit donc  $\gamma : ]t_-, t_+[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  une solution maximale de  $\dot{x} = X(x)$ . Soit  $t_0 \in ]t_-, t_+[$ . On sait donc que

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \|X(\gamma(t))\| \leq \alpha\|\gamma(t)\| + \beta.$$

Grâce au lemme de Gronwall (3.10), on obtient que sur  $]t_-, t_+[$

$$\|\gamma(t)\| \leq (\|\gamma(t_0)\| + \beta|t - t_0|) e^{\alpha|t - t_0|}.$$

Ainsi on doit forcément avoir  $t_{\pm} = \pm\infty$  car dans le cas contraire on doit avoir :

$$\limsup_{t \rightarrow t_{\pm}} \|\gamma(t)\| \leq (\|\gamma(t_0)\| + \beta|t_{\pm} - t_0|) e^{\alpha|t_{\pm} - t_0|} < \infty.$$

Ce qui est en contradiction avec le corollaire 3.7. □

Une application de ce corollaire concerne les équations différentielles linéaires :

**Proposition 3.11.** — Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension finie et  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  si  $A : I \rightarrow \text{End}(E)$  est continue à valeurs dans les endomorphismes de  $E$ , alors les solutions maximales de

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t).x(t)$$

sont définies sur  $I$ .

**Corollaire 3.12.** — Si  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une application  $C^2$  propre alors la solution maximale de

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

est définie sur  $[t_0, \infty[$ .

La définition d'application propre a été donnée en (2.4) : pour tout  $M > 0$  alors  $V^{-1}(]-\infty, M])$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$ . Le gradient de  $V$  est défini par

$$\overrightarrow{\text{grad}} V(x) = \left( \frac{\partial V(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right).$$

Ce vecteur de  $\mathbb{R}^n$  est caractérisé par le fait que :

$$\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n, DV(x) \cdot (\vec{h}) = \langle \overrightarrow{\text{grad}} V(x), \vec{h} \rangle.$$

On peut maintenant prouver ce corollaire

*Démonstration.* — Soit donc  $x : ]t_-, t_+[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  une solution maximale de

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x(t) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

On sait que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= DV(x(t)) \cdot \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) \\ &= -\langle \overrightarrow{\text{grad}} V(x(t)), \overrightarrow{\text{grad}} V(x(t)) \rangle \\ &= -\|\overrightarrow{\text{grad}} V(x(t))\|^2. \end{aligned}$$

Où la norme est ici la norme euclidienne. En particulier la fonction  $t \mapsto V(x(t))$  décroît et donc sur  $[t_0, t_+[$  nous avons :

$$V(x(t)) \leq V(x_0).$$

C'est à dire que sur  $[t_0, t_+[$ ,  $x$  prend ses valeurs dans le compact  $V^{-1}(]-\infty, V(x_0)])$ , la seconde possibilité de la proposition 3.5 n'est pas satisfaite et donc  $t_+ = +\infty$ .  $\square$

Par exemple, sur  $\mathbb{R}$  on considère la fonction  $V(x) = x^4/8$  cette fonction est bien  $C^2$ , propre et l'équation associée est  $\dot{x} = -x^3/2$ ,  $x(t_0) = x_0$ , dont les solutions vérifient :

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{x(t)^2} = 0$$

d'où

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + (t - t_0)x_0^2}}, \quad t \in ]t_0 - x_0^{-2}, +\infty[.$$

### 3.2. Différentiabilité par rapport aux conditions initiales. —

Dans ce cours, on ne considérera que des équations différentielles  $\dot{x} = f(t, x)$  où la fonction  $f$  ne dépend pas du temps : on parle alors d'équations différentielles autonomes. De plus la fonction  $f$  sera toujours (au moins) de classe  $C^1$ .

*3.2.1. Champs de vecteurs et flot.* —  $U$  est ici un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On étudie sur  $\mathbb{R} \times U$ , l'équation différentielle  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  où  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ . On cherche donc les courbes  $C^1$  dont les vitesses sont prescrites par  $f$ . On dit que  $f$  est un champ de vecteurs (ou aussi champ de vitesse) sur  $U$  et une solution de  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  est aussi appelé courbe intégrale du champ de vecteurs  $f$ . Si  $\Phi$  est l'application définie précédemment en (8), alors on a

$$\Phi(t, t_0, x_0) = \Phi(t - t_0, 0, x_0).$$

En effet le fait que  $f$  ne dépendent pas du temps implique que si  $c : ]t_-, t_+[ \rightarrow U$  est une solution de

$$\dot{c}(t) = f(c(t))$$

alors pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ , la fonction  $c_\tau$  définie sur  $]t_- - \tau, t_+ - \tau[$  par  $c_\tau(t) = c(t + \tau)$  est encore une courbe intégrale de  $f$ . On notera

$$\phi^t(x) := \Phi(t, 0, x),$$

$\phi^t(x)$  est donc la valeur au temps  $t$  de la solution maximale de

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x;$$

c'est une application continue sur l'ouvert

$$\tilde{\Omega} = \{(t, x), (t, 0, x) \in \Omega\}.$$

Et on a

$$\phi^{t+s}(x) = \phi^t(\phi^s(x))$$

au sens où dès que l'un des deux membres de cette égalité est définie alors le second l'est aussi et il y a égalité. On dit que l'application  $\phi$  est le **flot** du champ de vecteur  $f$ .

3.2.2. Différentiabilité par rapport aux conditions initiales. —

**Théorème 3.13.** — Si  $X$  est un champ de vecteur  $C^1$ , alors son flot est  $C^1$ .

*Démonstration.* — Nous savons que  $\phi^t(x)$  vérifie l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi^t(x) = X(\phi^t(x)) \\ \phi^0(x) = x \end{cases} .$$

Si on savait que  $\phi$  était une application  $C^1$ , alors en dérivant cette équation par rapport à  $x$  dans la direction de  $h \in \mathbb{R}^n$ , on obtiendrait que  $t \mapsto D_x\phi^t(x).h = D\phi^t(x).h$  vérifierait l'équation :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}D\phi^t(x)h = DX(\phi^t(x))(D\phi^t(x)h) \\ D\phi^0(x)h = h \end{cases} .$$

Soit  $x \in U$  et  $a, b$  des réels avec  $a < 0 < b$  tels que  $\gamma(t) = \phi^t(x)$  soit défini sur  $[a, b]$ . Dans l'espace vectoriel  $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ , l'équation différentielle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}Y(t, x) = DX(\phi^t(x))Y(t, x) \end{array} \right.$$

a une unique solution sur l'intervalle  $[a, b]$  (cf. 3.11). Ce  $Y(t, x)$  est le candidat à être la différentielle de  $\phi^t$  en  $x$ . On va montrer que si  $\varepsilon > 0$ , alors il existe  $\delta > 0$  tel que si  $\|h\| \leq \delta$  alors

$$(9) \quad \|\phi^t(x+h) - \phi^t(x) - Y(t, x)h\| \leq \varepsilon\|h\|.$$

Ceci montrera que  $x \mapsto \phi^t(x)$  est différentiable en  $x$  et que sa différentielle est justement  $Y(t, x)$ . Admettons pour l'instant cette estimation et montrons comment conclure que le flot est  $C^1$ . Fixons un point  $x \in U$  et posons

$$\eta(h) = \max_{t \in [a, b]} \|DX(\phi^t(x+h)) - DX(\phi^t(x))\|$$

et

$$M = \max_{t \in [a, b]} \{\|DX(\phi^t(x))\|\}, \quad N = \max_{t \in [a, b]} \{\|Y(t, x)\|\}.$$

A l'aide du lemme de Gronwall, on montre que pour  $t \in [a, b]$  :

$$\|Y(t, x+h) - Y(t, x)\| \leq \eta(h)N(b-a)e^{(M+\eta(h))(b-a)}.$$

En effet

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Y(t, x+h) - Y(t, x)) &= DX(\phi^t(x+h))Y(t, x+h) - DX(\phi^t(x))Y(t, x) \\ &= [DX(\phi^t(x+h)) - DX(\phi^t(x))]Y(t, x+h) + DX(\phi^t(x))(Y(t, x+h) - Y(t, x)) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt}(Y(t, x+h) - Y(t, x)) \right\| &\leq \eta(h)\|Y(t, x+h)\| + M\|Y(t, x+h) - Y(t, x)\| \\ &\leq \eta(h)\|Y(t, x+h) - Y(t, x)\| + \eta(h)\|Y(t, x)\| + M\|Y(t, x+h) - Y(t, x)\| \\ &\leq (M + \eta(h))\|Y(t, x+h) - Y(t, x)\| + \eta(h)N \end{aligned}$$

Puisque  $[a, b]$  est un intervalle compact, et que  $(t, x) \mapsto DX(\phi^t(x))$  est continue, on sait que

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \eta(h) = 0.$$

Cette estimée avec le fait que  $(t, x) \mapsto Y(t, x)$  est localement lipschitzienne par rapport à la première variable implique que l'application  $(t, x) \mapsto Y(t, x)$  est continue. Puisqu'on sait aussi que  $(t, x) \mapsto \frac{\partial}{\partial t}\phi^t(x)$  est continue, les dérivées partielles de  $\phi$  existent donc et sont continues :  $\phi$  est donc bien de classe  $C^1$ .

Montrons maintenant l'estimation 9. Soit  $r > 0$  tel que

$$\forall t \in [a, b], \quad B(\phi^t(x), 2r) \subset U^{(10)}.$$

Grâce à la continuité du flot on sait qu'il existe  $\rho > 0$  tel que si  $\|h\| \leq \rho$  alors  $\phi^t(x+h)$  est défini pour  $t \in [a, b]$  et

$$\|\phi^t(x+h) - \phi^t(x)\| \leq r.$$

Notons

$$K = \bigcup_{t \in [a, b]} \overline{B(\phi^t(x), r)}$$

c'est l'image du compact  $[a, b] \times \overline{B(0, r)}$  par l'application continue  $(t, v) \mapsto \phi^t(x) + v$ , c'est donc un compact. Notons

$$\kappa = \sup_{y \neq y', y, y' \in K} \frac{\|X(y) - X(y')\|}{\|y - y'\|}$$

<sup>(10)</sup>Démontrer que ce  $r$  existe par l'absurde.

On a pour  $t \in [a, b]$

$$\left\| \frac{d}{dt} (\phi^t(x+h) - \phi^t(x)) \right\| \leq \kappa \|\phi^t(x+h) - \phi^t(x)\|$$

ceci car  $\phi^t(x+h) \in K$ , ainsi on en déduit grâce au lemme de Gronwall que :

$$\|\phi^t(x+h) - \phi^t(x)\| \leq e^{\kappa|t|} \|h\|$$

Ceci sur l'intervalle où  $\phi^t(x+h) \in K$  <sup>(11)</sup>.

Si de plus  $\|h\| \leq r/(N+1)$  alors on a pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $\phi^t(x) + Y(t, x)h \in K$ . On pose alors  $z(t) = \phi^t(x+h) - \phi^t(x) - Y(t, x)h$ . Cette fonction est bien  $C^1$  et sa dérivée vaut :

$$\frac{d}{dt} z(t) = X(\phi^t(x+h)) - X(\phi^t(x)) - DX(\phi^t(x))Y(t, x)h$$

car

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi^t(x) + Y(t, x)h) = X(\phi^t(x)) + DX(\phi^t(x))Y(t, x)h.$$

D'où

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= [X(\phi^t(x+h)) - X(\phi^t(x) + Y(t, x)h)] \\ &\quad - [X(\phi^t(x)) - X(\phi^t(x) + Y(t, x)h) - DX(\phi^t(x))Y(t, x)h] \end{aligned}$$

Si on pose  $\omega(\eta) = \sup_{x, y \in K, \|x-y\| \leq \eta} \|DX(x) - DX(y)\|$ , puisque :

$$\begin{aligned} X(\phi^t(x)) - X(\phi^t(x) + Y(t, x)h) - DX(\phi^t(x))Y(t, x)h &= \\ \int_0^1 [DX(\phi^t(x) + sY(t, x)h) - DX(\phi^t(x))] Y(t, x)h ds & \end{aligned}$$

On obtient

$$\|\dot{z}(t)\| \leq \kappa \|z(t)\| + \omega(N\|h\|)\|h\|.$$

En utilisant encore une fois le lemme de Gronwall, on obtient pour tout  $t \in [a, b]$

$$\|z(t)\| \leq \|h\|\omega(N\|h\|)(b-a)e^{\kappa(b-a)}.$$

Puisque  $DX$  est continue on sait qu'il est uniformément continue sur le compact  $K$  et donc  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \omega(\eta) = 0$ . Ce qui permet d'affirmer que l'inégalité obtenue implique la majoration 9. □

<sup>(11)</sup>En fait, on pourrait montrer que  $\rho = e^{-\kappa|b-a|}r$  convient.

3.2.3. *Différentiabilité d'ordre supérieur.* — Un corollaire facile du théorème précédent est le suivant :

**Corollaire 3.14.** — *Si  $X$  est un champ de vecteur de classe  $C^r$  avec  $r \geq 1$  alors le flot de  $X$  est  $C^r$ .*

*Démonstration.* — On montre ce théorème par récurrence sur  $r$ . On vient de le démontrer pour  $r = 1$ . Supposons ce théorème acquis pour tout les champ de vecteurs de classe  $C^{r-1}$  où  $r > 1$ . Et soit  $X$  un champ de vecteur de classe  $C^r$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On sait donc que  $\phi$  le flot de  $X$  est de classe  $C^{r-1}$  de plus on sait que  $t \mapsto (\phi^t(x), D\phi^t(x))$  est solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = X(x(t)) \\ \dot{Y}(t) = DX(x(t))Y(t). \end{cases}$$

On introduit donc le champ de vecteurs

$$\Xi(x, Y) = (X(x), DX(X)Y)$$

sur  $U \times \text{End}(\mathbb{R}^n)$ . On sait que ce champ de vecteur est de classe  $C^{r-1}$ . Par hypothèse de récurrence, son flot est de classe  $C^{r-1}$ . Si nous notons  $\Psi$  le flot de  $\Xi$ , alors

$$\Psi^t(x, \text{Id}) = (\phi^t(x), D\phi^t(x)),$$

Ainsi  $(t, x) \mapsto D\phi^t(x)$  est bien de classe  $C^{r-1}$  et le flot de  $X$  est bien de classe  $C^r$ , car ces dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $r$  existent et sont continues. □

3.2.4. *Dépendance par rapport à un paramètre.* — On peut aussi de la même façon en déduire

**Corollaire 3.15.** — *Soit  $\Lambda$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On suppose que  $X \in C^r(U \times \Lambda, \mathbb{R}^n)$  est de classe  $C^r$ . Pour chaque  $\lambda \in \Lambda$ , on dispose donc d'un champ de vecteurs  $x \mapsto X(x, \lambda)$  sur  $U$ , on note  $\phi_\lambda$  son flot. Alors l'application  $(t, x, \lambda) \mapsto \phi_\lambda^t(x)$  est de classe  $C^r$ .*

*Démonstration.* — En effet on introduit sur  $U \times \Lambda$ , le champ de vecteur

$$\tilde{X}(x, \lambda) = (X(x, \lambda), 0)$$

Ce champ de vecteurs est bien aussi de classe  $C^r$  et son flot est :

$$(t, x, \lambda) \mapsto (\phi_\lambda^t(x), \lambda) ;$$

puisque ce flot est  $C^r$ , il en est également le cas de l'application  $(t, x, \lambda) \mapsto \phi_\lambda^t(x)$ .  $\square$

Si nous notons  $Y_\lambda(t, x) = D_\lambda \phi_\lambda^t(x) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$  la différentielle de l'application  $(t, x, \lambda) \mapsto \phi_\lambda^t(x)$  par rapport à la variable  $\lambda$ . En différentiant par rapport à  $\lambda$  l'équation

$$\frac{d}{dt} \phi_\lambda^t(x) = X(\phi_\lambda^t(x), \lambda)$$

On obtient l'équation différentielle suivante pour  $Y$  :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} Y(t, x) = (D_x X)(\phi_\lambda^t(x), \lambda) Y(t, x) + (D_\lambda X)(\phi_\lambda^t(x), \lambda) \\ Y(0, x) = 0. \end{cases}$$

3.2.5. *Un exemple : une formule pour la différentielle de l'exponentielle de matrice.* — Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice carrée  $n \times n$ ,

$$e^A = \exp(A) = \sum_{l \geq 0} \frac{A^l}{l!}$$

définit bien une application  $C^\infty$ . En effet on peut montrer que si  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $\mathbb{R}^n$  et si on lui associe suivante sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

et si  $P_l(A) = A^l$  alors la série  $\sum_{l \geq 0} \frac{P_l}{l!}$  converge normalement dans tout les  $C^r(B_R, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$  où  $B_R = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|A\| < R\}$ . On peut remonter ce résultat de façon plus compliquée. Aussi  $t \mapsto e^{tA}$  résout l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} Y(t) = AY(t) \\ Y(t) = \text{Id}. \end{cases}$$

C'est à dire que si sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on considère le champ de vecteurs

$$X_A(Y) = AY,$$

son flot est  $\phi_A^t(Y) = e^{tA}Y$ . Maintenant l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A, Y) &\mapsto AY \end{aligned}$$

est  $C^\infty$  car polynomiale, donc d'après notre résultat l'application  $A \mapsto e^A = \phi_A^1(\text{Id}) = e^A$  est bien  $C^\infty$ . De plus sa différentielle dans la direction de  $H$  est  $Z(1)$  où

$$Z(t) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} e^{t(A+\varepsilon H)}.$$

En dérivant l'identité

$$\frac{d}{dt} e^{t(A+\varepsilon H)} = (A + \varepsilon H) e^{t(A+\varepsilon H)}$$

par rapport  $\varepsilon$  et en  $\varepsilon = 0$ , on en déduit que  $Z$  vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt} Z(t) = AZ(t) + H e^{tA},$$

et puisqu'on a toujours  $e^{0(A+\varepsilon H)} = \text{Id}$ , on obtient la condition initiale  $Z(0) = 0$ . On en déduit que

$$\frac{d}{dt} (e^{-tA} Z(t)) = e^{-tA} H e^{tA}.$$

D'où

$$Z(t) = e^{tA} \int_0^t e^{-sA} H e^{sA} ds.$$

On peut alors introduire les endomorphismes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :  $L_A, R_A \in \text{End}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$  définis par

$$L_A(H) = AH \quad \text{et} \quad R_A(H) = HA,$$

Ces endomorphismes commutent car  $L_A(R_A(H)) = A(HA)$  et  $R_A(L_A(H)) = (AH)A$ . En conséquence, on sait que pour tout  $s \in \mathbb{R}$  :

$$e^{-sL_A} \circ e^{sR_A} = e^{-sL_A + sR_A}(H).$$

De plus puisque  $L_{A^l} = (L_A)^l$  et  $R_{A^l} = (R_A)^l$ , nous avons aussi

$$e^{-sL_A}(H) = \sum_{l \geq 0} \frac{(-sL_A)^l}{l!}(H) = \sum_{l \geq 0} \frac{(-sA)^l}{l!} H = L_{e^{-sA}}(H)$$

et de la même façon :

$$e^{sR_A}(H) = H e^{sA} = R_{e^{sA}}(H).$$

Donc

$$e^{-sA} H e^{sA} = e^{-sL_A} \circ e^{sR_A}(H) = e^{-sL_A + sR_A}(H),$$

où si on note  $\text{ad}(A)$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  défini par

$$\text{ad}(A)(H) = [A, H] = L_A(H) - R_A(H) = AH - HA,$$

on a

$$e^{-sA} H e^{sA} = e^{-s \text{ad}(A)} H.$$

D'où finalement l'expression suivante pour la différentielle de l'exponentielle de matrice en  $A$  :

$$D \exp(A) = L_{e^A} \circ \int_0^1 e^{-s \text{ad}(A)} ds.$$

On peut ensuite déterminer les valeurs propres de l'application  $\text{ad}(A)$ , ce sont les  $\{\lambda_i - \lambda_j, i, j \in I\}$  où les  $\{\lambda_i, i \in I\}$  sont les valeurs propres dans  $\mathbb{C}$  de  $A$ . Ceci permet de démontrer que la différentielle de l'exponentielle de matrice en  $A$  est inversible si et seulement si pour tout  $\lambda \neq \mu$  valeurs propres de  $A$  alors

$$\lambda - \mu \notin 2\pi i \mathbb{Z}.$$

### 3.3. Quelques outils pour étudier les équations différentielles. —

Ici on considère d'abord un champ de vecteurs  $C^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  et on note  $\phi$  son flot.

3.3.1. *Orbites particulières.* — Si  $x \in U$ , son orbite par le flot de  $X$  est

$$\mathcal{O}(x) = \{\phi^t(x), t \in ]t_-(x), t_+(x)[\}.$$

où  $]t_-(x), t_+(x)[$  est l'intervalle maximal où est défini  $t \mapsto \phi^t(x)$ . Or

$$(\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)) \Leftrightarrow (\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(y) \neq \emptyset) \Leftrightarrow (\exists t \text{ tel que } \phi^t(x) = y).$$

Ceci permet de partitionner  $U$  en orbite.

**Définition 3.16.** — Une orbite  $\mathcal{O}(x)$  est dit *périodique* s'il existe  $T > 0$  tel que  $\phi^T(x) = x$ .

Alors pour tout  $y \in \mathcal{O}(x)$ , nous avons aussi  $\phi^T(y) = y$  car l'application  $t \mapsto \phi^t(x)$  est alors  $T$ -périodique en particulier elle est définie sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition 3.17.** — Un point  $x \in U$  est dit *point fixe* du flot ou *point d'équilibre* ou encore *point stationnaire* si  $X(x) = 0$ . Ceci équivaut à  $\mathcal{O}(x) = \{x\}$ .

Nous avons alors la proposition suivante :

**Proposition 3.18.** — Soit  $\mathcal{O}(x)$  une orbite périodique alors

- soit  $x$  est un point fixe du flot,
- soit  $\inf\{t > 0, \phi^t(x) = x\} > 0$  cette quantité est alors appelée la période de  $\mathcal{O}(x)$ .

3.3.2. *Intégrale première.* —

**Définition 3.19.** — On appelle intégrale première du champ  $X$ , une application  $H : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tel que  $H$  soit constant le long des orbites du flot de  $X$ .

Ceci équivaut donc à ce que pour tout  $x \in U$ ,

$$t \mapsto H(\phi^t(x))$$

soit constant donc à dérivée nulle i.e. que pour tout  $x \in U$  et tout  $t$

$$\frac{d}{dt} H(\phi^t(x)) = DH(\phi^t(x)) \left( \frac{d}{dt} \phi^t(x) \right) = DH(\phi^t(x)) X(\phi^t(x)) = 0.$$

Et donc ceci équivaut à ce que :

$$\forall x \in U, \quad DH(x)X(x) = 0.$$

Un exemple classique est fourni par la conservation de l'énergie totale en mécanique classique : on étudie l'équation

$$\ddot{x}(t) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(x(t))$$

sur  $\mathbb{R}^n$  cette équation est associée au champ de vecteurs

$$X(x, v) = (v, -\overrightarrow{\text{grad}} V(x))$$

sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Alors  $E(x, v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle + V(x)$  est une intégrale première : car

$$0 = \left\langle v(t), \frac{d}{dt} v(t) + \overrightarrow{\text{grad}} V(x(t)) \right\rangle = \frac{d}{dt} E(x(t), v(t))$$

si  $t \mapsto (x(t), v(t))$  est une courbe intégrale de  $X$ .

En application nous en déduisons que si  $U \rightarrow \mathbb{R}$  est une intégrale première de  $X$  et si  $\Sigma_c = H^{-1}(c)$  est une partie compacte de  $U$  alors pour  $x \in \Sigma_c$ , la courbe intégrale  $t \mapsto \phi^t(x)$  est définie sur  $\mathbb{R}$  puisque par définition on sait que  $\phi^t(x)$  reste dans le compact  $\Sigma_c$ .

Si on revient à l'exemple issu de la mécanique classique :

$$X(x, v) = (v, -\overrightarrow{\text{grad}} V(x)),$$

on obtient que si  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$  i.e. si  $V$  est propre alors le flot de  $X$  est défini sur  $\mathbb{R}$ . En effet si  $E(x, v) = c$  alors forcément  $V(x) \leq c$ . Et donc  $x \in E^{-1}(] - \infty, c])$  qui est un compact de  $\mathbb{R}^n$  et  $\|v\|^2 \leq 2c - \min_{x \in \mathbb{R}^n} V(x)$ .

Finissons ce paragraphe par quelques remarques :

**Remarque 3.20.** — i) Si  $X = (X_1, \dots, X_n)$  est un champ de vecteurs sur  $U$ , alors  $H$  est une intégrale première du champ  $X$  si et seulement elle vérifie l'équation aux dérivées partielles (en abrégé l'EDP) :

$$\sum_{i=1}^n X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} H(x) = 0.$$

ii) Si  $\lambda \in C^1(U, \mathbb{R})$  est une fonction strictement positive sur  $U$  alors les orbites des flots associés aux champs de vecteurs  $X$  et  $\lambda X$  sont les mêmes. Les flots parcourent les orbites à des vitesses différentes. En effet soit  $t \mapsto \gamma(t)$  une solution de  $\dot{\gamma} = X(\gamma)$  on cherche  $t \mapsto \tau(t)$  tel que  $t \mapsto \tilde{\gamma}(\tau(t))$  soit solution de

$$\frac{d}{dt} \tilde{\gamma}(t) = \lambda(\tilde{\gamma}(t)) X(\tilde{\gamma}(t))$$

Mais

$$\frac{d}{dt} \tilde{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(\tau(t)) \frac{d}{dt} \tau(t)$$

Pour que  $\tilde{\gamma}$  soit une courbe intégrale de  $\lambda X$  il suffit donc que  $\tau$  vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt} \tau(t) = \lambda(\gamma(\tau(t)))$$

dont une solution est l'application réciproque de

$$\tau \mapsto \int_0^\tau \frac{ds}{\lambda(\gamma(s))}.$$

On remarque aussi que les champs de vecteurs  $\lambda X$  et  $X$  ont les mêmes intégrales premières.

3.3.3. *Intégrale première et orbite périodique.* —

**Proposition 3.21.** — Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ,  $X$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$  sur  $U$  et  $H$  une intégrale première de  $X$ . On suppose que pour  $c \in \mathbb{R}$

i)  $\Sigma_c = H^{-1}(c)$  est compact,

ii)  $\overrightarrow{\text{grad}} H \neq 0$  le long de  $\Sigma_c$ ,

iii)  $X$  ne s'annule pas le long de  $\Sigma_c$ ,

alors si  $x \in \Sigma_c$ , l'orbite de  $x$  est périodique et  $\mathcal{O}(x)$  est la composante connexe de  $\Sigma_c$  contenant  $x$ ; en particulier si de plus  $\Sigma_c$  est connexe alors  $\mathcal{O}(x) = \Sigma_c$ .

L'hypothèse ii) signifie que  $\Sigma_c$  est une sous variété de dimension 1 de  $\mathbb{R}^2$ .

*Démonstration.* — On commence par démontrer que si  $y \in \Sigma_c$  alors il y a  $\delta > 0$  tel que

$$\begin{aligned} ] - \delta, \delta[ &\rightarrow \Sigma_c \\ t &\mapsto \phi^t(y) \end{aligned}$$

soit un homéomorphisme sur son image. En effet si  $\Phi$  est un difféomorphisme d'un ouvert  $V$  contenant  $y$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{B}$  redressant  $\Sigma_c \cap V$  :

$$\Phi(\Sigma_c \cap V) = ] - 1, 1[ \times \{0\}.$$

Et que l'on écrit  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ . Alors  $\Phi_2(\phi^t(y)) = 0$  et la dérivée de la fonction

$$t \mapsto \Phi(\phi^t(y))$$

en  $t = 0$  est

$$D\Phi(y).X(y) = \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi_1(\phi^t(y)), 0 \right)$$

Puisque  $\Phi$  est un difféomorphisme et que par hypothèse  $X(y) \neq 0$ , on sait que la dérivée de la fonction  $t \mapsto \Phi_1(\phi^t(y))$  est non nulle en zéro. Il existe donc  $\delta > 0$  tel que sur  $] - \delta, \delta[$ , la fonction continue  $t \mapsto \Phi_1(\phi^t(y))$  soit strictement monotone. C'est donc un homéomorphisme d'image  $J$ . On a donc montré que l'application  $t \mapsto \Phi \circ \phi^t(y)$  est un homéomorphisme de  $] - \delta, \delta[$  sur  $J \times \{0\}$ . Puisque  $\Phi^{-1}$  est un homéomorphisme de  $J \times \{0\}$  sur son

image  $\Phi^{-1}(J \times \{0\}) \subset \Sigma_c$ . Nous avons bien que  $t \mapsto \phi^t(y) = \Phi^{-1}(\Phi(\phi^t(y)))$  est un homéomorphisme de  $] - \delta, \delta[$  sur son image.

Ceci montre que  $\mathcal{O}(x)$  (qui est l'image de  $t \mapsto \phi^t(x)$ ) est un ouvert de  $\Sigma_c$  (12).

On va maintenant montrer que  $\mathcal{O}(x)$  est fermée : soit donc  $(t_l)_l$  une suite de réels telle que

$$\lim \phi^{t_l}(x) = x_\infty.$$

Puisque  $\Sigma_c$  est fermé, nous avons  $x_\infty \in \Sigma_c$ . Appliquons le résultat précédent à  $y = x_\infty$ . Nous avons l'existence d'un ouvert  $V$  contenant  $x_\infty$  et de  $\delta > 0$  tel que

$$V \cap \Sigma_c = \{\phi^t(x_\infty), |t| < \delta\} \subset \mathcal{O}(x_\infty).$$

Alors pour  $l$  assez grand on doit avoir  $\phi^{t_l}(x) \in V \cap \Sigma_c$  et il y a donc  $\tau \in ] - \delta, \delta[$  tel que  $\phi^{t_l}(x) = \phi^\tau(x_\infty)$  et donc

$$x_\infty = \phi^{t_l - \tau}(x) \in \mathcal{O}(x).$$

$\mathcal{O}(x)$  est donc ouvert et fermé et connexe. C'est forcément une composante connexe de  $\Sigma_c$  (13).

Si de plus on suppose que  $\Sigma_c$  est compact alors  $t \mapsto \phi^t(x)$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et on peut extraire de la suite  $\phi^n(x)$  une sous suite convergente :

$$\lim_k \phi^{n_k}(x) = x_\infty$$

et appliquant les arguments précédents on obtient que pour chaque  $k$  assez grand, on trouve  $\tau_k \in ] - \delta, \delta[$  tel que  $\lim_k \tau_k = 0$  tel que

$$x_\infty = \phi^{n_k - \tau_k}(x).$$

et donc pour  $k$  assez grand, on a  $T = n_{k+1} - \tau_{k+1} - n_k + \tau_k > 1/2$  et  $\phi^T(x) = x$ .  $\square$

Si on omet l'hypothèse que  $\Sigma_c$  est compact, alors nous avons néanmoins démontré que  $\mathcal{O}(x)$  est toujours égale à la composante connexe de  $\Sigma_c$  qui contient  $x$ .

(12) On applique ce qui précède à  $y = \phi^t(x)$ .

(13) Si vous avez oublié pourquoi révisez votre cours de topologie de licence.

Ainsi une intégrale première  $H$  d'un champ de vecteurs sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , où

$$X(x) \neq 0, DH(x) \neq 0, \forall x \in U$$

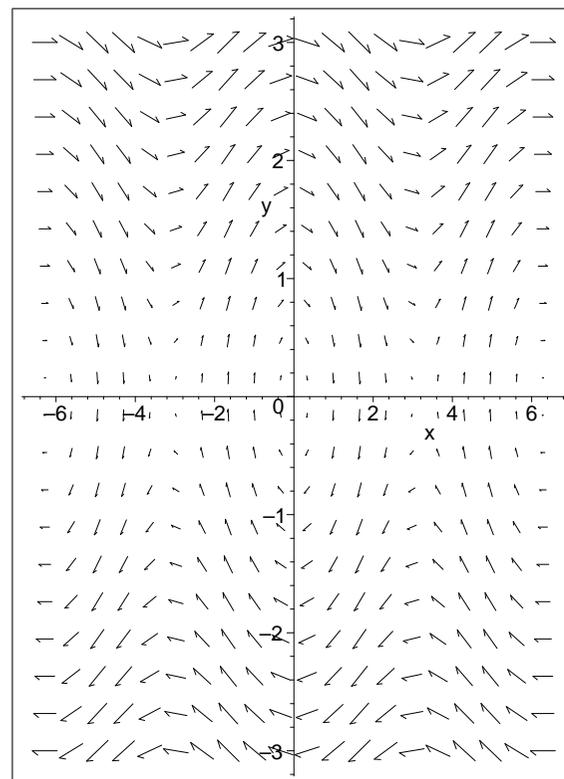
permet de déterminer les orbites de  $X$ . Il ne manque alors que le paramétrage de ces orbites.

3.3.4. *Le pendule.* — C'est une illustration typique de la discussion précédente : On étudie donc l'équation

$$y'' = -\sin y$$

qui modélise le mouvement d'un pendule soumis à la gravitation.  $y$  représente l'angle que fait ce pendule par rapport à l'axe vertical. A cette équation du second ordre, on associe un champ de vecteurs dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$X(y, v) = (v, -\sin y).$$



Dessin du champ de vecteurs  $X$ .

L'énergie  $E(y, v) = \frac{v^2}{2} - \cos(y)$  est constante au cours du mouvement. Il faut maintenant étudier les lignes de niveaux  $\Sigma_c = E^{-1}(c)$ .

**Premier cas :**  $c < -1$  alors puisque  $-\cos(y) \geq -1$ , on a  $\Sigma_c = \emptyset$ .

**Deuxième cas :**  $c = -1$ , dans ce cas on doit avoir  $y \in 2\pi\mathbb{Z}$  et  $v = 0$ . Cela correspond à la position d'équilibre du pendule.

**Troisième cas :**  $c = -\cos(y_0) \in ]-1, 1[$ , alors  $\Sigma_c$  est bien compacte on doit avoir  $|v| \leq \sqrt{2}$  et  $\cos(y) \geq \cos(y_0)$  donc les composantes connexes de  $\Sigma_c$  sont incluses dans les rectangles  $[-y_0 + 2k\pi, y_0 + 2k\pi] \times [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ . On montre alors que le pendule oscille entre les deux positions extrémales  $y = \pm y_0$ .

**Avant-dernier cas :** Si  $c = 1$ , alors  $\Sigma_1$  contient les positions d'équilibres  $(\pi + 2k\pi, 0)$  en fait puisque  $1 + \cos(y) = 2\cos(y/2)^2$ ,  $\Sigma_1$  est en fait la réunion des courbes

$$v = \pm 2 \cos(y/2).$$

On peut en fait intégrer l'équation  $\dot{y} = 2 \cos(y/2)$ . En effet une primitive de la fonction  $1/\cos u$  est la fonction

$$u \mapsto -\log \left| \tan \left( \frac{-2u + \pi}{4} \right) \right|.$$

On trouve grâce à cela que si on part d'une position initiale  $(y_0, v_0)$  en  $t = 0$  où  $y_0 \in ]-\pi/2, \pi/2[$  et

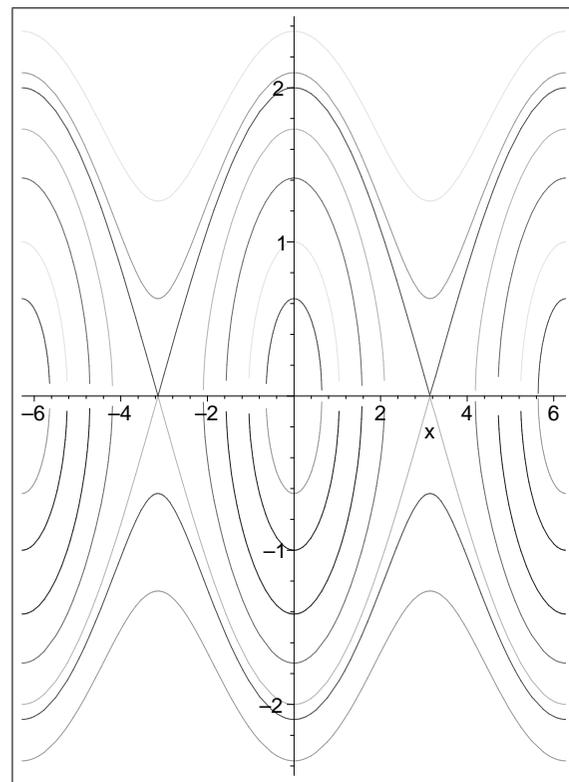
$E(y_0, v_0) = 1$  mais que  $v_0 \neq 0$  alors la solution de l'équation du pendule est

$$y(t) = \pi - 4 \arctan \left( \tan \left( \frac{\pi - y_0}{4} \right) e^{\pm t} \right).$$

Le signe étant fonction de  $v_0$ .

Ceci signifie que ces conditions initiales, le pendule se déplacera jusqu'à la position d'équilibre instable en un temps infini.

**Dernier cas :**  $c > 1$ , dans ce cas  $\Sigma_c$  a deux composantes connexes qui sont les graphes des fonctions  $y \mapsto \pm \sqrt{2\sqrt{c + \cos(y)}}$ . Cela signifie que le pendule parti avec une énergie  $E = \frac{v^2}{2} - \cos(y) > 1$  tournera indéfiniment.



Différentes lignes de niveau de l'énergie

**3.3.5. Equation différentielle à variables séparables.** — On appelle équation différentielle à variables séparables une équation du type

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{f(y)}$$

sur un ouvert  $I \times J$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $I$  et  $J$  étant des intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$ . On suppose ici que les fonctions  $f$  et  $g$  sont  $C^1$  et que  $f$  ne s'annule pas sur  $I$ . le champ de vecteurs associé est  $(x, y) \mapsto (1, f/g)$ . Soit  $F$  une primitive de  $f$  et  $G$  une primitive de  $g$  alors un calcul immédiat montre que la fonction  $H(x, y) = F(y) - G(x)$  est une intégrale première de ce champ de vecteurs. Puisque

$$\overrightarrow{\text{grad}} H = (g(x), f(y))$$

ne s'annule donc pas sur  $I \times J$ . Grâce à notre discussion précédente, nous pouvons affirmer avoir résolu cette équation. Il existe de nombreuses équations différentielles dans le plan qui se ramènent à une telle équation. Par

exemple si  $X(x, y) = (a(x, y), b(x, y))$  est un champ de vecteurs  $C^1$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  où  $a$  ne s'annule pas et où

$$b(x, y)/a(x, y) = \frac{g(x)}{f(y)}.$$

Un exemple classique est donné par le modèle proie et prédateur de Lotka-Volterra :

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy \\ \dot{y} = -ly + bxy \end{cases}$$

où les constantes  $k, a, b, l$  sont positives.  $x$  est le nombre de proies et  $y$  le nombre de prédateurs. On suppose que ces proies et prédateurs restent dans un territoire délimités (une forêt, un étang...) Sans prédateurs ( $y = 0$ ), le nombre de proies croît  $x(t) = e^{kt}x(0)$ , avec des prédateurs mais sans accroissement naturel  $k = 0$ , le nombre de proies décroît comme le nombre de rencontres entre proies et prédateurs (quand un prédateur rencontre une proie il la mange) et on suppose que ce nombre de rencontres est proportionnel au produit  $xy$ . Sans proies ( $x = 0$ ), les prédateurs n'ont rien à manger, ils dépérissent  $y(t) = e^{-lt}y(0)$ . Avec la présence de proies, ils commencent à se reproduire à une vitesse proportionnelle aux nombres de proies dévorées  $bxy$ .

On doit ici étudier le champ de vecteurs

$$X(x, y) = (kx - axy, -ly + bxy) = \left( kx\left(1 - \frac{a}{k}y\right), -ly\left(1 - \frac{b}{l}x\right) \right)$$

sur l'ouvert  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ . On remarque que ce champ de vecteurs admet un unique zéro dans cet ouvert le point

$$(x_0, y_0) = \left( \frac{l}{b}, \frac{k}{a} \right).$$

Ainsi si on dispose de  $x_0$  proies et de  $y_0$  prédateurs, nous avons un point d'équilibre.

Sur l'ouvert  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \setminus \{(x_0, y_0)\}$ , on a

$$\frac{-ly\left(1 - \frac{b}{l}x\right)}{kx\left(1 - \frac{a}{k}y\right)} = \frac{-\frac{l}{x} + b}{\frac{k}{y} - a}.$$

Ainsi la fonction

$$H(x, y) = ay + bx - k \log y - l \log x$$

est une intégrale première de ce champ de vecteurs. Puisqu'on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} H(x, y) = +\infty, \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} H(x, y) = +\infty, \quad \lim_{|x|+|y| \rightarrow \infty} H(x, y) = +\infty,$$

les lignes de niveaux de cette fonction sont compactes, et excepté la ligne de niveau  $H = H(x_0, y_0)$  ce sont des sous variétés de dimension 1 du plan connexe. Ainsi le nombre de proies et de prédateurs évolue de façon périodique au cours du temps.

*3.3.6. Appendice à cette partie : formes différentielles.* — Si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $X = (a, b)$  un champ de vecteurs  $C^1$  sur  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , on sait que  $H \in C^1(U, \mathbb{R})$  est une intégrale première si

$$a \frac{\partial}{\partial x} H + b \frac{\partial}{\partial y} H = 0.$$

On pourrait essayer de chercher  $H$  en connaissant les dérivées partielles  $\frac{\partial}{\partial x} H$  et  $\frac{\partial}{\partial y} H$ , par exemple ici en cherchant une fonction  $H$  qui résolvent les équations

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = b(x, y) \\ \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = -a(x, y) \end{cases}$$

La fonction  $H$  serait alors de classe  $C^2$  et grâce au lemme de Schwarz, on devrait avoir

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x}(x, y)$$

et donc

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Élargissons quelque peu notre discussion : Si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , on appelle 1-formes différentielles  $C^k$  sur  $U$ , une application  $C^k$  de  $U$  dans le dual de  $\mathbb{R}^n$  i.e. c'est un élément de

$$C^k(U, (\mathbb{R}^n)^*) = \Omega_k^1(U).$$

Soit  $(e_i^*)_{i \in \{1..n\}}$  la base duale de la base canonique  $(e_i)_{i \in \{1..n\}}$  de  $\mathbb{R}^n$  ainsi

$$e_i^*(\vec{v}) = \text{la } i^{\text{ième}} \text{ coordonnées de } \vec{v},$$

$$\vec{v} = \sum_i e_i^*(\vec{v}) e_i.$$

Une 1-forme différentielle  $\alpha \in \Omega_k^1(U)$  est donc déterminé par  $n$  fonctions  $C^k$  sur  $U$

$$\alpha(x) = \sum_i \alpha_i(x) e_i^*,$$

où  $\alpha_i(x) = \alpha(x)(e_i)$  définie une fonction  $C^k$  sur  $U$ .

Exemple de 1-formes différentielles : si  $f$  est une fonction de classe  $C^{k+1}$  alors

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i^* \in \Omega_k^1(U).$$

Pour la fonction  $x_i$   $i^{\text{ième}}$  coordonnées, on obtient  $dx_i = e_i^*$ , et on préfère cette notation, on obtiendra donc

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Si  $g \in C^k(U, \mathbb{R})$  et  $\alpha \in \Omega_k^1(U)$ , on peut définir  $g\alpha$  par  $(g\alpha)(x) = g(x)\alpha(x)$ , autrement dit  $\Omega_k^1(U)$  est un  $C^k(U, \mathbb{R})$ -module (libre de rang  $n$ ).

Une condition nécessaire pour qu'une forme  $\alpha = \sum_i \alpha_i dx_i$   $C^k$  soit la différentielle d'une fonction  $f$  est que le lemme de Schwarz soit vérifiée

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

soit

$$(10) \quad \forall i, j \quad \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}.$$

**Définition 3.22.** — On dira qu'une 1-forme différentielle  $\alpha = \sum_i \alpha_i dx_i$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  est fermée si elle vérifie les conditions (10).

Nous avons le lemme suivant dit "lemme de Poincaré" qui précise dans quelle condition ceci est aussi suffisant.

**Lemme 3.23.** — Si  $U$  est un ouvert étoilé et si  $\alpha \in \Omega_{k \geq 1}^1(U)$  est une 1-forme différentielle fermée sur  $U$ , alors il existe une fonction  $f \in C^{k+1}(U, \mathbb{R})$  telle que

$$\alpha = df.$$

*Démonstration.* — On suppose que  $U$  est étoilé en 0, ceci signifie que pour tout  $x$  dans  $U$ , le segment qui joint  $x$  à 0 est dans  $U$  :

$$\forall x \in U, \forall t \in [0, 1] \quad tx \in U.$$

Si  $\alpha = df$ , alors nous avons en  $x = (x_1, \dots, x_n)$  :

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \int_0^1 df(tx)(x) dt = \sum_i \int_0^1 \alpha_i(tx) x_i dt$$

On va donc poser

$$f(x) = \sum_j \int_0^1 \alpha_j(tx) x_j dt,$$

$f$  est au moins de classe  $C^k$  et il nous faut vérifier que pour tout  $i$  :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \alpha_i(x).$$

Mais il est valide de dériver sous le signe d'intégration :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f(x + se_i) \\ &= \sum_{j \neq i} \int_0^1 \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \alpha_j(t(x + se_i)) x_j dt + \int_0^1 \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \alpha_i(t(x + se_i)) (x_i + s) dt \\ &= \sum_{j \neq i} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha_j(tx) t x_j dt + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha_i(tx) t x_i dt + \int_0^1 \alpha_i(tx) dt \\ &= \sum_j \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha_j(tx) t x_j dt + \int_0^1 \alpha_i(tx) dt. \end{aligned}$$

On se sert maintenant de l'hypothèse que  $\alpha$  est fermée :

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}$$

et on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) &= \sum_j \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_i(tx) t x_j dt + \int_0^1 \alpha_i(tx) dt \\
&= \int_0^1 \left[ \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \alpha_i(tx) t x_j \right] dt + \int_0^1 \alpha_i(tx) dt \\
&= \int_0^1 t \frac{d}{dt} \alpha_i(tx) dt + \int_0^1 \alpha_i(tx) dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} (t \alpha_i(tx)) dt \\
&= \alpha_i(x).
\end{aligned}$$

C'est bien ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

Lorsque  $c : I \rightarrow U$  est un chemin  $C^1$  et  $\alpha \in \Omega_k^1(U)$  alors

$$\int_c \alpha = \int_I \alpha(c(t))(c'(t)) dt$$

ne dépend pas du paramétrage. Si de plus  $I = [a, b]$  et  $c(a) = c(b)$  alors lorsque  $\alpha = df$  on obtient  $\int_c \alpha = f(c(b)) - f(c(a)) = 0$ . Ainsi si  $\alpha$  est une forme fermée sur un ouvert  $U$  tel qu'il existe un chemin  $C^1$ ,  $c : [a, b] \rightarrow U$  tel que  $c(a) = c(b)$  mais que  $\int_c \alpha \neq 0$  alors il ne peut pas exister de fonction  $f$  telle que  $df = \alpha$ . Par exemple considérons sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  la 1-forme différentielle

$$\eta(x, y) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

c'est bien un 1 forme différentielle fermée<sup>(14)</sup>. Cependant

$$\int_{\mathbb{S}^1} \eta = \int_0^{2\pi} \eta(\cos \theta, \sin \theta)(-\sin \theta, \cos \theta) d\theta = 2\pi \neq 0.$$

Cette 1-forme fermée n'est donc pas sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , la différentielle d'une fonction. En fait si  $\alpha \in \Omega_{k \geq 1}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  est fermée alors  $\alpha$  est la différentielle d'une fonction si et seulement si

$$\int_{bS^1} \alpha = 0 ;$$

<sup>(14)</sup>Faite le calcul où remarquer que  $\eta = -d \arctan(x/y) = d \arctan(y/x)$ .

et donc pour toute forme  $\alpha \in \Omega_{k \geq 1}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  fermée on trouve une fonction  $f$  tel que

$$\alpha = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} \alpha \right) \eta + df.$$

Revenons à nos moutons : si  $X = (a, b)$  est un champ de vecteurs  $C^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , on veut trouver une fonction  $H$  (une intégrale première de  $X$ ) qui vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = b(x, y) \\ \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = -a(x, y) \end{cases},$$

soit  $dH = bdx - ady$ . Le lemme de Poincaré nous dit que si sur  $U$

$$\frac{\partial}{\partial x} a(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} b(x, y) = 0,$$

alors on peut localement déterminer une telle intégrale première  $H$ , en effet tout point de  $U$  a un voisinage étoilé. Si  $U$  est lui même étoilé, on pourra trouver une intégrale première sur  $U$ . Il arrive souvent que la forme  $bdx - ady$  ne soit pas fermée, cependant on peut parfois trouver un *facteur intégrant*, c'est à dire une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telle que la forme  $e^f(bdx - ady)$  soit fermée. On trouve alors localement (ou globalement si  $U$  est étoilé) une fonction  $H$  qui est une intégrale première de  $e^f X$  donc de  $X$ .

Remarquons que  $f$  est un facteur intégrant si et seulement si il résoud l'équation :

$$a \frac{\partial}{\partial x} f + b \frac{\partial}{\partial y} f + \frac{\partial}{\partial x} a + \frac{\partial}{\partial y} b = 0.$$

**3.4. Symétries et champs de vecteurs.** — On commence par remarquer que si  $X$  est un champ de vecteurs  $C^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  et si on note  $\varphi^t$  son flot alors celui ci est défini sur un ouvert  $U_t$  de  $U$  (c'est en effet une des conclusions de la proposition (3.4)). Et aussi  $\phi^t : U_t \rightarrow U$  est un difféomorphisme sur son image qui est juste  $U_{-t}$ . Et si  $x \in U$ , il existe toujours  $\varepsilon > 0$  assez petit pour que  $x \in U_t$  pour tout  $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ .

*3.4.1. Comment transporter un champ de vecteurs par un changement de coordonnées.* — Soit  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$  et  $\Phi : U \rightarrow V$  un  $C^{r+1}$  difféomorphisme. Si  $X$  est un champ de vecteurs de classe  $C^r$  sur  $V$  et

si  $\gamma : I \rightarrow V$  est une courbe intégrale de ce champ de vecteurs alors  $c(t) = \Phi^{-1}(\gamma(t))$  est solution de l'équation différentielle

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}c(t) &= D(\Phi^{-1})(\gamma(t)) \left( \frac{d}{dt}\gamma(t) \right) \\ &= D(\Phi^{-1})(\gamma(t))(X(\gamma(t))) \\ &= D(\Phi^{-1})(\Phi(c(t)))(X(\Phi(c(t)))) \end{aligned}$$

**Définition 3.24.** — On définit le champ de vecteur  $Y = \Phi_{\#}X$  sur  $U$  par :

$$Y(x) = D(\Phi^{-1})(\Phi(x))(X(\Phi(x)))$$

Puisque  $D(\Phi^{-1})(\Phi(x)) \circ D\Phi(x) = \text{Id}$ , nous avons aussi :

$$\Phi_{\#}X(x) = (D\Phi(x))^{-1}(X(\Phi(x))).$$

Ce champ de vecteurs  $Y$  est de classe  $C^r$  et si on note  $\varphi_X$  le flot de  $X$  alors par construction, son flot est

$$\Phi^{-1} \circ \varphi_X^t \circ \Phi.$$

**Remarque 3.25.** — i) On ne transporte pas des vecteurs dans un changement de coordonnées comme on transporte des points, vous avez déjà rencontré cela en algèbre linéaire, en effet si  $X(x) = Ax$  est un champ de vecteurs linéaires sur  $\mathbb{R}^n$  et donc  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on veut transporter ce champ de vecteurs par un isomorphisme linéaire  $\Phi = P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   $P \in Gl_n(\mathbb{R})$ , alors le champ de vecteurs  $P_{\#}X(x) = P^{-1}APx$  dont le flot est  $P^{-1}e^{tA}P$ .

ii) Remarquez la régularité  $C^{r+1}$  demandé pour le difféomorphisme  $\Phi$ . Prenons un exemple simple, On considère sur  $\mathbb{R}$ , le champ de vecteurs  $X(x) = 1$  et  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un difféomorphisme de classe  $C^1$  (par exemple  $x \mapsto x(\sqrt{|x|} + 1)$ ) alors le champ de vecteur  $\Phi_{\#}X$  est juste  $\Phi_{\#}X(x) = \frac{1}{\Phi'(x)}$  qui est seulement continu mais dont le flot  $(t, x) \mapsto \Phi^{-1}(\Phi(x) + t)$  est parfaitement bien défini.

3.4.2. Symétrie, crochet de Lie. —

**Définition 3.26.** — On dit qu'un champ de vecteurs  $X \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$  est invariant par  $\Phi : U \rightarrow U$  un  $C^{r+1}$  difféomorphisme si  $\Phi_{\#}X = X$ . Où de

façon équivalente si

$$\Phi^{-1} \circ \varphi_X^t \circ \Phi = \varphi_X^t.$$

Ceci signifie exactement que  $\Phi$  conserve les orbites du flot de  $X$  avec leurs paramétrages. Par exemple,  $X$  est invariant par  $\phi_X^s$ .

**Définition 3.27.** — Si  $X, Y \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$  sont deux champs de vecteurs de classe  $C^{r \geq 2}$ , on définit leur crochet de Lie :

$$[X, Y](x) = DX(x)Y(x) - DY(x)X(x),$$

c'est un champ de vecteurs de classe  $C^r$  sur  $U$ .

**Proposition 3.28.** — Si on note  $\varphi_X^t$  et  $\varphi_Y^t$  les flots de  $X$  et de  $Y$  alors

$$[X, Y](x) = - \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_X^t)_{\#} Y(x).$$

*Démonstration.* — Nous avons par définition :

$$((\varphi_X^t)_{\#} Y)(x) = D(\varphi_X^{-t})(\varphi_X^t(x)).Y(\varphi^t(x))$$

On dérive ceci par rapport  $t$  en 0 en utilisant la règle de Leibniz :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((\varphi_X^t)_{\#} Y)(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (D(\varphi_X^{-t})(\varphi_X^t(x))).Y(x) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y(\varphi^t(x)).$$

Car  $D(\varphi_X^{-0})(\varphi_X^0(x))$  est l'endomorphisme "identité". Maintenant :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y(\varphi^t(x)) = DY(x).X(x)$$

et

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} D(\varphi_X^{-t})(\varphi_X^t(x)) &= - \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_{(u,v)=(0,0)} (D\varphi_X^u)(\varphi_X^v(x)) \\ &\quad + \left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_{(u,v)=(0,0)} D(\varphi_X^u)(\varphi_X^v(x)) \\ &= - \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} (D\varphi_X^u)(x) \\ &= - \left( D \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} \varphi_X^u \right) (x) \\ &= -DX(x). \end{aligned}$$

□

Nous avons aussi la proposition suivante qui dit que le crochet de Lie se transporte bien par changement de coordonnées :

**Proposition 3.29.** — Si  $X$  et  $Y$  sont deux champs de vecteurs  $C^r$  sur  $V$  et si  $\Phi : U \rightarrow V$  est un  $C^{r+1}$  difféomorphisme alors

$$\Phi_{\#}[X, Y] = [\Phi_{\#}X, \Phi_{\#}Y].$$

*Démonstration.* — On vérifie que si on note encore  $\varphi_X^t$ ,  $\varphi_Y^t$ , et  $\varphi_{\Phi_{\#}X}^t$  les flots de  $X$ , de  $Y$  et de  $\Phi_{\#}X$ , alors

$$\Phi_{\#} \left( (\varphi_X^s)_{\#} Y \right) = \left( \varphi_{\Phi_{\#}X}^s \right)_{\#} (\Phi_{\#}Y).$$

En effet par définition le flot du champ de vecteurs :

$$\Phi_{\#} \left( (\varphi_X^s)_{\#} Y \right)$$

est

$$\Phi^{-1} \circ \varphi_X^{-s} \circ \varphi_Y^t \circ \varphi_X^s \circ \Phi,$$

alors que le flot du second est

$$\Phi^{-1} \circ \varphi_X^{-s} \circ \Phi \circ \Phi^{-1} \circ \varphi_Y^t \circ \Phi \circ \Phi^{-1} \circ \varphi_X^s \circ \Phi.$$

Ces deux champs de vecteurs ont le même flot, ils coïncident donc.

En dérivant cette identité en  $s = 0$ , on obtient exactement le résultat voulu grâce à la proposition précédente (3.28).  $\square$

**Proposition 3.30.** — Le champ de vecteurs  $Y$  est invariant par le flot de  $X$  si et seulement si le crochet de Lie de  $X$  et  $Y$  est nul. C'est à dire les flots de  $X$  et de  $Y$  commutent si et seulement si  $[X, Y] = 0$ .

*Démonstration.* — Le sens direct est clair. Montrons la réciproque supposons que  $[X, Y] = 0$ , alors puisque  $(\varphi_X^s)_{\#} X = X$  on obtient :

$$0 = (\varphi_X^s)_{\#} [X, Y] = [(\varphi_X^s)_{\#} X, (\varphi_X^s)_{\#} Y] = [X, (\varphi_X^s)_{\#} Y]$$

et donc

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi_X^t)_{\#} (\varphi_X^s)_{\#} Y = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi_X^{t+s})_{\#} Y = \frac{d}{ds} (\varphi_X^s)_{\#} Y.$$

Ainsi (où cela est défini) on obtient :

$$(\varphi_X^s)_{\#} Y = (\varphi_X^0)_{\#} Y = Y.$$

$\square$

Donnons aussi quelques propriétés du crochet de Lie de champ de vecteurs :

**Proposition 3.31.** — l'application  $(X, Y) \mapsto [X, Y]$  est une forme bilinéaire antisymétrique de l'espace vectoriel  $C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ . Si  $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$  on note  $X.f$  la fonction  $x \mapsto Df(x)(X(x))$  dérivée de  $f$  dans la direction de  $X$ . et  $fX$  la champ de vecteurs  $x \mapsto f(x)X(x)$ . On a alors

$$[fX, Y] = f[X, Y] + (Y.f)X.$$

3.4.3. Exemples : les champs de vecteurs invariants par rotation sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . — On considère le difféomorphisme donné par les coordonnées polaires :

$$P(r, \theta) = r\vec{u}_\theta$$

$P$  est un difféomorphisme de  $U := ]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[$  sur le plan privé de l'axe  $Ox$ . Si  $X$  est un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2$ , le champ  $P_{\#}X$  est un champ de vecteur sur  $U$ .

Puisque  $(\frac{\partial}{\partial r}P(r, \theta), \frac{\partial}{\partial \theta}P(r, \theta)) = (\vec{u}_\theta, r\vec{v}_\theta)$  forment une base de  $\mathbb{R}^2$ , on peut décomposer  $X(r\vec{u}_\theta)$  dans cette base :

$$X(r\vec{u}_\theta) = a(r, \theta) \frac{\partial}{\partial r} P(r, \theta) + b(r, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} P(r, \theta),$$

avec

$$a(r, \theta) = \left\langle \frac{\partial}{\partial r} P(r, \theta), X(r\vec{u}_\theta) \right\rangle \quad \text{et} \quad rb(r, \theta) = \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta} P(r, \theta), X(r\vec{u}_\theta) \right\rangle.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} X(P(r, \theta)) &= a(r, \theta) DP(r, \theta)(1, 0) + b(r, \theta) DP(r, \theta)(0, 1) \\ &= DP(r, \theta)(a(r, \theta), b(r, \theta)). \end{aligned}$$

Et donc nous obtenons :

$$P_{\#}X(r, \theta) = (a(r, \theta), b(r, \theta)).$$

On considère sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , le champ de vecteurs  $Y(x, y) = (-y, x)$  dont le flot est constitué des rotations par rapport à l'origine :

$$\varphi_Y^\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

Puisqu'on a  $P_{\#}Y = (0, 1)$  on calcule rapidement

$$P_{\#}[X, Y] = \left( \frac{\partial}{\partial \theta} a, \frac{\partial}{\partial \theta} b \right).$$

Ainsi  $X$  est invariant par les rotations, si et seulement si les fonctions  $a, b$  ne dépendent pas de  $\theta$ . Or les champs de vecteurs  $(P^{-1})_{\#}(1, 0) := \frac{\partial}{\partial r}$  et  $(P^{-1})_{\#}(0, 1) := \frac{\partial}{\partial \theta}$  sont donnés par

$$\frac{\partial}{\partial r}(x, y) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \theta}(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

Ils sont bien défini sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , de même la fonction  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  est bien défini sur ce même ouvert. Ainsi  $X$  est champ de vecteurs  $C^\infty$  invariant par les rotations sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  si et seulement si il existe deux fonctions  $a, b \in C^\infty(]0, \infty[, \mathbb{R})$  telles que

$$X = a(r) \frac{\partial}{\partial r} + b(r) \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

**3.4.4. Equation aux dérivées partielles du premier ordre et redressement du flot.** — Soit  $X = (X_1, \dots, X_n)$  un champ de vecteurs  $C^k$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in C^0(U, \mathbb{R})$ , on cherche à résoudre l'équation

$$(11) \quad \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i} u = f$$

c'est à dire

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u(\varphi_X^t(x)) = f(x).$$

On doit donc avoir :

$$u(\varphi_X^t(x)) = u(x) + \int_0^t u(\varphi_X^s(x)) ds.$$

Localement en un point  $x_0$  où  $X(x_0) \neq 0$ , une telle équation se ramène toujours à une équation  $\frac{\partial}{\partial x_1} u = f$ . C'est le résultat de la proposition suivante :

**Proposition 3.32.** — Soient  $X$  un champ de vecteurs de classe  $C^{k \geq 1}$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  et  $x_0 \in U$  tel que  $X(x_0) \neq 0$ , alors il y a un  $C^k$  difféomorphisme  $\Phi : B(0, \delta) \rightarrow V$  où  $V \subset U$  est un voisinage ouvert de  $x_0$  tel que

$$\Phi_{\#}X = e_1.$$

C'est à dire dans cet ouvert  $V$  :

$$\varphi_X^t(x) = \Phi(\Phi^{-1}(x) + te_1).$$

Grâce à cette proposition on sait que sur  $V$ ,  $u$  est solution de (11) si et seulement si  $v = u \circ \Phi$  est solution de

$$\frac{\partial}{\partial x_1} v = f \circ \Phi,$$

équation qui se résoud facilement si on connaît la valeur de  $v$  en restriction à l'hyperplan  $x_1 = 0$ .

*Démonstration.* — On fait on construit ce difféomorphisme à l'aide du flot : soit  $\vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  ( $n - 1$ ) vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $(X(x_0), \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$  soit une base de  $\mathbb{R}^n$ . Alors l'application

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_X^{x_1} \left( x_0 + \sum_{i=2}^n x_i \vec{u}_i \right)$$

est bien défini dans une certaine boule autour de 0. Elle est de classe  $C^k$ , et on peut facilement calculer ses dérivées partielles en 0 :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \Phi(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_X^{x_1}(x_0) = X(x_0)$$

et pour  $i \geq 2$  :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_X^0(x_0 + t\vec{u}_i) = \vec{u}_i.$$

Ainsi  $D\Phi(0)$  est inversible et grâce au théorème d'inversion locale, nous pouvons affirmer qu'il existe  $\delta > 0$  tel que la restriction de  $\Phi$  à  $B(0, \delta)$  est un  $C^k$  difféomorphisme.

Par construction, il est alors clair que :  $\Phi^{-1}(\varphi_X^t(\Phi(x_1, \dots, x_n))) = (x_1 + t, x_2, \dots, x_n)$  et donc :

$$\Phi_{\#}X = e_1.$$

□

### 3.5. Champs de vecteurs sur les surfaces. —

**Définition 3.33.** — Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface  $C^\infty$ , on appelle champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $S$  une application  $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que

i) pour tout  $m \in S$ ,  $X(m) \in \overrightarrow{T_m S}$ .

ii) Si  $(u, v) \mapsto F(u, v)$  est une paramétrisation d'un ouvert  $U$  de  $S$  alors

$$X \circ F(u, v) = a(u, v) \frac{\partial}{\partial u} F(u, v) + b(u, v) \frac{\partial}{\partial v} F(u, v)$$

où  $a$  et  $b$  sont  $C^\infty$ .

Remarquons que la condition ii) ne dépend pas la paramétrisation : on peut la remplacer par la condition suivante : pour tout point  $m \in S$ , il y a un ouvert  $U$  de  $S$  et  $(u, v) \mapsto F(u, v)$  une paramétrisation de  $U$  telle que

$$X \circ F(u, v) = a(u, v) \frac{\partial}{\partial u} F(u, v) + b(u, v) \frac{\partial}{\partial v} F(u, v)$$

où  $a$  et  $b$  sont  $C^\infty$ . En effet soit  $G : (x, y) \mapsto G(x, y)$  une paramétrisation de  $V$  un ouvert de  $S$  telle que  $U \cap V \neq \emptyset$ . On dispose alors d'un changement de coordonnées :

$$\varphi = G^{-1} \circ F : F^{-1}(U \cap V) \rightarrow G^{-1}(U \cap V).$$

si on a  $F(u, v) = G(x, y)$  c'est à dire  $(x, y) = \varphi(u, v)$  alors

$$\begin{aligned} X(F(u, v)) &= DF(u, v)(a(u, v), b(u, v)) = a(u, v) \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) + b(u, v) \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) \\ &= DG(x, y)(c(x, y), d(x, y)) = c(x, y) \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) + d(x, y) \frac{\partial G}{\partial y}(x, y). \end{aligned}$$

Mais puisque  $G \circ \varphi = F$ , nous avons

$$DG(x, y) \circ D\varphi(u, v) = DF(u, v)$$

et donc :

$$DG(x, y) \circ D\varphi(u, v)(a(u, v), b(u, v)) = DG(x, y)(c(x, y), d(x, y))$$

Puisque l'application linéaire  $DG(x, y)$  est injective on a donc :

$$D\varphi(u, v)(a(u, v), b(u, v)) = (c(x, y), d(x, y)).$$

Ce qui signifie que si le champ de vecteurs  $(u, v) \mapsto (a(u, v), b(u, v))$  est noté  $F\#X$  et si le champ de vecteurs  $(x, y) \mapsto (c(x, y), d(x, y))$  est noté  $G\#X$  alors

$$F\#X = \varphi\#(G\#X), \text{ et } (\varphi^{-1})\#F\#X = G\#X.$$

Ainsi

$$\left( G\#X \in C^\infty(G^{-1}(U \cap V), \mathbb{R}^2) \right) \Leftrightarrow \left( F\#X \in C^\infty(F^{-1}(U \cap V), \mathbb{R}^2) \right).$$

**Quelques exemples :**

i) Si  $X$  est un champ de vecteurs  $C^\infty$  défini sur un voisinage de  $S$  et tel que pour tout  $m \in S$ ,  $X(m) \in \overrightarrow{T_m S}$  alors la restriction de  $X$  à  $S$  est un champ de vecteurs  $C^\infty$ .

ii) Si  $X$  est un champ de vecteurs sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^3$  et si  $H$  est une intégrale première  $C^\infty$  de  $X$  telle que  $\forall m \in U$ ,  $\overrightarrow{grad} H(m) \neq 0$  alors pour tout réel  $c$ ,  $\Sigma_c = H^{-1}(c)$  est une surface  $C^\infty$  (à moins d'être vide) et la restriction de  $X$  à  $\Sigma_c$  est un champ de vecteurs sur cette surface.

iii) On considère  $\mathbb{S}^2$  la sphère unité et  $\pi_N$  la projection stéréographique de pôle nord :

$$\pi_N(x, y, z) = (x/(1-z), y/(1-z)).$$

On considère sur  $\mathbb{R}^2$  les deux champs de vecteurs

$$X_1(x, y) = (x, y) \text{ et } X_2(x, y) = (1, 0)$$

On peut définir deux champs de vecteurs  $\tilde{X}_i$  sur la sphère  $\mathbb{S}^2$  privé du pôle Nord  $N = (0, 0, 1)$  par :

$$(\pi_N)\#\tilde{X}_i = X_i.$$

On montre que ces champs de vecteurs s'étendent en des champs de vecteurs  $C^\infty$  sur  $\mathbb{S}^2$  et qu'il sont nuls au pôle Nord.

Pour cela on considère les ouverts  $U_N = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$  et  $U_S = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$ , grâce aux projections stéréographiques  $\pi_N$  par rapport au pôle Nord et  $\pi_S(x, y, z) = (x/(1+z), y/(1+z))$  par rapport au pôle sud, on peut paramétrer  $U_N$  et  $U_S$ . Le changement de coordonnées  $\varphi = \pi_N \circ \pi_S^{-1}$  est défini sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\pi_S((0, 0, 1))\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  et est un difféomorphisme sur

$\mathbb{R}^2 \setminus \{\pi_N((0, 0, -1))\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Un petit calcul, ou un peu de trigonométrie élémentaire dans le plan 0,  $\pi_N^{-1}((x, y)), \pi_N^{-1}((x, y))$  qui contient aussi le point  $(x, y, 0)$  montre que

$$\varphi(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

est une inversion de pôle 0. Pour affirmer que les champs de vecteurs  $\tilde{X}_i$  se prolonge de façon  $C^\infty$  à toute la sphère, il suffit de vérifier que  $(\pi_S^{-1})_\# \tilde{X}_i$  qui est défini sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  se prolonge en 0. Mais par construction, on a

$$(\pi_S^{-1})_\# \tilde{X}_i = \varphi_\# X_i.$$

Un calcul<sup>(15)</sup> montre que

$$\varphi_\# X_1(x, y) = -(x, y)$$

et que

$$\varphi_\# X_2(x, y) = -(x^2 - y^2, 2xy)$$

Ces champs de vecteurs se prolongent bien par 0 en 0 pour faire des champs de vecteurs  $C^\infty$ .

**3.5.1. Flot d'un champ de vecteurs sur une surface.** — Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface  $C^\infty$  et  $X : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $S$ . Si  $m \in S$ , alors il existe une unique solution  $\gamma : I \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  de l'équation

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = m \end{cases}$$

En effet, il existe  $F : U \rightarrow S$  une paramétrisation d'un voisinage de  $m$ , et l'équation ci dessus équivaut à ce que  $F^{-1}(\gamma(t)) = (u(t), v(t))$  soit solution de

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = a(u(t), v(t)) \\ \dot{v}(t) = b(u(t), v(t)) \\ (u(0), v(0)) = F^{-1}(m) \end{cases}$$

où  $F_\# X = (a, b)$ . Ce résultat d'existence et d'unicité est une paraphrase du théorème de Cauchy-Lipschitz. Le reste de la théorie s'appuyant de la même façon sur des arguments locaux, on obtient ainsi :

i) L'existence et l'unicité des solutions maximales.

ii) Définition du flot de  $X$ , défini sur un ouvert de  $\mathbb{R} \times S$  contenant  $\{0\} \times S$ .

iii) Le caractère  $C^\infty$  du flot.

iv) L'explosion des solutions maximales définies sur un intervalle borné (à gauche ou à droite).

En particulier, nous obtenons (une reformulation du résultat 3.7)

**Corollaire 3.34.** — Si  $S$  est une surface compacte de  $\mathbb{R}^3$ , alors le flot d'un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $S$  est défini sur  $\mathbb{R} \times S$ .

Étudions maintenant, le flot du champ de vecteurs  $\tilde{X}_1$  obtenu sur la sphère. Notons le  $\phi^t$ . On sait évidemment que  $\pi_N(\phi^t(\pi_N^{-1}(x, y))) = (e^t x, e^t y)$  On veut regarder ce champ de vecteurs en coordonnées sphériques :

$$S(\theta, \varphi) = \cos \varphi \vec{u}_\theta + \sin \varphi \vec{k}.$$

On considère le changement de cartes :

$$f(\theta, \varphi) = \pi_N \circ S(\theta, \varphi) = \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \vec{u}_\theta.$$

ainsi

$$\frac{\partial}{\partial \theta} f = \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \vec{v}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} f = \frac{1}{1 - \sin \varphi} \vec{u}_\theta$$

puisque  $X_1(r\vec{u}_\theta) = r\vec{u}_\theta$ , nous obtenons :

$$f_\# X_1(\theta, \varphi) = S_\# \tilde{X}_1(\theta, \varphi) = (0, \cos \varphi).$$

Alors  $t \mapsto S(\theta(t), \varphi(t))$  est une courbe intégrale de  $\tilde{X}_1$  si et seulement les fonctions  $t \mapsto \theta(t)$  et  $t \mapsto \varphi(t)$  vérifie :

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = 0 \\ \dot{\varphi}(t) = \cos \varphi(t) \end{cases}$$

Ces équations se résolvent facilement et on trouve  $\theta(t) = \theta(0)$  et

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \left( e^{-t} \tan \left( \frac{\pi - 2\varphi(0)}{4} \right) \right).$$

On peut facilement vérifier que l'on a bien :

$$f(\theta(t), \varphi(t)) = e^t f(\theta(0), \varphi(0)).$$

<sup>(15)</sup>Vous devez faire ce calcul.

**Exercice 3.1.** — Soient  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie et soit  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(E)$  une application continue. On note  $R(t_0, t)$  la résolvante associée à l'équation différentielle  $x'(t) = A(t)x(t)$  avec condition initiale en  $t_0$ . C'est à dire

$$\frac{d}{dt}R(t_0, t) = A(t)R(t_0, t) \quad \text{et} \quad R(t_0, t_0) = \text{Id}.$$

(1) On suppose que  $A$  est périodique de période  $T$ . Montrer que

$$R(t_0 + T, t + T) = R(t_0, t).$$

(2) Montrer que  $R(0, t + kT) = R(0, t)M^k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$  où  $M = R(0, T)$ .

(3) Montrer que l'équation différentielle a une solution  $T$ -périodique si 1 est valeur propre de  $M$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 3.2.** — Etude de l'allure des courbes intégrales de l'équation différentielle

$$y' = (y^3 - y)(1 + \sin^2 y)$$

(1) Donner un régionnement du plan suivant le signe de  $y'$ . Quelle est l'isocline 0? (lieu des points où la tangente à la courbe intégrale passant par ce point est horizontale)

(2) Donner le domaine d'application du théorème de Cauchy-Lipschitz et les symétries de la famille des courbes intégrales.

(3) On note  $y_\alpha$  la solution maximale passant par  $(0, \alpha)$  au temps  $t = 0$ , et  $\Gamma_\alpha$  la courbe intégrale correspondante.

i) Montrer que  $y_{\frac{1}{2}}$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

ii) Dessiner la courbe  $\Gamma_{\frac{1}{2}}$  après avoir étudié ses branches infinies.

iii) En déduire la solution  $y_\alpha$  pour  $0 < |\alpha| < 1$ ?

(4) Soit  $]a_2, b_2[$  l'intervalle maximal pour la solution  $y_2$ .

i) Montrer que  $a_2 = -\infty$  et étudier la branche infinie associée de  $\Gamma_2$ .

ii) Montrer que  $b_2$  est fini (on pourra pour cela intégrer l'équation différentielle  $x' = x^3 - x$  et comparer  $y_2$  à la solution maximale  $x_2$  de cette équation passant par le point  $(0, 2)$  au temps  $t = 0$ ).

iii) Dessiner  $\Gamma_2$  puis compléter le portrait des courbes intégrales  $\Gamma_\alpha$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 3.3.** — (Issu d'un contrôle continu)

On étudie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  le champ de vecteur

$$X_0(x, y) = \left( \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) x - y, \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) y + x \right).$$

(1) Montrer que  $t \mapsto (\cos t, \sin t)$  est la solution maximale de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = X_0(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = (1, 0).$$

(2) Quelles équations différentielles doivent satisfaire les fonctions  $\theta, r : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  pour que la fonction  $\gamma : t \in ]a, b[ \rightarrow \gamma(t) = (r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t))$  vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = X_0(\gamma(t)).$$

(3) Résoudre les deux équations différentielles trouver en 2). Déterminer alors le flot  $\phi$  associé à  $X_0$  et son ensemble de définition.

(4) A  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on associe le réel  $t(x) > 0$  définie de la façon suivante : si  $\phi^t(x, 0) = (u_x(t), v_x(t))$

$$t(x) = \inf\{t > 0, \text{ tel que } v_x(t) = 0 \text{ et } u_x(t) > 0\}.$$

On pose alors  $g(x) = u_x(t(x))$ , exprimer  $g$  et calculer  $g'(1)$ .

On se donne maintenant un autre champ de vecteurs  $Y \in C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et on pose  $X_\varepsilon = X_0 + \varepsilon Y$ . D'après le cours, on sait qu'il existe  $\delta > 0$  tel que si  $|x - 1| \leq \delta$  et  $|\varepsilon| \leq \delta$  alors la solution maximale de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = X_\varepsilon(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = (x, 0).$$

est définie sur  $[-\pi, 3\pi]$ . On note  $t \mapsto (h(\varepsilon, x, t), f(\varepsilon, x, t))$  cette solution.

(5) Rappeler pourquoi les fonctions  $f$  et  $h$  sont  $C^\infty$  sur  $] -\delta, \delta[ \times ]1 - \delta, 1 + \delta[ \times ] - \pi, 3\pi[$ .

(6) Etudier au voisinage de  $(0, 2\pi, 1)$  l'équation  $f(\varepsilon, t, x) = 0$  en déduire qu'il existe  $\eta > 0$  et  $T : ]-\eta, \eta[ \times ]1 - \eta, 1 + \eta[ \rightarrow ]2\pi - \eta, 2\pi + \eta[$  une application  $C^\infty$  tel que

$$\begin{cases} (\varepsilon, x, t) \in ]-\eta, \eta[ \times ]1 - \eta, 1 + \eta[ \times ]2\pi - \eta, 2\pi + \eta[ \\ f(\varepsilon, t, x) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (\varepsilon, x) \in ]-\eta, \eta[ \times ]1 - \eta, 1 + \eta[ \\ t = T(\varepsilon, x) \end{cases}$$

(7) On définit alors la fonction  $g(\varepsilon, x) = h(\varepsilon, x, T(\varepsilon, x))$ . Etudier au voisinage de  $(0, 1)$  l'équation  $g(\varepsilon, x) = x$  en déduire qu'il existe  $\eta' \in ]0, \eta[$  et une fonction  $C^\infty P : ]-\eta', \eta'[ \rightarrow ]1 - \eta', 1 + \eta'[$  tel que

$$\begin{cases} (\varepsilon, x) \in ]-\eta', \eta'[ \times ]1 - \eta', 1 + \eta'[ \\ g(\varepsilon, x) = x \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon \in ]-\eta', \eta'[ \\ x = P(\varepsilon) \end{cases}$$

(8) En déduire que pour  $|\varepsilon| < \eta'$ , alors le champ de vecteurs  $X_\varepsilon$  a une unique orbite périodique au voisinage du point  $(1, 0)$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 3.4.** — (Issu de l'examen de Janvier 2002)

On étudie pour  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , l'équation différentielle

$$(12) \quad \begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) + \varepsilon(x(t)^2 + y(t)^2) \\ (x(0), y(0)) = (1, 0) \end{cases}$$

(1) Pourquoi est ce que l'équation différentielle (12) admet une unique solution maximale  $t \in I_\varepsilon \mapsto (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$  ?

(2) Trouver la solution maximale de cette équation lorsque  $\varepsilon = 0$ .

(3) D'après le cours, on sait qu'il existe  $\delta > 0$ , tel que si  $|\varepsilon| \leq \delta$ , alors l'intervalle  $I_\varepsilon$  contient l'intervalle  $] - 4\pi, 4\pi[$ . Pourquoi l'application

$$(t, \varepsilon) \in ] - 4\pi, 4\pi[ \times ] - \delta, \delta[ \longrightarrow (x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$$

est elle  $C^\infty$  ?

(4) On pose  $u(t) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} x(t, \varepsilon)$  et  $v(t) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} y(t, \varepsilon)$ . Ecrire l'équation différentielle vérifiée par

$$t \in ] - 4\pi, 4\pi[ \mapsto (u(t), v(t))$$

(5) Expliciter la fonction  $t \in ] - 4\pi, 4\pi[ \mapsto (u(t), v(t))$ .

(Indication : on pourra poser  $Z(t) = u(t) + iv(t)$ )

(6) Montrer que si  $t \in ]a, b[ \mapsto (x(t), y(t))$  est solution de l'équation différentielle

$$(13) \quad \begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) + \varepsilon(x(t)^2 + y(t)^2) \end{cases}$$

alors pour  $\tau \in \mathbb{R}$ , l'application  $t \in ]\tau - b, \tau - a[ \mapsto (x(\tau - t), -y(\tau - t))$  est encore une solution de (13).

(7) En déduire que si  $y(T, \varepsilon) = 0$  alors la solution maximale de (12) est  $2T$ -périodique.

(8) Etudier l'équation  $y(T, \varepsilon) = 0$  au voisinage de  $(\pi, 0)$ . En déduire qu'il y a un voisinage  $V$  de 0 et une fonction  $C^\infty \varepsilon \in V \mapsto T(\varepsilon)$  telle que lorsque  $\varepsilon \in V$  alors la solution maximale de (12) est  $2T(\varepsilon)$ -périodique.

(9) Montrer que  $T(\varepsilon) = \pi + o(\varepsilon)$ .

(10) Donner l'expression de  $T''(0)$  en fonction des dérivées partielles premières et secondes de  $y$  en  $(\pi, 0)$ .

(11) On pose  $w(t) = \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} x(t, \varepsilon)$  et  $z(t) = \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} y(t, \varepsilon)$ . Ecrire l'équation différentielle vérifiée par

$$t \in ] - 4\pi, 4\pi[ \mapsto (w(t), z(t))$$

(12) Expliciter la fonction  $t \in ] - 4\pi, 4\pi[ \mapsto (w(t), z(t))$ .

(13) En déduire la valeur de  $T''(0)$  et un développement limité à l'ordre 2 de  $T(\varepsilon)$  au voisinage de 0.

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 3.5.** — (Issu de l'examen de Septembre 2002)

(1) Soit  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que s'il existe une fonction  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , telle que

$$\frac{\partial}{\partial x}u = f \text{ et } \frac{\partial}{\partial y}u = g$$

alors  $\frac{\partial}{\partial x}g - \frac{\partial}{\partial y}f = 0$ .

(2) Réciproquement montrer que si  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux fonctions de classe  $C^1$  telles que  $\frac{\partial}{\partial x}g - \frac{\partial}{\partial y}f = 0$ , alors la fonction  $u(x, y) = \int_0^x f(t, 0)dt + \int_0^y g(x, t)dt$  est de classe  $C^1$  et que ces dérivées partielles satisfont

$$\frac{\partial}{\partial x}u = f \text{ et } \frac{\partial}{\partial y}u = g ;$$

en particulier en déduire que  $u$  est  $C^2$ .

(3) Soit  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $X(x, y) = (a(x, y), b(x, y))$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$ , on suppose que  $X$  est un champ à divergence nulle, c'est à dire que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \operatorname{div}X(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}a(x, y) + \frac{\partial}{\partial y}b(x, y) = 0$$

Montrer qu'il existe une intégrale première du champ  $X$ , i.e. une fonction  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , telle que

$$a \frac{\partial}{\partial x}H + b \frac{\partial}{\partial y}H = 0.$$

(16)

(4) Trouver une intégrale première du champ

$$X(x, y) = (2xy + y^2 + 1, x^2 + 1 - y^2).$$

(5) Soit  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $X(x, y) = (a(x, y), b(x, y))$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$  et  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , montrer que la divergence du champ  $X'(x, y) = e^{v(x, y)}X(x, y) = (e^{v(x, y)}a(x, y), e^{v(x, y)}b(x, y))$  est  $\operatorname{div}X' = e^v (\operatorname{div}X + X.v)$  où  $X.v(x, y) = Dv(x, y).X(x, y)$  est la dérivée de  $v$  dans la direction de  $X(x, y)$ .

(6) En déduire que si on trouve  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telle que  $v$  vérifie l'équation  $X.v = -\operatorname{div}X$  alors on peut trouver une intégrale première du champ  $X$ .

<sup>(16)</sup>Ce qui signifie que  $H$  est constant le long des trajectoires de ce champ de vecteurs

(7) Résoudre l'équation  $X.v = -\operatorname{div}X$  lorsque la fonction  $\operatorname{div}X(x, y)/a(x, y)$  ne dépend que de  $x$ .

(8) Trouver une intégrale première du champ de vecteurs  $X(x, y) = (2xy, x^2 + 1 + y^2)$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 3.6.** — *Partiel 2001 : Problème : un théorème de Hadamard* Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^2$  dont la différentielle est inversible en tout point. On suppose de plus qu'il y a des constantes  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \left\| [DF(x)]^{-1} \right\| \leq \alpha \|x\| + \beta.$$

On se propose de montrer que  $F$  est un  $C^2$  difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  sur lui-même.

(1) Soit  $(x_0, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , montrer que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = [DF(x(t))]^{-1} (q - F(x_0)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale  $\varphi$ . On note  $I$  l'intervalle de définition de  $\varphi$ .

(2) Montrer que  $[0, +\infty[$  est contenu dans  $I$ . Pour cela, on pourra procéder ainsi :

– Vérifier qu'il existe  $A, B \in \mathbb{R}_+$ , tel que  $\forall t \in I, \|\varphi'(t)\| \leq A\|\varphi(t)\| + B$ .

– En déduire, à l'aide du lemme de Gronwall, que  $\varphi$  est borné sur tout intervalle borné  $[0, b]$  inclus dans  $I$ .

– Conclure.

(3) Calculer la dérivée de  $F \circ \varphi$ , en déduire que  $\varphi(1)$  est solution de l'équation  $F(x) = q$ . En conclure que  $F$  est surjective.

On considère  $q \in \mathbb{R}^n$  et on suppose que  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  et  $x_2 \in \mathbb{R}^n$  sont des solutions de l'équation  $F(x) = q$ . Pour  $\lambda \in [0, 1]$  on note  $\varphi_\lambda$  la solution maximale du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = [DF(x(t))]^{-1} (q - F((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2)) \\ x(0) = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \end{cases}$$

D'après le 2) on sait que  $\varphi$  est au moins définie sur  $[0, +\infty[$ .

(4) Que valent  $\varphi_0(1)$  et  $\varphi_1(1)$  ?

On pose

$$I = \{\lambda \in [0, 1], \varphi_\lambda(1) = x_1\}.$$

(5) Montrer que  $I$  est un fermé de  $[0, 1]$ , puis que c'est un ouvert de  $[0, 1]$ . En déduire que  $F$  est injective.

(6) En conclure que  $F$  est  $C^2$  difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  sur lui-même.

(7) Que se passe-t-il pour  $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$  ?

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 3.7.** — Soit  $U = (\mathbb{R}_+^*)^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } x > 0, y > 0\}$ .

Soit

$$\begin{aligned} X : U &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (f(x, y), g(x, y)) \end{aligned}$$

un champ de vecteur  $C^\infty$  sur  $U$ . On suppose que pour des constantes  $a > 0$  et  $b > 0$  on a

$$\forall (x, y) \in U, \forall r > 0, f(r^a x, r^b y) = r^a f(x, y) \text{ et } g(r^a x, r^b y) = r^b g(x, y).$$

(1) Montrer que  $\phi(u, v) = (e^{au}, e^{bv})$  est un difféomorphisme  $C^\infty$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  sur  $U$ .

(2) Exprimer le champ de vecteur  $\phi_\# X$ , autrement dit quelle est l'équation vérifiée par la courbe  $C^1 : t \mapsto (u(t), v(t))$  pour que la courbe  $t \mapsto c(t) = \phi(u(t), v(t))$  soit solution de  $c'(t) = X(c(t))$ .

(3) Trouver une intégrale première du champ de vecteurs

$$X = (-\sqrt{x^2 + y}, 4(y + x^2)).$$

(On la cherchera dans les coordonnées  $(u, v)$  sous la forme  $u - H(v)$ )

Indications ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 3.1.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 3.2.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 3.3.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 3.4.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 3.5.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 3.6.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 3.7.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Corrigé exercice 3.1.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 3.2.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 3.3.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 3.4.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 3.5.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 3.6.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 3.7.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

### Extrema et Calcul des variations

**4.1. Extrema liés.** — On rappelle qu'une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un espace topologique  $X$  admet (ou présente) un minimum local en  $x_0 \in X$  s'il y a  $V$  un voisinage ouvert de  $x_0$  tel que

$$\forall y \in V, f(y) \geq f(x_0).$$

On dit que ce minimum local est strict si sur  $V \setminus \{x_0\}$   $f(y) > f(x_0)$ .

On dit que ce minimum est global si on peut prendre  $V = X$ .

**Proposition 4.1.** — Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ . Si  $f$  admet un minimum local en  $x_0$  alors  $Df(x_0) = 0$ .

Si  $f \in C^2(U, \mathbb{R})$  vérifie  $Df(x_0) = 0$  et si la forme bilinéaire symétrique  $D^2f(x_0)$  est définie positive alors  $f$  admet un minimum local strict en  $x_0$ .

On cherche maintenant un critère analogue lorsque l'on considère la restriction de  $f$  à une partie de  $\mathbb{R}^n$  définie par des équations.

**Théorème 4.2.** — On suppose que  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^p$

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_p(x))$$

est de classe  $C^1$  et qu'en  $x_0 \in U$ ,  $g(x_0) = 0$  et que  $Dg(x_0)$  est surjective. On considère  $\Sigma = g^{-1}(0)$  et  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ , si la restriction de  $f$  à  $\Sigma$  admet un minimum local en  $x_0$  alors il y a des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  (appelés multiplicateurs de Lagrange) tels que

$$Df(x_0) = \sum_{i=1}^p \lambda_i Dg_i(x_0).$$

*Démonstration.* — On commence par démontrer qu'il y a un voisinage ouvert  $V$  de  $x_0$  et  $\Phi : B(0, \varepsilon) \rightarrow V$  un  $C^1$  difféomorphisme tel que

$$g \circ \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p) \text{ et } \Phi(0) = x_0.$$

Puisque  $Dg(x_0)$  est surjective, les  $p$  formes linéaires  $Dg_1(x_0), \dots, Dg_p(x_0)$  sont linéairement indépendantes, on peut compléter cette famille en

$$(Dg_1(x_0), \dots, Dg_p(x_0), l_{p+1}, \dots, l_n)$$

pour obtenir une base de  $(\mathbb{R}^n)^*$ . On considère alors l'application :

$$\Psi(x) = (g_1(x), \dots, g_p(x), l_{p+1}(x - x_0), \dots, l_n(x - x_0)).$$

C'est une application de classe  $C^1$  et puisque

$$D\Psi(x_0)(h) = (Dg_1(x_0)(h), \dots, Dg_p(x_0)(h), l_{p+1}(h), \dots, l_n(h)),$$

la différentielle de  $\Psi$  en  $x_0$  est bien inversible. On peut utiliser le théorème d'inversion locale pour affirmer qu'il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $x_0$ , tel que  $\Psi : V \rightarrow B(0, \varepsilon)$  soit un  $C^1$  difféomorphisme. Le difféomorphisme réciproque  $\Phi = \Psi^{-1}$  convient bien, car si  $(x_1, \dots, x_n) \in B(0, \varepsilon)$  alors

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_n) &= \Psi \circ \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (g_1 \circ \Phi(x), \dots, g_p \circ \Phi(x), l_{p+1}(\Phi(x) - x_0), \dots, l_n(\Phi(x) - x_0)). \end{aligned}$$

D'où  $g_i \circ \Phi(x) = x_i$ .

Maintenant on sait que  $\Sigma \cap V = \Phi(\{O_{\mathbb{R}^p}\} \times \mathbb{R}^{n-p}) \cap B(0, \varepsilon)$ . En conséquence la restriction de  $f$  à  $\Sigma$  admet un minimum local en  $x_0$  si et seulement si la fonction  $(y_1, \dots, y_{n-p}) \mapsto f \circ \Phi(0, \dots, 0, y_1, \dots, y_{n-p})$  admet un minimum local en 0. Et si on note  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , alors on doit avoir  $D(f \circ \Phi)(0)(e_i) = Df(x_0) \circ D\Phi(0)(e_i) = 0$  pour tout  $i = p+1, \dots, n$ . Notons  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est la base duale de la base canonique, alors on doit avoir :

$$\begin{aligned} Df(x_0) \circ D\Phi(0) &= \sum_{i=1}^n (Df(x_0)(D\Phi(0)(e_i))) e_i^* \\ &= \sum_{i=1}^p (Df(x_0)(D\Phi(0)(e_i))) e_i^* \end{aligned}$$

Notons  $\lambda_i = Df(x_0)(D\Phi(0)(e_i))$ , nous obtenons

$$Df(x_0) = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i^* \circ D\Phi(0)^{-1}.$$

mais par construction

$$e_i^* \circ D\Phi(0)^{-1} = e_i^* \circ D\Psi(x_0)$$

est la différentielle de la fonction  $i^{\text{ième}}$  coordonnée de  $\Psi$  en  $x_0$ , pour  $i \leq p$ , c'est exactement  $Dg_i(x_0)$ .  $\square$

Réciproquement :

**Proposition 4.3.** — *Si on suppose que  $g$  et  $f$  sont de classe  $C^2$ , on note toujours  $\Sigma = g^{-1}(0)$  et  $x_0 \in \Sigma$ . S'il existe des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  tels que*

- $Df(x_0) = \sum_{i=1}^p \lambda_i Dg_i(x_0)$
- $D^2f(x_0) - \sum_{i=1}^p \lambda_i D^2g_i(x_0)$  est définie positive, alors la restriction de  $f$  à  $\Sigma$  admet un minimum local strict en  $x_0$ .

C'est évident car alors la fonction  $f(x) - \sum_{i=1}^p \lambda_i Dg_i(x)$  présente un minimum local strict en  $x_0$  sa restriction à  $\Sigma$  aussi.

**4.1.1. Deux exemples.** — *Premier exemple* : On considère  $\mathbb{S}^{n-1} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_i x_i^2 = 1\}$  et si  $A$  est une matrice symétrique on lui

associe la fonction  $f(x) = \langle Ax, x \rangle$ <sup>(17)</sup>. Nous avons  $\mathbb{S}^{n-1} = g^{-1}(\{0\})$  où

$$g(x) = \langle x, x \rangle - 1 = \sum_i x_i^2 - 1$$

est une fonction  $C^\infty$  Nous avons  $Dg(x)(h) = 2 \langle x, h \rangle$ . Cette forme linéaire est bien surjective si  $x \neq 0$ . Nous savons aussi que

$$Df(x)(h) = \langle Ax, h \rangle + \langle Ah, x \rangle = 2 \langle Ax, h \rangle$$

car  $A$  est symétrique.

Ainsi si la restriction de  $f$  à la sphère unité  $\mathbb{S}^{n-1}$  admet un minimum local en  $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$  alors il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \langle Ax_0, h \rangle = \lambda \langle x_0, h \rangle.$$

Ce qui signifie que  $Ax_0 = \lambda x_0$  i.e. que  $x_0$  est un vecteur propre de  $A$ .

Par ailleurs, on sait que la restriction de  $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue définie sur un compact, elle atteint donc ces bornes, en particulier il existe  $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$  où  $f|_{\mathbb{S}^{n-1}}$  admet un minimum global, et ce  $x_0$  sera forcément un vecteur propre de  $A$ .

*Second exemple* : Si on suppose que  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  est une surface  $C^\infty$  et que  $m_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$  on peut définir la fonction  $f(m) = \|\overrightarrow{mm_0}\|^2$ , cette fonction est bien sur  $C^\infty$ . On suppose que  $m \in \Sigma$  est un point de  $\Sigma$  réalisant l'infimum de la restriction de  $f$  à  $\Sigma$ , i.e. la distance de  $m_0$  à  $\Sigma$  est  $\|\overrightarrow{mm_0}\|$ . Un voisinage de  $m$  dans  $\Sigma$  est donné par une équation  $g = 0$  où  $g$  est une fonction  $C^\infty$  définie sur un voisinage ouvert  $V$  de  $m$  dans  $\mathbb{R}^3$  à valeurs réelles et  $Dg(m) \neq 0$ . Alors la restriction de  $f$  à  $\Sigma \cap V$  admet aussi un minimum global en  $m$  : on sait alors qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^3, Df(m)(h) = \lambda Dg(m)(h)$$

Mais puisque  $Df(m)(h) = 2 \langle \overrightarrow{mm_0}, h \rangle$  cette condition entraîne (et même est équivalente) au fait que

$$\overrightarrow{mm_0} \perp \ker Dg(m) = \overrightarrow{T_m \Sigma}.$$

<sup>(17)</sup>On a ici identifié  $A$  et l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  obtenu en identifiant les matrices colonnes avec  $\mathbb{R}^n$ .

Ainsi si un point  $m \in S$  est le point de  $S$ , le plus proche de  $m_0$  alors la droite  $(m, m_0)$  est orthogonale au plan tangent à  $S$  en  $m$ .

## 4.2. Problème variationnel. —

4.2.1. *Motivation : le chemin le plus court pour joindre deux points d'une surface.* — Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface  $C^\infty$  et  $M_0, M_1 \in S$ , on définit

$$d(M_0, M_1) = \inf \left\{ L(\gamma) := \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt, \gamma \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^3), \right. \\ \left. \begin{aligned} \gamma([0, 1]) &\subset S, \\ \gamma(0) &= M_0, \gamma(1) = M_1 \end{aligned} \right\}$$

l'infimum des courbes  $C^1$  tracée sur  $S$  et joignant  $M_0$  à  $M_1$ .

On voudrait calculer cette distance  $d(M_0, M_1)$  et trouver le(s) éventuel(s) chemin(s) le(s) plus court pour joindre  $M_0$  à  $M_1$ . Un premier problème est que la longueur d'une courbe est indépendante du paramétrage, c'est à dire qu'elle est indépendante de la vitesse à laquelle on parcourt cette courbe. En particulier, si ce infimum est atteint, il est atteint par une infinité de courbes. Pour remédier à cet inconvénient, on introduit l'énergie :

$$E(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous savons que

$$L(\gamma)^2 \leq E(\gamma)$$

avec égalité si et seulement si la vitesse  $\|\dot{\gamma}(t)\|$  est constante. On obtient en particulier

$$(14) \quad d(M_0, M_1)^2 \leq \inf \left\{ E(\gamma), \gamma \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^3), \right. \\ \left. \begin{aligned} \gamma([0, 1]) &\subset S, \gamma(0) = M_0, \gamma(1) = M_1 \end{aligned} \right\}.$$

Si  $\gamma$  est une courbe dont la vitesse ne s'annule pas on verra plus loin comment la reparametrer pour que la vitesse soit constante. En général, on peut reparametrer  $\gamma$  pour que sa vitesse soit presque constante : fixons d'abord  $\varepsilon > 0$ , on introduit alors

$$\varphi(t) = \frac{\int_0^t \|\dot{\gamma}(s)\| ds + \varepsilon t}{L(\gamma) + \varepsilon}.$$

alors  $\varphi$  est une fonction  $C^1$ , sa dérivée

$$\varphi'(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(t)\| + \varepsilon}{L(\gamma) + \varepsilon}$$

est strictement positive et  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(1) = 1$ . On peut considérer la courbe  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi^{-1}$ . Si la courbe  $\gamma$  est  $C^1$  tracée sur  $S$  et joint les points  $M_0$  et  $M_1$ , il en est de même de  $\tilde{\gamma}$ , de plus

$$L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma).$$

On a aussi

$$\frac{d}{dt} \tilde{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(\varphi^{-1}(t)) \frac{d}{dt} \varphi^{-1}(t)$$

où

$$\frac{d}{dt} \varphi^{-1}(t) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} = \frac{L(\gamma) + \varepsilon}{\|\dot{\gamma}(\varphi^{-1}(t))\| + \varepsilon}.$$

Ainsi

$$E(\tilde{\gamma}) = (L(\gamma) + \varepsilon)^2 \int_0^1 \frac{\|\dot{\gamma}(\varphi^{-1}(t))\|^2}{(\|\dot{\gamma}(\varphi^{-1}(t))\| + \varepsilon)^2} dt \\ \leq (L(\gamma) + \varepsilon)^2$$

Si on suppose que  $\gamma$  est telle que  $L(\gamma) \leq d(M_0, M_1) + \varepsilon$ . alors on obtient

$$E(\tilde{\gamma}) \leq (L(\gamma) + \varepsilon)^2 \leq (d(M_0, M_1) + 2\varepsilon)^2.$$

on obtient l'inégalité :

$$(15) \quad (d(M_0, M_1) + 2\varepsilon)^2 \geq \inf \left\{ E(\gamma), \gamma \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^3), \right. \\ \left. \begin{aligned} \gamma([0, 1]) &\subset S, \gamma(0) = M_0, \gamma(1) = M_1 \end{aligned} \right\}.$$

Ceci est valable pour tout  $\varepsilon > 0$  ainsi avec les deux inégalités (14) et (15), nous obtenons :

$$d(M_0, M_1)^2 = \inf \left\{ E(\gamma), \gamma \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^3), \right. \\ \left. \begin{aligned} \gamma([0, 1]) &\subset S, \gamma(0) = M_0, \gamma(1) = M_1 \end{aligned} \right\}.$$

Supposons que  $S$  soit donnée par une paramétrisation  $P : U \rightarrow S$ ,  $U$  étant un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $P(m_0) = M_0$  et  $P(m_1) = M_1$ , puisque toute

courbe tracée sur  $S$  est de la forme  $\gamma(t) = P(u(t), v(t))$  et que dans ce cas là

$$\begin{aligned}\|\dot{\gamma}(t)\|^2 &= \left\| \dot{u}(t) \frac{\partial P}{\partial u}(u(t), v(t)) + \dot{v}(t) \frac{\partial P}{\partial v}(u(t), v(t)) \right\|^2 \\ &= E(u(t), v(t))(\dot{u}(t))^2 + 2F(u(t), v(t))\dot{u}(t)\dot{v}(t) + G(u(t), v(t))(\dot{v}(t))^2,\end{aligned}$$

où les fonctions  $E$ ,  $F$  et  $G$  sont définies par

$$E(u, v) = \left\langle \frac{\partial P}{\partial u}(u, v), \frac{\partial P}{\partial u}(u, v) \right\rangle, \quad G(u, v) = \left\langle \frac{\partial P}{\partial v}(u, v), \frac{\partial P}{\partial v}(u, v) \right\rangle$$

$$\text{et } F(u, v) = \left\langle \frac{\partial P}{\partial u}(u, v), \frac{\partial P}{\partial v}(u, v) \right\rangle.$$

Si

$$J(u, v, \xi, \eta) = E(u, v)\xi^2 + 2F(u, v)\xi\eta + G(u, v)\eta^2,$$

Alors

$$d(M_0, M_1)^2 = \inf \left\{ \mathcal{J}(c), c \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^2), c([0, 1]) \subset U, c(0) = m_0, c(1) = m_1 \right\}$$

où pour  $c(t) = (u(t), v(t))$  on a posé

$$\mathcal{J}(c) = \int_0^1 J(u(t), v(t), \dot{u}(t), \dot{v}(t)) dt.$$

On va maintenant considérer un problème un peu plus général :

**4.2.2. Equation d'Euler-Lagrange.** — Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $J \in C^1([0, 1] \times U \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  si  $m_0, m_1 \in U$  on cherche à minimiser  $\mathcal{J}(c) = \int_0^1 J(t, c(t), \dot{c}(t)) dt$  parmi toutes courbes  $C^1$  de  $U$  joignant  $m_0$  à  $m_1$ . Introduisons

$$\Omega_{m_0, m_1} = \left\{ c \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^n), c([0, 1]) \subset U, c(0) = m_0, c(1) = m_1 \right\}.$$

**Théorème 4.4.** — Si  $c$  est un minimum local de

$$\mathcal{J} : \Omega_{m_0, m_1} \rightarrow \mathbb{R}$$

alors l'application de  $[0, 1]$  dans  $(\mathbb{R}^n)^*$  le dual de  $\mathbb{R}^n$  qui à  $t \in [0, 1]$  associe  $D_3J(t, c(t), \dot{c}(t))$  est de classe  $C^1$  et  $c$  vérifie les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} D_3J(t, c(t), \dot{c}(t)) = D_2J(t, c(t), \dot{c}(t)).$$

Ici

$$D_2J(t, x, \xi)(h) = D_xJ(t, x, \xi)(h) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} J(t, x + sh, \xi)$$

et

$$D_3J(t, x, \xi)(h) = D_\xi J(t, x, \xi)(h) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} J(t, x, \xi + sh).$$

Les équations d'Euler-Lagrange se composent donc de  $n$  équations si

$$(t, x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto J(t, x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$$

alors ces équations sont

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial \xi_i}(t, c(t), \dot{c}(t)) = \frac{\partial J}{\partial x_i}(t, c(t), \dot{c}(t)), \quad i = 1, \dots, n$$

*Démonstration.* — Soit  $h \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$  telle que  $h(0) = h(1) = 0$  alors pour  $|s|$  assez petit  $c + sh \in \Omega_{m_0, m_1}$ . Ainsi 0 est un minimum local de la fonction  $s \mapsto \mathcal{J}(c + sh)$ , on a donc

$$D\mathcal{J}(c).h = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \mathcal{J}(c + sh) = 0.$$

Mais nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \mathcal{J}(c + sh) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} J(t, c(t) + sh(t), \dot{c}(t) + \dot{sh}(t)) dt \\ &= \int_0^1 D_2J(t, c(t), \dot{c}(t))(h(t)) + D_3J(t, c(t), \dot{c}(t))(\dot{h}(t)) dt.\end{aligned}$$

En prenant  $h(t) = f(t)e_i$  où  $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$  et  $f(0) = f(1) = 0$ , on obtient :

$$(16) \quad \int_0^1 \frac{\partial J}{\partial x_i}(t, c(t), \dot{c}(t))f(t) + \frac{\partial J}{\partial \xi_i}(t, c(t), \dot{c}(t))\dot{f}(t) dt = 0.$$

Le lemme suivant dit de "Du Bois-Reymond" permet de conclure :

**Lemme 4.5.** — Si  $u, v \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$  sont tels que pour toutes les fonctions  $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$  vérifiant  $f(0) = f(1) = 0$  alors

$$\int_0^1 [u(t)f(t) + v(t)\dot{f}(t)] dt = 0$$

alors  $v$  est de classe  $C^1$  et  $v' = u$ .

*Démonstration du lemme.* — Si  $v$  était de classe  $C^1$ , il suffirait d'intégrer par parties pour obtenir  $\forall f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$   $f(0) = f(1) = 0$

$$\int_0^1 [u(t) - v'(t)]f(t)dt = 0.$$

Ici on intègre par parties

$$\int_0^1 u(t)f(t)dt = - \int_0^1 U(t)\dot{f}(t)dt.$$

où  $U(t) = \int_0^t u(s)ds + k$  est une primitive quelconque de  $u$ . On obtient donc

$$\forall f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = f(1) = 0, \int_0^1 [-U(t) + v(t)]\dot{f}(t)dt = 0.$$

On veut maintenant choisir  $f$  telle que  $\dot{f}(t) = -U(t) + v(t)$ ; par exemple  $f(t) = \int_0^t [-U(s) + v(s)]ds$ , on a bien sur  $f(0) = 0$  et on peut toujours choisir  $k$  afin que

$$0 = f(1) = \int_0^1 [-U(s) + v(s)] ds = \int_0^1 \left[ \left( - \int_0^s u(\tau)d\tau \right) + v(s) \right] ds - k = 0.$$

D'où on obtient  $U = v$  en particulier  $v$  est  $C^1$  et  $v' = u$ . □

□

**Remarque 4.6.** — Si on cherche à minimiser  $\mathcal{J}(c)$  parmi toutes courbes  $C^1$  de  $U$ , alors on aurait obtenu en plus

$$D_3 J(t, c(t), \dot{c}(t)) = 0 \text{ pour } t = 0, 1.$$

En effet, nous aurions obtenu les équations (16) mais pour toutes les fonctions  $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ , l'adaptation du lemme de Du Bois-Reymond :

**Lemme 4.7.** — Si  $u, v \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$  sont tels que pour toutes les fonctions  $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$  on a :

$$\int_0^1 [u(t)f(t) + v(t)\dot{f}(t)]dt = 0$$

alors  $v$  est de classe  $C^1$  et  $v' = u$ , de plus  $v(t) = 0$  pour  $t = 0, 1$ .

est évidente, car on a déjà montré que  $v' = u$ , de plus en intégrant par parties on obtient alors

$$\forall f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}), f(1)v(1) - f(0)v(0) = 0.$$

D'où on déduit facilement le résultat.

*Un exemple :* On considère

$$\mathcal{J}(f) = \int_0^1 (1 + [f'(t)]^2)^{\alpha/2} dt$$

et on étudie

$$\inf\{\mathcal{J}(f), f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = 0, f(1) = 1\}.$$

Ici  $J(t, x, \xi) = (1 + \xi^2)^{\alpha/2}$ . En conséquence si  $f_\alpha$  est candidat à réaliser cet infimum alors il doit vérifier l'équation d'Euler-Lagrange. Puisque

$$\frac{\partial}{\partial \xi} J(t, x, \xi) = (1 + \xi^2)^{\alpha/2-1} \alpha \xi$$

et que

$$\frac{\partial}{\partial x} J(t, x, \xi) = 0,$$

il existe donc une constante  $C$  telle que sur  $[0, 1]$

$$(1 + f'_\alpha(t)^2)^{\alpha/2-1} \alpha f'_\alpha(t) = C$$

ceci implique que  $f'_\alpha$  est une fonction constante mais compte tenu des conditions limites on obtient  $f_\alpha(t) = t$  et pour cette fonction

$$\mathcal{J}(f_\alpha) = 2^{\alpha/2}.$$

– **Lorsque  $\alpha \geq 1$  :** on peut montrer que c'est effectivement la fonction qui réalise ce minimum : soit donc  $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$  vérifiant  $f(0) = 0, f(1) = 1$ , on considère la courbe  $c(t) = (t, f(t))$  on a

$$\|\dot{c}(t)\| = (1 + f'(t)^2)^{1/2}$$

et donc

$$2 = \langle (1, 1), \int_0^1 \dot{c}(t)dt \rangle \leq \sqrt{2} \left( \int_0^1 \|\dot{c}(t)\| dt \right)^{1/2}$$

mais grâce à l'inégalité de Hölder, nous obtenons :

$$\int_0^1 \|\dot{c}(t)\| dt \leq \left( \int_0^1 \|\dot{c}(t)\|^\alpha dt \right)^{1/\alpha}$$

Et donc :

$$\mathcal{J}(f) = \int_0^1 \|\dot{c}(t)\|^\alpha dt \geq 2^{\alpha/2}.$$

En étudiant les cas d'égalités dans toutes ces inégalités, on montre facilement que l'on a forcément

$$\mathcal{J}(f) = 2^{\alpha/2} \Leftrightarrow f = f_\alpha.$$

– **Lorsque  $\alpha \leq 1$  :**  $f_\alpha$  ne réalise pas cet infimum. En fait on montre que

$$1 = \inf \left\{ \int_0^1 (1 + f'(t)^2)^{\alpha/2} dt, f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = 0, f(1) = 1 \right\}.$$

Il est clair que cet infimum est plus grand que 1 et que pour  $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$  alors

$$\mathcal{J}(f) > 1.$$

On considère une fonction  $u \in C^1(\mathbb{R})$  telle que  $u(t) = 0$  si  $t \leq 1/2$  et  $u(t) = 1$  si  $t \geq 1$ , alors pour  $\delta > 0$ , la fonction  $u_\delta$  définie par

$$u_\delta(t) = u\left(\frac{t-1+\delta}{\delta}\right)$$

vaut zéro si  $t \leq 1 - \delta/2$  et elle vaut 1 si  $t \geq 1$ . En conséquence pour  $\delta \in ]0, 1]$  alors  $u_\delta(0) = 0$  et  $u_\delta(1) = 1$  mais

$$\mathcal{J}(u_\delta) = (1 - \delta/2) + \int_{1-\delta/2}^1 \left(1 + \frac{1}{\delta^2} u' \left(\frac{t-1+\delta}{\delta}\right)\right)^{\alpha/2} dt$$

D'où :

$$1 \leq \mathcal{J}(u_\delta) \leq 1 + \frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{1}{\delta^2} M^2\right)^{\alpha/2}$$

où  $M = \sup_{t \in \mathbb{R}} |u'(t)|$ . Et donc puisque  $\alpha \leq 1$ , on obtient

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{J}(u_\delta) = 1.$$

4.2.3. Avec une contrainte. — On peut aussi montrer un résultat du type extrema liés : on suppose de plus que  $K \in C^1([0, 1] \times U \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  on considère la fonctionnelle :

$$\mathcal{K}(c) = \int_0^1 K(t, c(t), \dot{c}(t)) dt$$

Et on définit

$$\Sigma = \{c \in \Omega_{m_0, m_1}, \mathcal{K}(c) = 0\}.$$

Le résultat est le suivant :

**Théorème 4.8.** — On suppose que  $c \in \Sigma$  est un minimum local de  $\mathcal{J} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  et on suppose de plus qu'il existe  $k \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$  avec  $k(0) = k(1) = 0$  et

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \mathcal{K}(c + sk) &= "DK(c)k" \\ &= \int_0^1 D_2K(t, c(t), \dot{c}(t))(k(t)) + D_3K(t, c(t), \dot{c}(t))(\dot{k}(t)) dt \neq 0 \end{aligned}$$

Alors il y a une constante réelle  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$t \mapsto D_3J(t, c(t), \dot{c}(t)) - \lambda D_3K(t, c(t), \dot{c}(t))$$

soit de classe  $C^1$  et

$$\frac{d}{dt} [D_3J(t, c(t), \dot{c}(t)) - \lambda D_3K(t, c(t), \dot{c}(t))] = D_2J(t, c(t), \dot{c}(t)) - \lambda D_2K(t, c(t), \dot{c}(t)).$$

*Démonstration.* — On montre que si  $h \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$  vérifie  $h(0) = h(1) = 0$  et

$$\int_0^1 D_2K(t, c(t), \dot{c}(t))(h(t)) + D_3K(t, c(t), \dot{c}(t))(\dot{h}(t)) dt = 0$$

alors il existe une fonction  $s \mapsto y(s)$ ,  $C^1$  définie dans un voisinage de 0 telle que

- $y'(0) = 0$
- la fonction  $t \mapsto c(t) + sh(t) + y(s)k(t)$  est dans  $\Sigma$

Ceci se montre en utilisant le théorème des fonctions implicites appliqué à  $F(s, y) = \mathcal{K}(c + sh + yk)$  au voisinage de  $(0, 0)$ . Cette fonction est bien de classe  $C^1$  et nulle en  $(0, 0)$  de plus

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = \int_0^1 D_2K(t, c(t), \dot{c}(t))(k(t)) + D_3K(t, c(t), \dot{c}(t))(\dot{k}(t)) dt \neq 0.$$

Le théorème des fonction implicite nous garantit alors l'existence de cette fonction  $y$  telle que  $\mathcal{K}(c + sh + y(s)k) = 0$ ; et puisque

$$\frac{\partial F}{\partial s}(0, 0) = \int_0^1 D_2K(t, c(t), \dot{c}(t))(h(t)) + D_3K(t, c(t), \dot{c}(t))(\dot{h}(t))dt = 0$$

on obtient bien  $y'(0) = 0$ . Alors on écrit que

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{J}(c + sh + y(s)k) = 0$$

et compte tenu du fait que  $y'(0) = 0$ , on obtient

$$\int_0^1 D_2J(t, c(t), \dot{c}(t))(h(t)) + D_3J(t, c(t), \dot{c}(t))(\dot{h}(t))dt = 0.$$

On a donc montré que sur l'espace vectoriel  $E = \{h \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^n), h(0) = h(1) = 0\}$  le noyau de la formes linéaire :

$$h \mapsto \int_0^1 D_2K(t, c(t), \dot{c}(t))(h(t)) + D_3K(t, c(t), \dot{c}(t))(\dot{h}(t))dt$$

est contenu dans le noyau de la forme linéaire :

$$h \mapsto \int_0^1 D_2J(t, c(t), \dot{c}(t))(h(t)) + D_3J(t, c(t), \dot{c}(t))(\dot{h}(t))dt.$$

Par hypothèse la première forme linéaire est non nulle, ces deux formes linéaires sont donc proportionnelles, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall h \in E,$$

$$\int_0^1 D_2J(t, c(t), \dot{c}(t))(h(t)) + D_3J(t, c(t), \dot{c}(t))(\dot{h}(t))dt = \lambda \left( \int_0^1 D_2K(t, c(t), \dot{c}(t))(h(t)) + D_3K(t, c(t), \dot{c}(t))(\dot{h}(t))dt \right).$$

On conclut alors avec le lemme de Du Bois-Reymond.  $\square$

*Un exemple : le problème de la reine Didon* : Selon la légende Grecque, Didon princesse de Tyr (- IX s avant JC) s'enfuit de Phénicie après que son frère Pygmalion eut assassiné son mari, son exil la mena sur les cotes de l'actuel Tunisie où le roi local lui accorda de fonder une cité portuaire sur la terre que pourrait contenir une outre. Didon découpa l'outre pour en faire une longue lanière et délimita ainsi les murs de la futur Carthage.

Le problème mathématique est le suivant : à une fonction positive  $f$  de classe  $C^1$  on associe la longueur de son graphe

$$L(f) = \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt.$$

La mer est la partie du plan correspondant aux ordonnées négatives et la ville est située dessous le graphe de  $f$ , on suppose que  $f(0) = f(1) = 0$ . La superficie de cette ville est donc

$$A(f) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Pour obtenir la plus grande ville possible, il faut donc déterminer l'aire maximale possible lorsque la longueur du graphe est fixée égale à  $l$ .

$$\sup\{A(f), f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = f(1) = 0, L(f) = l\}.$$

Ici on a donc :  $J(t, x, \xi) = x$  et  $K(t, x, \xi) = \sqrt{1 + \xi^2}$ , on sait donc qu'il existe une constante  $\lambda$  telle que

$$\frac{d}{dt} \left( 0 - \lambda \frac{f'(t)}{\sqrt{1 + [f'(t)]^2}} \right) = 1 - 0$$

En particulier  $\lambda \neq 0$  et

$$\frac{f'(t)}{\sqrt{1 + [f'(t)]^2}} = -(t - t_0)/\lambda$$

pour un certain réel  $t_0$ . d'où

$$[f'(t)]^2(1 - [(t - t_0)/\lambda]^2) = [(t - t_0)/\lambda]^2.$$

et

$$\frac{1}{\lambda} f'(t) = \pm \frac{(t - t_0)/\lambda^2}{\sqrt{1 - [(t - t_0)/\lambda]^2}} = \mp \frac{d}{dt} \sqrt{1 - [(t - t_0)/\lambda]^2},$$

d'où

$$\frac{(f(t) - y)^2}{\lambda^2} + \frac{(t - t_0)^2}{\lambda^2} = 1.$$

La courbe  $f$  décrit donc un arc de cercle. On peut montrer que cet arc de cercle réalise bien la maximum.

4.2.4. *Retour aux surfaces : géodésiques.* — On revient maintenant à notre problème de départ. Si  $\gamma = P \circ c$  minimise  $E|_{\Omega_{M_0, M_1}}$  où on a noté  $\Omega_{M_0, M_1}$  l'ensemble des courbes  $C^1$  tracées sur  $S$  qui joignent  $M_0$  à  $M_1$ . Avec les mêmes notations que précédemment le théorème (4.4) nous dit que le fonction

$$t \mapsto E(u(t), v(t))\dot{u}(t) + F(u(t), v(t))\dot{v}(t)$$

$$\text{et } t \mapsto F(u(t), v(t))\dot{u}(t) + G(u(t), v(t))\dot{v}(t)$$

sont  $C^1$ .

Or nous avons

$$\begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(u, v)\dot{u} + F(u, v)\dot{v} \\ F(u, v)\dot{u} + G(u, v)\dot{v} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} E(u, v) & -F(u, v) \\ -F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(u, v)\dot{u} + F(u, v)\dot{v} \\ F(u, v)\dot{u} + G(u, v)\dot{v} \end{pmatrix}$$

et les fonctions  $t \mapsto u(t)$ ,  $t \mapsto v(t)$  sont de classe  $C^2$ , puis cette dernière identité permet d'affirmer qu'elles sont  $C^3$  et donc  $C^\infty$  grâce à une récurrence immédiate.

Puisque

$$E(u(t), v(t))\dot{u}(t) + F(u(t), v(t))\dot{v}(t) = \left\langle \dot{\gamma}(t), \frac{\partial P}{\partial u} \right\rangle$$

$$\text{et } F(u(t), v(t))\dot{u}(t) + G(u(t), v(t))\dot{v}(t) = \left\langle \dot{\gamma}(t), \frac{\partial P}{\partial v} \right\rangle$$

on peut donc réécrire les équations d'Euler-Lagrange sous la forme

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\langle \frac{d}{dt} \gamma(t), \frac{\partial P}{\partial u}(u(t), v(t)) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 P}{\partial u^2}(u(t), v(t))\dot{u} + \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v}(u(t), v(t))\dot{v}, \dot{\gamma}(t) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial u}(u(t), v(t)), \dot{\gamma}(t) \right\rangle \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\langle \frac{d}{dt} \gamma(t), \frac{\partial P}{\partial v}(u(t), v(t)) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v}(u(t), v(t))\dot{u} + \frac{\partial^2 P}{\partial v^2}(u(t), v(t))\dot{v}, \dot{\gamma}(t) \right\rangle \\ & \left\langle \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial v}(u(t), v(t)), \dot{\gamma}(t) \right\rangle \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{d}{dt} \gamma(t), \frac{\partial P}{\partial u}(u(t), v(t)) \right\rangle &= \left\langle \frac{d^2}{dt^2} \gamma(t), \frac{\partial P}{\partial u}(u(t), v(t)) \right\rangle \\ &+ \left\langle \dot{\gamma}(t), \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial u}(u(t), v(t)) \right\rangle \end{aligned}$$

et que de même :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{d}{dt} \gamma(t), \frac{\partial P}{\partial v}(u(t), v(t)) \right\rangle &= \left\langle \frac{d^2}{dt^2} \gamma(t), \frac{\partial P}{\partial v}(u(t), v(t)) \right\rangle \\ &+ \left\langle \dot{\gamma}(t), \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial v}(u(t), v(t)) \right\rangle \end{aligned}$$

Les équations d'Euler-Lagrange signifient exactement

$$\left\langle \frac{d^2}{dt^2} \gamma(t), \frac{\partial P}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{d^2}{dt^2} \gamma(t), \frac{\partial P}{\partial v} \right\rangle = 0$$

C'est à dire que

$$\frac{d^2}{dt^2} \gamma(t)$$

est orthogonal au plan tangent à la surface en  $\gamma(t)$ .

**Définition 4.9.** — On appelle géodésique d'une surface  $S \subset \mathbb{R}^3$ , une courbe  $\gamma$  tracée sur  $S$ ,  $C^2$  (et en fait  $C^\infty$ ) telle que

$$\forall t \quad \ddot{\gamma}(t) \perp \overrightarrow{T_\gamma(t)S}.$$

C'est une courbe dont l'accélération est normale. Une géodésique est donc une courbe candidate pour réaliser le minimum de l'énergie  $E$ .

**Proposition 4.10.** — Une géodésique est parcourue à vitesse constante.

— Si  $x \in S$  et  $v \in \overrightarrow{T_x S}$ , il existe une unique géodésique  $\gamma$  telle que  $\gamma(0) = x$  et  $\dot{\gamma}(0) = v$ .

*Démonstration.* — La première assertion est évidente puisque si  $\gamma$  est une géodésique alors

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 2 \langle \ddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0,$$

puisque  $\ddot{\gamma}(t) \perp \dot{\gamma}(t)$ .

Pour la seconde on se place dans une paramétrisation d'un voisinage de  $x$  : on cherche  $\gamma(t) = P(u(t), v(t))$ . On réécrit les équations d'Euler-Lagrange des géodésiques :

$$\begin{cases} E\ddot{u} + F\ddot{v} = -\langle \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \dot{u}^2 + 2\frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \dot{u}\dot{v} + \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \dot{v}^2, \frac{\partial P}{\partial u} \rangle \\ F\ddot{u} + G\ddot{v} = -\langle \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \dot{u}^2 + 2\frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \dot{u}\dot{v} + \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \dot{v}^2, \frac{\partial P}{\partial v} \rangle \end{cases}$$

En inversant la matrice  $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ , on obtient un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{u} = \xi \\ \dot{v} = \eta \\ \dot{\xi} = A_1(u, v)\xi^2 + B_1(u, v)\xi\eta + C_1(u, v)\eta^2 \\ \dot{\eta} = A_2(u, v)\xi^2 + B_2(u, v)\xi\eta + C_2(u, v)\eta^2 \end{cases}$$

où les fonctions  $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$  sont  $C^\infty$ . Ce résultat est donc uniquement une application du théorème de Cauchy-Lipschitz.  $\square$

*4.2.5. Géodésiques sur les surfaces de révolutions.* — *Géodésique de la sphère* :  $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3, \|x\|^2 = 1\}$ . Soit  $\gamma : I \mapsto \mathbb{S}^2$  une géodésique. Alors il existe une fonction  $\lambda(t) = \langle \ddot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle$  telle que

$$\ddot{\gamma}(t) = \lambda(t)\gamma(t).$$

En effet la droite perpendiculaire au plan tangent à  $\mathbb{S}^2$  en  $\gamma(t)$  est le vecteur  $\overrightarrow{0\gamma(t)}$ . Alors puisque  $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 1$ , en dérivant deux fois cette identité on obtient :

$$\langle \ddot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle + \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$$

et puisque  $t \mapsto \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle$  est une fonction constante, la fonction  $\lambda$  est aussi une constante négative  $\lambda = -\langle \dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0) \rangle = -w^2$ . Ainsi  $\gamma$  est solution de l'équation différentielle :

$$\ddot{\gamma} + w^2\gamma = 0$$

et donc

$$\gamma(t) = \cos(wt)\gamma(0) + \frac{\sin(wt)}{w}\dot{\gamma}(0).$$

$\gamma$  parcourt donc un grand cercle : le cercle qui est l'intersection de la sphère  $\mathbb{S}^2$  avec le plan passant par  $0, \gamma(0)$  et dont la direction contient  $\dot{\gamma}(0)$ .

*Le cas général* : Soit  $s \mapsto (x(s), y(s))$  une courbe plane  $C^\infty$  paramétrée par longueur d'arc :

$$\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2 = 1.$$

On considère une surface paramétrée par

$$F(s, \theta) = x(s)\vec{u}_\theta + y(s)\vec{k}.$$

On cherche les équations vérifiées par  $t \mapsto (s(t), \theta(t))$  pour que la courbe définie par  $\gamma(t) = F(s(t), \theta(t))$  soit une géodésique. On doit écrire les équations d'Euler-Lagrange associées à l'énergie :

$$E = \int_0^1 \left[ \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + [x(s(t))]^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] dt.$$

On trouve

$$\begin{cases} \frac{d^2 s}{dt^2} = x(s(t))\dot{x}(s(t)) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ \frac{d}{dt} \left[ (x(s(t)))^2 \frac{d\theta}{dt} \right] = 0 \end{cases}$$

On obtient donc avec la seconde équation qu'il existe une constante  $J_0$  (le moment cinétique) telle que

$$\forall t \quad [x(s(t))]^2 \frac{d\theta}{dt} = J_0.$$

Compte tenu du fait que la vitesse est aussi constante on obtient :

$$\left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + x(s(t))^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = C^{\text{te}}.$$

Quitte à considérer la courbe  $t \mapsto \gamma(t/C)$  pour une constante  $C$  idoine (c'est encore une géodésique) on peut supposer (et on suppose) :

$$\left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + x(s(t))^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 1.$$

On obtient donc l'équation :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{J_0^2}{x^2(s(t))}.$$

– Premier cas :  $J_0 = 0$  alors on obtient  $\theta = C^{\text{te}}$ , les méridiens sont des géodésiques.

si  $J_0 \neq 0$  alors  $t \mapsto \theta(t)$  est continue, strictement monotone, on peut reparametrer la géodésique par  $\theta$  <sup>(18)</sup> On obtient alors l'équation :

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = x^2(s) \frac{x^2(s) - J_0^2}{J_0^2}.$$

C'est une équation à variables séparables. On sait donc que si  $F(s)$  est une primitive de

$$s \mapsto \frac{J_0}{x(s)\sqrt{x^2(s) - J_0^2}}$$

alors

$$F(s(\theta)) - F(s(\theta_0)) = \pm(\theta - \theta_0).$$

En particulier, on doit toujours avoir  $|x(s)| \geq |J_0|$ .

– Deuxième cas : un autre cas particulier est celui où  $t \mapsto s(t)$  est constante, le cas où  $x^2(s) - J_0^2 = 0$  ceci se produit exactement lorsque  $\dot{x}(s) = 0$ , ainsi les parallèles où  $\dot{x}(s) = 0$  sont des géodésiques.

– Cas général : On regarde donc  $\{s, |x(s)| > |J_0|\}$  c'est un ouvert de  $\mathbb{R}$ , il se décompose donc en une réunion disjointe d'intervalles ouverts, on sait donc que si la géodésique part d'un point  $F(s_0, \theta_0)$  avec une vitesse 1 telle que  $\dot{x}(s_0) \neq 0$  alors les valeurs prises par  $s(t)$  resteront dans un de ces intervalles  $]s_-, s_+[$  où  $-\infty \leq s_- < s_+ \leq +\infty$ . Une petite étude montre que si on a  $\dot{x}(s_{\pm}) \neq 0$  alors  $\theta \mapsto s(\theta)$  oscille entre  $s_-$  et  $s_+$ . Si  $\dot{x}(s_+) = 0$  et si  $J_0 > 0$ ,  $\frac{ds}{d\theta}(\theta_0) > 0$  alors  $\theta \mapsto s(\theta)$  est strictement croissante sur  $[\theta_0, +\infty[$  et tends vers  $s_+$ .

---

<sup>(18)</sup> On obtient ainsi une courbe qui n'est plus géodésique, mais on retrouve la géodésique en re-paramétrant les courbes obtenues à vitesse constante.

## Exercices sur le calcul des variations

**Exercice 4.1.** — Soit  $I = [a, b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et soit  $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ . On suppose que  $c_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un chemin  $C^1$  joignant un point  $c_0(a) = A$  à un point  $c_0(b) = B$  qui vérifie la condition d'Euler-Lagrange pour la fonctionnelle  $\mathcal{F}(c) = \int_a^b F(t, \dot{c}(t)) dt$  (on dit que  $c_0$  est une extrémale). Soit  $c$  un autre chemin  $C^1$  joignant  $A$  à  $B$ .

(1) Montrer que

$$\mathcal{F}(c) - \mathcal{F}(c_0) = \int_a^b \left( F(t, \dot{c}(t)) - F(t, \dot{c}_0(t)) - \frac{\partial F}{\partial y}(t, \dot{c}_0(t))(\dot{c}(t) - \dot{c}_0(t)) \right) dt$$

(2) En déduire que si  $F$  est une fonction convexe de sa seconde variable  $y$  alors  $c_0$  réalise un minimum absolu pour  $\mathcal{F}$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 4.2.** — (1) Minimiser la fonctionnelle  $c \mapsto \mathcal{F}(c) = \int_1^2 t^2 \dot{c}(t)^2 dt$  sur l'ensemble

$$\Omega = C^1\left(\left([1, 2], 1, 2\right), (\mathbb{R}, 1, 2)\right)$$

des fonctions réelles  $c$  de classe  $C^1$  définies sur l'intervalle  $[1, 2]$  et vérifiant les conditions aux bords  $c(1) = 1$  et  $c(2) = 2$ .

(2) (Contre-exemple de Weierstrass)

Montrer que la fonctionnelle  $c \mapsto \mathcal{F}(c) = \int_0^1 t^2 \dot{c}(t)^2 dt$  n'a pas de minimum sur l'ensemble

$$\Omega = C^1\left(\left([0, 1], 0, 1\right), (\mathbb{R}, 0, 1)\right)$$

des fonctions réelles  $c$  de classe  $C^1$  définies sur l'intervalle  $[0, 1]$  et vérifiant les conditions aux bords  $c(0) = 0$  et  $c(1) = 1$ .

Y admet-elle une borne inférieure ?

(Indication : on pourra considérer les fonctions  $c_n(t) = \frac{\arctan nt}{\arctan n}$ )

(3) (Contre-exemple de Hilbert)

Pour tout  $\alpha \in [0, 1[$  on considère la fonctionnelle  $c \mapsto \mathcal{F}_\alpha(c) = \int_\alpha^1 t^{2/3} \dot{c}(t)^2 dt$  définie sur l'ensemble

$$\Omega_\alpha = C^1\left(\left([\alpha, 1], \alpha, 1\right), (\mathbb{R}, 0, 1)\right)$$

i) Résoudre le problème de minimisation de la fonctionnelle  $\mathcal{F}_\alpha$  sur l'ensemble  $\Omega_\alpha$  lorsque  $\alpha \in ]0, 1[$ ; on note  $c_\alpha$  sa solution.

ii) Vérifier que l'on définit une fonction  $c_0$  continue sur  $[0, 1]$  et  $C^1$  sur  $]0, 1]$  en posant pour tout  $t \in ]0, 1[$   $c_0(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} c_\alpha(t)$  et  $c_0(0) = 0$ . Montrer que  $\mathcal{F}_0(c_0) \leq \mathcal{F}_0(c)$  pour tout  $c \in \Omega_0$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 4.3.** — (Jacobi)

Minimiser la fonctionnelle  $c \mapsto \int_0^T (\dot{c}(t)^2 - c(t)^2) dt$  sur  $C^1\left(\left([0, T], 0, T\right), (\mathbb{R}, 0, 0)\right)$

pour  $T = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 4.4.** — (La caténoïde comme surface de révolution autour de la chaînette)

Trouver les surfaces de révolution candidate à être d'aire minimale pour une hauteur fixée (on pourra paramétrer une telle surface par  $(\theta, z) \mapsto (\cos \theta f(z), \sin \theta f(z), z)$ , l'application  $f : ]-R, R[ \rightarrow \mathbb{R}^{*+}$  étant de classe  $C^1$ ).

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 4.5.** — Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  une courbe de classe  $C^1$  dans le demi-plan supérieur du plan complexe. On pose  $h(\gamma) =$

$$\int_a^b \frac{|\dot{\gamma}|}{\text{Im}(\gamma(t))} dt. \text{ Trouver les courbes extrémales.}$$

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 4.6.** — (Problème de Boltz)

Soient  $K$  un intervalle fermé borné de  $\mathbb{R}$ ,  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  et  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . On considère deux fonctions réelles de classes  $C^1$ ,  $L$  définie sur  $U$  et  $l$  définie sur  $V$ .

(1) On considère la fonctionnelle  $\mathcal{L}$  définie sur l'ensemble  $\mathcal{U}$  des triplets  $(c, t_0, t_1)$  vérifiant les conditions

$$\forall t \in K \quad (t, c(t), \dot{c}(t)) \in U; \quad t_0 \text{ et } t_1 \in \text{Int}(K); \quad (t_0, c(t_0), t_1, c(t_1)) \in V$$

par

$$\mathcal{L}(c, t_0, t_1) = l(t_0, c(t_0), t_1, c(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(t, c(t), \dot{c}(t)) dt$$

Montrer que  $\mathcal{L}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{U}$ , que l'on vérifiera ouvert dans l'espace de Banach  $C^1(K, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , et calculer sa différentielle.

(2) En déduire que si  $(c, t_0, t_1)$  est une extrémale de  $\mathcal{L}$  sur  $\mathcal{U}$  alors

i)  $c$  vérifie l'équation d'Euler sur  $[t_0, t_1]$ .

ii)  $c$  vérifie aux points

$$p_i = (t_i, c(t_i), \dot{c}(t_i)) \in U \quad \text{et} \quad p = (t_0, c(t_0), t_1, c(t_1)) \in V$$

les conditions de transversalité

$$L_{\dot{c}}(p_i) = (-1)^i l_{c_i}(p) \quad \text{et} \quad D l_{c_i}(p)(\dot{c}(t_i)) + l_{t_i}(p) = (-1)^i L(p_i)$$

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 4.7.** — (Courbe brachistochrone de Bernoulli : la cycloïde)

Dans un plan vertical, partant du point  $(a, A)$ , une particule pesante glisse le long d'une courbe. Trouver la courbe permettant à la particule d'atteindre la droite verticale  $x = b$  ( $b > a$ ) en un temps minimum.

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 4.8.** — Soit

$$\Omega = \{c \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^2), c(0) = (1, 0), c(1) = (1, 0)\}.$$

A  $c \in \Omega$  on associe

$$E(c) = \int_0^1 [x'^2(t) + y'^2(t)] dt - 2\pi \int_0^1 (y(t)x'(t) - x(t)y'(t)) dt$$

où  $c : t \in [0, 1] \mapsto (x(t), y(t))$ .

(1) Soit  $c_0 : t \in [0, 1] \mapsto (x(t), y(t))$  un élément de  $\Omega$  qui réalise  $\inf_{c \in \Omega} E(c)$ . Ecrire les équations d'Euler-Lagrange vérifiées par les fonctions  $x$  et  $y$ .

(2) Résoudre ces équations.

(3) Trouver les solutions de ces équations qui sont dans  $\Omega$  et calculer les valeurs prises de  $E$  correspondantes.

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 4.9.** — On considère la fonction  $e : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$e((x, y, z); (\xi, \eta, \zeta)) = \xi^2 + \eta^2 + (\zeta - x\eta)^2 ;$$

$e$  est une fonction  $C^\infty$ . Et si  $\gamma \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^3)$ , on lui associe son énergie

$$E(\gamma) = \int_{[0,1]} e(\gamma(t); \gamma'(t)) dt.$$

On cherche les courbes réalisant le minimum de l'énergie sur

$$\Omega = \{\gamma \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^3), \text{ tel que } \gamma(0) = (0, 0, 0) \text{ et } \gamma(1) = (0, 0, 4\pi)\}.$$

(1) Si  $\gamma \in \Omega$  réalise ce minimum, écrire les équations d'Euler-Lagrange vérifiées par  $\gamma$ , on notera  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ .

(2) Trouver la solution de ce système d'équations différentielles vérifiant

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0, \quad x'(0) = \rho \cos \phi, \quad y'(0) = \rho \sin \phi, \quad z'(0) = \lambda$$

où  $\rho \geq 0$  et  $\phi \in \mathbb{R}$ .<sup>(19)</sup>

(3) Trouver les solutions de ce système d'équations différentielles qui appartiennent à  $\Omega$ . Calculer et comparer leurs énergies.

Indications ★ ; Corrigé : ★

<sup>(19)</sup>Il sera commode de remarquer que la fonction  $z' - xy'$  est constante.

*Indication exercice 4.1.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 4.2.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 4.3.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 4.4.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 4.5.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 4.6.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 4.7.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 4.8.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 4.9.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Corrigé exercice 4.1.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 4.2.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 4.3.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 4.4.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 4.5.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 4.6.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 4.7.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 4.8.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 4.9.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

## Les courbes

### 5.1. Généralités. —

5.1.1. Les arcs géométriques. —

**Définition 5.1.** — On appelle arc paramétré régulier (ou courbe régulière) de classe  $C^{p \geq 1}$  de  $\mathbb{R}^n$  une application  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^p$  définie sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  telle que

$$\forall t \in I, c'(t) \neq 0.$$

On dit que deux arcs paramétrés réguliers de classe  $C^p$   $c_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $c_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  définissent le même arc géométrique de classe  $C^p$  si il y a  $\theta : I_1 \rightarrow I_2$  un  $C^p$  difféomorphisme avec

$$c_2 \circ \theta = c_1.$$

On dira qu'ils définissent le même arc géométrique orienté si  $\theta$  est croissant.

Un arc géométrique (orienté) est donc une classe d'équivalence d'arcs paramétrés réguliers. On ne peut cependant pas identifier un arc géométrique à son image dans  $\mathbb{R}^n$ . Car on distingue par exemple le cercle parcouru une seule fois et le cercle parcouru deux fois ; et on peut bâtir des exemples encore plus bizarres.

**Définition 5.2.** — Si  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un arc paramétré régulier de classe  $C^{p \geq 1}$ , la *tangente affine* à  $c$  en  $t_0 \in I$  est la droite affine  $T_{c,t_0}$  passant par  $c(t_0)$  et dirigée par  $c'(t_0)$ .

Ceci ne dépend pas de la paramétrisation et donc cela ne dépend que de l'arc géométrique sous-jacent. En effet, si  $t \in J \mapsto c(\theta(s)) = \gamma(s)$  est une autre paramétrisation de cet arc géométrique,  $\theta : J \rightarrow I$  est donc un  $C^p$  difféomorphisme. On a évidemment :

$$T_{\gamma,s_0} = T_{c,\theta(s_0)}.$$

5.1.2. Longueur. — On note  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne usuelle sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 5.3.** — Soit  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une courbe de classe  $C^{p \geq 1}$ , on appelle longueur de  $c$  la quantité :

$$L(c) = \int_I \|c'(t)\| dt.$$

Ceci ne dépend évidemment pas de la paramétrisation : si  $\theta : J \rightarrow I$  est donc un  $C^p$  difféomorphisme alors

$$L(c \circ \theta) = \int_J \|c'(\theta(s))\| |\theta'(s)| ds = \int_I \|c'(t)\| dt.$$

Il est intuitivement clair que l'intégrale de la vitesse  $\|c'(t)\|$  donne la longueur de la courbe. Cette longueur peut aussi se définir de la façon suivante : si  $\sigma = \{t_0 < t_1 < \dots < t_k\}$  est une subdivision de  $I$  (donc  $t_0, t_k \in I$ ) on note alors

$$L(c, \sigma) = \sum_{i=1}^k \|c(t_i) - c(t_{i-1})\|.$$

**Proposition 5.4.** —

$$\sup_{\sigma} L(c, \sigma) = L(c).$$

*Démonstration.* — Grâce à l'inégalité :

$$\|c(t_i) - c(t_{i-1})\| = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} c'(t) dt \right\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|c'(t)\| dt$$

on obtient facilement :

$$\sup_{\sigma} L(c, \sigma) \leq L(c).$$

Il reste à voir l'inégalité opposée. Soit  $\varepsilon > 0$  et  $a < b, a, b \in I$ , puisque  $c'$  est uniformément continue sur le segment compact  $[a, b]$ , il y a  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$|t - s| \leq \frac{b-a}{N_0} \Rightarrow \|c'(t) - c'(s)\| \leq \frac{\varepsilon}{b-a+1}.$$

On considère alors la subdivision  $\sigma$  de  $I$  donnée par

$$t_i = a + i \frac{b-a}{N_0}, \quad i = 0, \dots, N_0.$$

On a alors pour  $s \in [t_{i-1}, t_i]$  :

$$\begin{aligned} \|c(t_i) - c(t_{i-1})\| &= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} c'(t) dt \right\| \\ &= \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} [c'(t) - c'(t_i)] dt + (t_i - t_{i-1})c'(t_i) \right\| \\ &\geq (t_i - t_{i-1})\|c'(t_i)\| - \varepsilon \frac{t_i - t_{i-1}}{b-a+1}. \end{aligned}$$

On peut choisir  $s$  afin que

$$(t_i - t_{i-1})\|c'(s)\| = \int_{[t_{i-1}, t_i]} \|c'(t)\| dt.$$

D'où

$$\|c(t_i) - c(t_{i-1})\| \geq \int_{[t_{i-1}, t_i]} \|c'(t)\| dt - \varepsilon \frac{t_i - t_{i-1}}{b-a+1},$$

et en sommant sur  $i \in \{1, \dots, N_0\}$ , on obtient :

$$L(c, \sigma) \geq \int_{[a, b]} \|c'(t)\| dt - \varepsilon.$$

En passant à la limite lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on obtient

$$\sup_{\sigma} L(c, \sigma) \geq \int_{[a, b]} \|c'(t)\| dt.$$

Ceci pour tout  $[a, b] \subset I$ , d'où le résultat.  $\square$

## 5.2. Paramétrisation par longueur d'arc. —

**Proposition 5.5.** — Si  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un arc paramétré régulier de classe  $C^{p \geq 1}$  alors l'arc géométrique sous-jacent a une paramétrisation à vitesse 1. C'est à dire qu'il existe  $\theta : J \rightarrow I$  un  $C^p$  difféomorphisme tel que si  $\gamma = c \circ \theta$  alors

$$\forall s \in J, \|\gamma'(s)\| = 1.$$

En particulier si  $[s_-, s_+] \subset J$  alors

$$L\left(\gamma \Big|_{[s_-, s_+]}\right) = s_+ - s_-.$$

Nous dirons alors que l'arc géométrique sous-jacent est paramétré par longueur d'arc.

*Démonstration.* — L'énoncé nous indique que si  $s(t) = \theta^{-1}(t)$  et si  $t_0 \in I$  est un point fixé et  $t \in I$ , alors  $s(t) - s(t_0)$  est la longueur de la restriction de  $c$  à l'intervalle délimité par  $t_0$  et  $t$ . On est donc naturellement amené à poser :

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|c'(\tau)\| d\tau,$$

Puisque  $c'$  ne s'annule pas,  $s$  est bien de classe  $C^p$  et sa dérivée est toujours strictement positive, en conséquence c'est un difféomorphisme croissant sur son image  $J$ . Et par construction  $\theta = s^{-1}$  convient car la longueur de

la restriction de  $\gamma = c \circ \theta$  à un intervalle  $[0, s(t)]$  est évidemment la longueur de la restriction de  $c$  à  $[t_0, t]$  c'est à dire  $s(t)$ . Donc  $\int_0^s \|\gamma'(\xi)\| d\xi = s$  (si  $s \geq 0$ ).

□

**5.3. Les courbes planes.** — On travaille ici dans le plan affine euclidien orienté  $\mathbb{R}^2$ .

5.3.1. *La courbure.* —

5.3.1.1. *Définition.* — Soit  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe plane régulière de classe  $C^2$ , on suppose que  $c$  est paramétrée par longueur d'arc et on note  $\vec{\tau}(s) = \dot{c}(s)$  le vecteur tangent unitaire et on note aussi  $\vec{\nu}(s) = \text{rot}_{\pi/2} \vec{\tau}(s)$  le vecteur normal unitaire obtenu en tournant le vecteur tangent unitaire d'un angle  $+\pi/2$ , ainsi  $(\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s))$  est une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^2$  et  $s \mapsto (\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s))$  est le repère mobile de Frenet. Puisque  $\langle \vec{\tau}(s), \vec{\tau}(s) \rangle = 1$ , on obtient en dérivant :

$$\left\langle \frac{d\vec{\tau}(s)}{ds}, \vec{\tau}(s) \right\rangle = 0,$$

le vecteur  $\frac{d\vec{\tau}(s)}{ds}$  est donc orthogonal à  $\vec{\tau}(s)$ , il est donc colinéaire à  $\vec{\nu}(s)$  et il y a donc une fonction  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$  nommée **courbure** de  $c$  tel que

$$\frac{d\vec{\tau}(s)}{ds} = \kappa(s) \vec{\nu}(s).$$

Notons que l'on a aussi :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \vec{\nu}(s) &= \text{rot}_{\pi/2} \frac{d}{ds} \vec{\tau}(s) \\ &= \text{rot}_{\pi/2} \kappa(s) \vec{\nu}(s) \\ &= \kappa(s) \text{rot}_{\pi/2} \text{rot}_{\pi/2} \vec{\tau}(s) \\ &= \kappa(s) \text{rot}_{\pi} \vec{\tau}(s) \\ &= -\kappa(s) \vec{\tau}(s). \end{aligned}$$

Par exemple, la courbure d'un cercle de rayon  $R$  est  $\pm 1/R$ , en effet une paramétrisation par longueur d'arc un tel cercle est

$$s \mapsto (x_0 + R \cos(s/R), y_0 + R \sin(s/R))$$

et on a alors  $\vec{\tau}(s) = (-\sin(s/R), \cos(s/R))$ ,  $\vec{\nu}(s) = (-\cos(s/R), -\sin(s/R))$ , et on a bien

$$\frac{d}{ds} \vec{\tau}(s) = \frac{1}{R} \vec{\nu}(s).$$

Si on change le sens de parcours, la courbure devient  $-1/R$ . Puisqu'une droite se parcourt à vitesse constante avec une accélération nulle, la courbure d'une droite est nulle (c'est en quelque sorte un cercle de rayon infini).

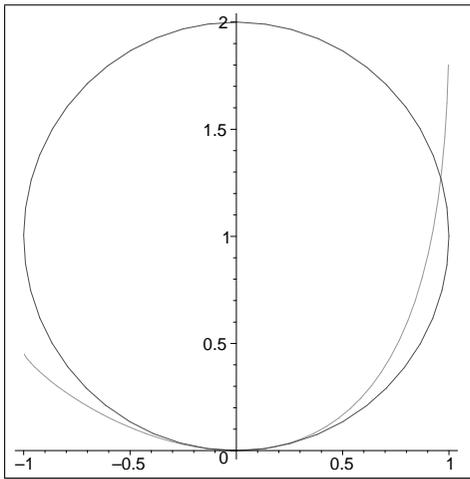
5.3.1.2. *Interprétation géométrique.* — *i) Cercle osculateur :* Soit  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe plane régulière de classe  $C^2$ , on suppose que  $c$  est paramétrée par longueur d'arc. On cherche un cercle qui a un contact d'ordre 2 avec  $c$  en  $s_0$ , on travaille dans le repère orthonormé  $(c(s_0), \vec{\tau}(s_0), \vec{\nu}(s_0))$  : Puisque on connaît  $\dot{c}(s_0) = \vec{\tau}(s_0)$  et  $\ddot{c}(s_0) = \kappa(s_0) \vec{\nu}(s_0)$ . Dans ce repère, on a le développement limité :

$$c(s_0 + h) = (h, \kappa(s_0) \frac{h^2}{2}) + o(h^2)$$

Un cercle qui passe par  $c(s_0)$  et tangent à  $\vec{\tau}(s_0)$  a forcément son centre sur la droite  $c(s_0) + \mathbb{R} \vec{\nu}(s_0)$  ; si son centre a pour coordonnée  $(0, a)$  ce cercle se paramètre par longueur d'arc par  $h \mapsto \gamma(h) = (a \sin(h/a), a - a \cos(h/a))$ , on a donc le développement limité :

$$\gamma(h) = (h, \frac{h^2}{2a}) + o(h^2).$$

En conclusion, si  $\kappa(s_0) \neq 0$ , alors le cercle de centre  $c(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} \vec{\nu}(s_0)$  et de rayon  $\frac{1}{|\kappa(s_0)|}$  est le cercle tangent à  $c$  en  $s_0$  et avec un contact d'ordre 2 : c'est le **cercle osculateur** à  $c$  en  $s_0$ . Le centre de ce cercle est le **centre de courbure**.



Si  $\kappa(s_0) = 0$ , c'est la droite tangente (un cercle de rayon infini) qui a un contact d'ordre 2 avec  $c$  en  $s_0$ .

ii) Variation de l'angle de la tangente :

**Lemme 5.6.** — Si  $f : I \rightarrow \mathbb{S}^1$  est de classe  $C^{p \geq 1}$  alors il existe une fonction  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^p$  (unique à  $2\pi$  près) telle que

$$f(s) = e^{i\alpha(s)} = (\cos(\alpha(s)), \sin(\alpha(s))).$$

*Démonstration.* — Une telle fonction  $\alpha$  doit vérifier

$$f' = i\alpha' f.$$

Fixons  $a \in I$  et choisissons  $\alpha(a) \in \mathbb{R}$  telle que  $f(a) = e^{i\alpha(a)}$ . On pose alors

$$\alpha(s) = \alpha(a) + \int_a^s \frac{f'(t)}{if(t)} dt.$$

On vérifie sans peine que la dérivée de la fonction

$$s \mapsto f(s)e^{-i\alpha(s)}$$

est nulle sur l'intervalle  $I$  cette fonction est donc constante égale à sa valeur en  $s = a$  qui est 1 par définition.  $\square$

On peut aisément en déduire que ce lemme est encore valable si  $f$  est uniquement continue. En effet, il y a alors une fonction  $g$  de classe  $C^1$  tel que

$$\forall s \in I, |f(s) - g(s)| \leq 1/100.$$

(Au moins si  $I$  est un intervalle compact) alors on sait grâce au lemme qu'il existe  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue tel que

$$g(s) = e^{i\beta(s)},$$

mais puisque

$$\forall s \in I, |f(s)e^{-i\beta(s)} - 1| \leq 1/100.$$

on sait que  $f(s)e^{-i\beta(s)} = (x(s), y(s)) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$  où  $\theta(s) = \arcsin y(s)$ . est bien une fonction continue, il suffit alors de poser  $\alpha(s) = \beta(s) + \theta(s)$ .

**Proposition 5.7.** — Soit  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe plane régulière de classe  $C^2$  paramétrée par longueur d'arc. On sait qu'il existe une fonction de classe  $C^1$   $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\alpha(s)$  soit égale à une mesure de l'angle  $(\vec{i}, \vec{\tau}(s))$ . Alors

$$\kappa(s) = \frac{d}{ds} \alpha(s).$$

*Démonstration.* — C'est évident, puisque

$$\vec{\tau}(s) = (\cos(\alpha(s)), \sin(\alpha(s)))$$

alors

$$\vec{\nu}(s) = (-\sin(\alpha(s)), \cos(\alpha(s)))$$

et

$$\frac{d}{ds} \vec{\tau}(s) = \alpha'(s) (-\sin(\alpha(s)), \cos(\alpha(s))).$$

$\square$

On déduit immédiatement le corollaire important suivant :

**Corollaire 5.8.** — Si  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^{p \geq 0}$ , il existe un unique (à déplacement près) arc géométrique orienté dont  $\kappa$  soit la courbure.

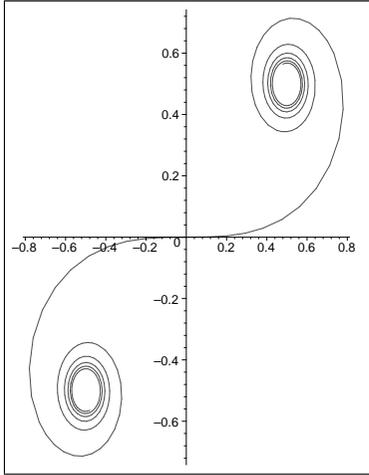
*Démonstration.* — En effet, si on connaît  $\kappa$ , alors après intégration, on connaît à un angle près (c'est à dire à une rotation près) la fonction  $s \mapsto \alpha(s)$  et donc la fonction  $s \mapsto \vec{\tau}(s) = (\cos(\alpha(s)), \sin(\alpha(s)))$  et en réintégrant, on connaît (à une translation près)  $s \mapsto c(s)$ .  $\square$

*Exemples :*

– Si  $\kappa = C^{\text{te}}$  alors, on trouve des portions de cercles ou de droites.

– Si  $\kappa(s) = as$ , la courbure évolue linéairement avec la longueur. On trouve la *clothoïde*

$$c(s) = \left( \int_0^s \cos(at^2/2)dt, \int_0^s \sin(at^2/2)dt \right).$$



Ces courbes sont utilisées pour construire des routes et des voies de chemin de fer. Pour plusieurs raisons, d'abord si on tourne le volant de sa voiture à vitesse constante, le véhicule épouse une telle courbe et ensuite en recollant différents morceaux de ces courbes, on construit une route qui suit une courbe  $C^2$ .

5.3.1.3. *Interprétation cinématique : force centrifuge.* — Soit  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe  $C^2$  régulière paramétrée par longueur d'arc, on considère un point mobile sur cette courbe  $\gamma(t) = c(s(t))$  celui-ci se déplace à la vitesse

$$v(t) = |s'(t)| = \|\gamma'(t)\|$$

le vecteur vitesse est donc  $\vec{v}(t) = v(t)\vec{\tau}(s(t))$  son accélération est donc

$$\vec{v}'(t) = v'(t)\vec{\tau}(s(t)) + \kappa(s(t))v^2(t)\vec{\nu}(s(t)).$$

La variation de la vitesse  $v'(t)$  contribue à la partie tangentielle de l'accélération alors que la partie normale de cette accélération est  $\kappa(s(t))v^2(t)\vec{\nu}(s(t))$ , c'est ce qui contribue à rendre inconfortable la conduite dans les virages.

5.3.1.4. *Calcul de la courbure.* —

– *Paramétrisation quelconque* : si  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

est une courbe  $C^2$  régulière pas forcément paramétrée par longueur d'arc et on sait qu'il existe  $s : I \rightarrow J$  un  $C^2$  difféomorphisme croissant tel que  $\gamma(t) = c(s(t))$ , où  $c$  est paramétrée par longueur d'arc ; on vient de voir que

$$\gamma'(t) = s'(t)\vec{\tau}(s(t)) \quad \text{et} \quad \gamma''(t) = s''(t)\vec{\tau}(s(t)) + \kappa(s(t))[s'(t)]^2\vec{\nu}(s(t)).$$

et donc

$$\det(\gamma'(t), \gamma''(t)) = \kappa(s(t))[s'(t)]^3.$$

Mais puisque  $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$ , on obtient :

$$\kappa(s(t)) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

– *En coordonnées polaires* :  $\gamma(\theta) = \rho(\theta)\vec{u}_\theta$ , puisqu'alors

$$\gamma' = \rho'\vec{u}_\theta + \rho\vec{v}_\theta \quad \text{et} \quad \gamma'' = (\rho'' - \rho)\vec{u}_\theta + 2\rho'\vec{v}_\theta,$$

on trouve :

$$\kappa = \frac{\rho^2 - \rho''\rho + 2\rho'^2}{\rho^2 + \rho'^2}.$$

– *Courbes définies implicitement* : On suppose que  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$  est définie par l'équation

$$f(x, y) = 0$$

et que  $Df(x, y) \neq 0$  le long de  $\mathcal{C}$ . Ainsi  $\mathcal{C}$  est une sous-variété de dimension 1 de  $\mathbb{R}^2$ , localement  $\mathcal{C}$  se paramètre par  $t \mapsto \gamma(t)$  avec  $\gamma'(t) \neq 0$ ,  $\gamma'(t)$  doit être orthogonale au gradient de  $f$  i.e. la normale unitaire est

$$\vec{\nu}(t) = \pm \frac{\overrightarrow{\text{grad}} f(\gamma(t))}{\|\overrightarrow{\text{grad}} f(\gamma(t))\|}.$$

On a aussi

$$\langle \overrightarrow{\text{grad}} f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$$

et donc en dérivant encore une fois :

$$\langle \overrightarrow{\text{grad}} f(\gamma(t)), \gamma''(t) \rangle + D^2f(\gamma(t))(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0$$

Mais au signe près la courbure est juste :

$$\langle \gamma''(t), \vec{\nu}(t) \rangle = \frac{\langle \overrightarrow{\text{grad}} f(\gamma(t)), \gamma''(t) \rangle}{\| \overrightarrow{\text{grad}} f(\gamma(t)) \| \| \gamma'(t) \|^2}$$

Puisque  $\gamma'(t)$  est proportionnel à  $\text{rot}_{\pi/2} \overrightarrow{\text{grad}} f(\gamma(t))$ , on trouve :

$$\kappa = \pm \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2}{\left( \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right)^{3/2}}.$$

5.3.2. Enveloppe de Droites. —

5.3.2.1. Définition. — Soit  $\{D(t)\}_{t \in I}$  une famille de droites affines de  $\mathbb{R}^2$  (20), on dit qu'un arc paramétré  $C^1 \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  est enveloppe de cette famille si

$$\forall t \in I, \gamma(t) \in D(t) \text{ et } \gamma'(t) \in \vec{D}(t).$$

5.3.2.2. Famille de droites définies par des équations cartésiennes. — On suppose que cette famille de droite est donnée par des équations

$$D(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a(t)x + b(t)y + c(t) = 0\}.$$

où les fonctions  $a, b, c$  sont de classe  $C^k$  et la fonction  $a^2 + b^2$  ne s'annulent jamais. Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$   $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  une enveloppe de cette famille, nous avons donc les équations :

$$\begin{cases} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0 \\ a(t)x'(t) + b(t)y'(t) = 0 ; \end{cases}$$

en dérivant la première équation, on obtient

$$a(t)x'(t) + b(t)y'(t) + a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) = 0$$

et en utilisant la seconde, on arrive au système équivalent suivant :

$$(17) \quad \begin{cases} a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0 \\ a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) = 0 ; \end{cases}$$

Réciproquement, si  $a(t)b'(t) - a'(t)b(t) \neq 0$ , alors ce système a pour solution :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{a(t)b'(t) - a'(t)b(t)} (c'(t)b(t) - c(t)b'(t)) \\ y(t) = \frac{1}{a(t)b'(t) - a'(t)b(t)} (c(t)a'(t) - c'(t)a(t)) \end{cases}$$

Cependant ceci ne donne une solution de classe  $C^1$  que lorsque  $a, b, c$  sont de classe  $C^2$ .

**Proposition 5.9.** — Si les fonctions  $a, b, c$  sont de classe  $C^2$  sur  $I$  et si

$$\forall t \in I, a(t)b'(t) - a'(t)b(t) \neq 0$$

alors si  $(x(t), y(t))$  est la solution du système (17), alors  $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$  est une enveloppe de cette famille de droite.

**Remarque 5.10.** — On peut alors caractériser les points  $t \in I$  où  $x'(t) = y'(t) = 0$ , c'est exactement les  $t$  où

$$\det \begin{pmatrix} a(t) & b(t) & c(t) \\ a'(t) & b'(t) & c'(t) \\ a''(t) & b''(t) & c''(t) \end{pmatrix} = 0$$

On a aussi l'interprétation géométrique suivante de l'enveloppe :

**Corollaire 5.11.** — Sous les hypothèses de la proposition précédente, le point  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  est la limite lorsque  $s \rightarrow t$  du point d'intersection des deux droites  $D(t)$  et  $D(s)$ .

*Démonstration.* — En effet l'intersection des droites  $D(t)$  et  $D(t+h)$  est décrite par les équations :

$$\begin{cases} a(t)x + b(t)y + c(t) = 0 \\ a(t+h)x + b(t+h)y + c(t+h) = 0 ; \end{cases}$$

C'est aussi équivalent au système :

$$\begin{cases} a(t)x + b(t)y + c(t) = 0 \\ \frac{a(t+h) - a(t)}{h}x + \frac{b(t+h) - b(t)}{h}y + \frac{c(t+h) - c(t)}{h} = 0 ; \end{cases}$$

qui a pour solution :

$$\begin{cases} x_h = \frac{h}{a(t)[b(t+h) - b(t)] - [a(t+h) - a(t)]b(t)} \frac{[c(t+h) - c(t)]b(t) - c(t)[b(t+h) - b(t)]}{h} \\ y_h = \frac{h}{a(t)[b(t+h) - b(t)] - [a(t+h) - a(t)]b(t)} \frac{c(t)[a(t+h) - a(t)] - [c(t+h) - c(t)]a(t)}{h} \end{cases}$$

qui tend bien vers la solution du système (17) lorsque  $h \rightarrow 0$ .  $\square$

(20)  $I$  étant un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Exemples : Si  $Ox, Oy$  sont deux demi-droites on cherche l'enveloppe de la famille de droites  $D$  telle que le triangle délimités par  $Ox, Oy$  et  $D$  soit d'aire constant  $\mathcal{A}$ . Une telle droite  $D$  est donnée par deux points  $A \in Ox$  et  $B \in Oy$ . Si on choisit un repère (non orthonormé)  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  où  $\vec{i}, \vec{j}$  sont de normes 1 et font un angle  $\alpha \in [0, \pi[$  les coordonnées de  $A$  sont  $(a, 0)$  celle de  $B$  sont  $(0, b)$  et

$$\frac{1}{2} \sin \alpha ab = \mathcal{A}$$

soit  $D'$  une autre telle droite déterminée par  $A' = O + a'\vec{i}$  et  $B' = O + b'\vec{j}$ . Soit  $M$  le point d'intersection des droites  $D$  et  $D'$ . Les triangles  $MAA'$  et  $MBB'$  ont donc la même aire. Si  $\theta$  est l'angle au sommet  $M$  de ces triangles on a donc :

$$\sin \theta M A M A' = \sin \theta M B M B'.$$

Si on simplifie par  $\sin \theta$  qui est non nul lorsque  $D \neq D'$  et si on fait tendre  $D'$  vers  $D$  (et donc  $A'$  vers  $A$  et  $B'$  vers  $B$ ) alors on obtient à la limite

$$MA^2 = MB^2$$

le point  $M$  est le milieu du segment  $[AB]$ , il a donc pour coordonnées

$$(a/2, b/2) \text{ avec } ab = \frac{2\mathcal{A}}{\sin \alpha}.$$

L'enveloppe cherchée est donc un arc d'hyperbole.

**L'astroïde :** On cherche l'enveloppe des droites obtenues en faisant glisser une barre de longueur  $L$  appuyer qui s'appuie sur les axes de coordonnées. Un petit calcul montre que lorsque la normale à cette droite fait un angle  $\theta$  avec l'axe des  $x$  alors la distance de l'origine à cette droite est

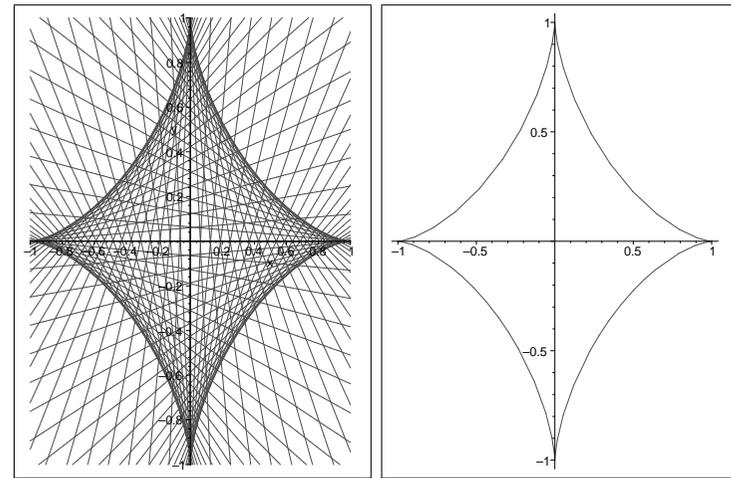
$$L \sin \theta \cos \theta = \frac{L}{2} \sin(2\theta)$$

Cette famille de droite est donc paramétrée par

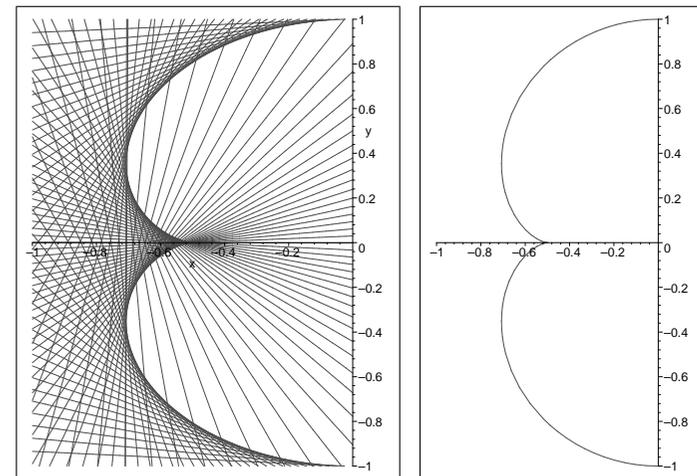
$$D(\theta) : \cos(\theta)x + \sin(\theta)y = \frac{L}{2} \sin(2\theta)$$

et on trouve que l'enveloppe est :

$$\theta \mapsto \frac{L}{2} (\sin(2\theta)\vec{u}_\theta + 2 \cos(2\theta)\vec{v}_\theta).$$



**La néphroïde :** On cherche l'enveloppe des droites qui sont obtenues après réflexion (selon la loi de Descartes) sur un demi cercle. C'est la figure que l'on observe à la surface de son café au petit matin : les rayons du soleil levant (ou de la lumière électrique) sont réfléchis par la surface du bord de la tasse et on observe cette figure :



On considère le cercle unité, la droite horizontale  $y = \sin \theta$  rencontre le cercle unité en  $(\cos(\theta), \sin(\theta))$  et fait un angle  $\pi - \theta$  avec la normale au cercle en ce point qui est la droite passant par  $O$  et  $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ . La

droite réfléchi est donc dirigé par un vecteur  $\vec{u}$  telle que

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{i})} = 2\pi - 2\theta$$

Une équation de cette droite est donc :

$$\sin(2\theta)x - \cos(2\theta)y = \sin(\theta).$$

*5.3.2.3. Famille de droites définies paramétriquement.* — On suppose ici que la droite  $D(t)$  passe par  $c(t)$  et est dirigée par  $\vec{u}(t) \neq 0$ , où on suppose que  $t \mapsto c(t)$  est une courbe  $C^2$  et que  $t \mapsto \vec{u}(t)$  est aussi  $C^2$ . On cherche alors  $t \mapsto \lambda(t)$  une application de classe  $C^1$  telle que

$$t \mapsto \gamma(t) = c(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$$

soit enveloppe de cette famille de droite, le vecteur  $\gamma'(t) = c'(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t) + \lambda'(t)\vec{u}(t)$  doit donc être proportionnel au vecteur  $\vec{u}(t)$ . Si  $\det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) \neq 0$ , on peut choisir

$$\lambda(t) = -\frac{\det(c'(t), \vec{u}(t))}{\det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t))}.$$

*5.3.2.4. Développée du courbe plane  $C^\infty$  régulière.* —

**Définition 5.12.** — Si  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une telle courbe, on appelle ainsi la courbe décrite par les centres de courbures. On peut supposer que  $c$  est paramétré par longueur d'arc et dans ce cas, la développée est la courbe paramétrée par

$$s \mapsto c(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\vec{\nu}(s).$$

**Proposition 5.13.** — Sur  $\{s \in I, \kappa'(s) \neq 0\}$ , la développée est aussi l'enveloppe des normales.

*Démonstration.* — Il suffit de vérifier que sur cet ouvert le vecteur tangent à la développée est proportionnelle à la normale mais compte tenu du fait que

$$\frac{d}{ds}\vec{\nu}(s) = -\kappa(s)\vec{\tau}(s)$$

nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( c(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\vec{\nu}(s) \right) &= \vec{\tau}(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \frac{d}{ds}\vec{\nu}(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}\vec{\nu}(s) \\ &= \vec{\tau}(s) - \vec{\tau}(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}\vec{\nu}(s) \\ &= -\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)}\vec{\nu}(s). \end{aligned}$$

□

Il est souvent plus facile de déterminer la développée en cherchant une enveloppe à la famille des normales que de calculer les centres de courbures.

*5.3.2.5. Développante du courbe plane  $C^\infty$  régulière.* —

**Définition 5.14.** — Si  $\mathcal{C}$  est un arc géométrique orienté de classe  $C^\infty$ , on appelle ainsi un arc dont  $\mathcal{C}$  est la développée.

Soit  $s \mapsto c(s)$  une paramétrisation par longueur d'arc de  $\mathcal{C}$ , et  $s \mapsto \gamma(s)$  une développante. La droite normale à la développante en  $\gamma(s)$  doit être la droite tangente à  $\mathcal{C}$  en  $c(s)$ , on peut donc chercher  $\gamma$  sous la forme

$$\gamma(s) = c(s) + \lambda(s)\vec{\tau}(s)$$

où  $\lambda$  est une fonction à valeurs réelles. De plus,  $\gamma'(s)$  doit être parallèle à  $\vec{\nu}(s)$ . Compte tenu du fait que :

$$\gamma'(s) = \vec{\tau}(s) + \lambda'(s)\vec{\tau}(s) + \lambda(s)\kappa(s)\vec{\nu}(s),$$

la tangente à la courbe  $\gamma$  est parallèle à  $\vec{\nu}(s)$  si et seulement si :  $1 + \lambda'(s) = 0$ . Les développantes de  $\mathcal{C}$  sont donc paramétrées par :

$$s \mapsto c(s) + (a - s)\vec{\tau}(s).$$

Il y a donc une infinité de développantes.

*Exemple :* On détermine les développantes de la chaînette  $y = \cosh(x)$  : la chaînette est paramétrée par

$$t \mapsto (t, \cosh(t))$$

Le vecteur tangent unitaire est :

$$\vec{\tau}(t) = \frac{(1, \sinh(t))}{\cosh(t)}.$$

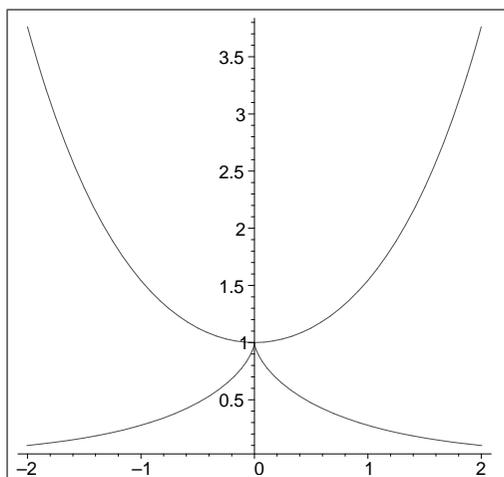
Et la longueur d'arc est donnée par :

$$\frac{ds}{dt} = \cosh(t)$$

donc  $s(t) = a + \sinh(t)$ . Prenons par exemple  $a = 0$ , on obtient que la tractrice paramétrée par

$$t \mapsto \left( t - \tanh(t), \frac{1}{\cosh(t)} \right)$$

est une développante de la chaînette.



**5.4. Les courbes gauches.** — On travaille maintenant dans l'espace euclidien orientée  $\mathbb{R}^3$ .

**5.4.1. Courbure et Torsion.** — On dira qu'un arc géométrique  $C^2$  est bi-régulier si pour toute (ou pour une) paramétrisation  $f : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  les vecteurs  $f'(t)$  et  $f''(t)$  sont linéairement indépendant.

**5.4.1.1. Définition.** — Soit  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une paramétrisation par longueur d'arc d'un arc géométrique  $C^3$  bi-régulier, sa courbure est donnée par

$$K(s) = \left\| \frac{d}{ds} \tau(s) \right\|$$

où  $\tau(s) = c'(s)$  est le vecteur tangent unitaire. Puisque l'arc géométrique est supposé bi-régulier, sa courbure n'est jamais nulle (c'est en fait équivalent), on peut alors définir le vecteur normal par

$$\vec{\nu}(s) = \frac{\tau'(s)}{K(s)}$$

et le vecteur binormal ou la binormale par

$$\vec{\beta}(s) = \tau(s) \wedge \vec{\nu}(s)$$

Ainsi pour tout  $s \in I$ , le trièdre de Frenet :

$$(\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s))$$

est orthonormée directe. Puisqu'on a supposé que  $c$  est de classe  $C^3$ , ces trois fonctions sont  $C^1$ , et les identités

$$\langle \vec{\tau}(s), \vec{\tau}(s) \rangle = \langle \vec{\nu}(s), \vec{\nu}(s) \rangle = \langle \vec{\beta}(s), \vec{\beta}(s) \rangle = 1$$

$$\text{et } \langle \vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s) \rangle = \langle \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s) \rangle = \langle \vec{\beta}(s), \vec{\tau}(s) \rangle = 0$$

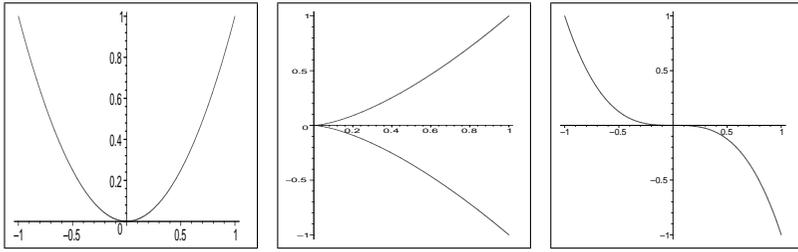
implique qu'il existe une fonction  $T : I \rightarrow \mathbb{R}$  appelée la torsion telle que

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \vec{\tau}(s) = & K(s) \vec{\nu}(s) \\ \frac{d}{ds} \vec{\nu}(s) = & -K(s) \vec{\tau}(s) & -T(s) \vec{\beta}(s) \\ \frac{d}{ds} \vec{\beta}(s) = & T(s) \vec{\nu}(s) \end{cases}$$

**5.4.1.2. Allure locale de la courbe.** — Si  $s_0 \in I$  on a donc le développement limité suivant :

$$\begin{aligned} c(s_0 + h) = & c(s_0) + \left[ h - K^2(s_0) \frac{h^3}{6} \right] \vec{\tau}(s_0) \\ & + \left[ \frac{h^2}{2} K(s_0) + K'(s_0) \frac{h^3}{6} \right] \vec{\nu}(s_0) - \frac{h^3}{6} K(s_0) T(s_0) \vec{\beta}(s_0) + o(h^3). \end{aligned}$$

Le plan affine  $(c(s_0), \vec{\tau}(s_0), \vec{\nu}(s_0))$  est le plan osculateur à la courbe en  $c(s_0)$ . On voit que si la torsion n'est pas nulle ( $T(s_0) \neq 0$ ) alors la courbe traverse son plan osculateur. Lorsque  $T(s_0) > 0$ , on obtient en projection sur les différents plans les courbes planes suivantes :



Où le premier graphique représente la projection de la courbe dans le plan  $(c(s_0), \vec{\tau}(s_0), \vec{\nu}(s_0))$ , le deuxième représente la projection de la courbe dans le plan  $(c(s_0), \vec{\nu}(s_0), \vec{\beta}(s_0))$  et le dernier représente la projection de la courbe dans le plan  $(c(s_0), \vec{\tau}(s_0), \vec{\beta}(s_0))$  :

5.4.1.3. *Calcul pratique.* — Si  $f : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une paramétrisation d'un arc géométrique bi-régulier de classe  $C^3$  et si  $f(t) = c(s(t))$  où  $s \mapsto c(s)$  est une paramétrisation par longueur d'arc du même arc géométrique si on note  $v(t) = s'(t) = \|f'(t)\|$ , nous avons :

$$f'(t) = v(t)\vec{\tau}(s(t))$$

et donc

$$f''(t) = v'(t)\vec{\tau}(s(t)) + K(s(t))v^2(t)\vec{\nu}(s(t))$$

et aussi

$$f'''(t) = [v''(t) - v^3(t)K^2(s(t))]\vec{\tau}(s(t)) + \frac{d}{dt}[K(s(t))v^2(t)]\vec{\nu}(s(t)) - v^3(t)K(s(t))T(s(t))\vec{\beta}(s(t)).$$

Des deux premières équations, nous en déduisons

$$K(s(t)) = \frac{\|f'(t) \wedge f''(t)\|}{\|f'(t)\|^3}$$

et des trois équations nous déduisons

$$T(s(t)) = -\frac{\det(f'(t), f''(t), f'''(t))}{\|f'(t) \wedge f''(t)\|^2}.$$

#### 5.4.2. Théorème fondamental. —

**Théorème 5.15.** — La courbure et la torsion déterminent l'arc géométrique orienté à déplacement près. C'est à dire que si  $T : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  est de classe  $C^1$  et si  $K : I \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et si  $s_0 \in I, M_0 \in \mathbb{R}^3$  et  $(\vec{\tau}_0, \vec{\nu}_0, \vec{\beta}_0)$  est un repère orthonormé alors il existe une unique courbe bi-régulière  $C^3$  paramétrée par longueur d'arc  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  dont la courbure soit  $K$ , la torsion soit  $T$  et telle que  $c(s_0) = M_0, \vec{\tau}(s_0) = \vec{\tau}_0, \vec{\nu}(s_0) = \vec{\nu}_0, \vec{\beta}(s_0) = \vec{\beta}_0$ .

*Démonstration.* — Il suffit de démontrer que le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}\vec{\tau}(s) = & K(s)\vec{\nu}(s) \\ \frac{d}{ds}\vec{\nu}(s) = & -K(s)\vec{\tau}(s) & -T(s)\vec{\beta}(s) \\ \frac{d}{ds}\vec{\beta}(s) = & T(s)\vec{\nu}(s) \end{cases}$$

avec la condition initiale  $\vec{\tau}(s_0) = \vec{\tau}_0, \vec{\nu}(s_0) = \vec{\nu}_0, \vec{\beta}(s_0) = \vec{\beta}_0$  a une unique solution, il suffira alors de considérer la courbes

$$c(s) = M_0 + \int_{s_0}^s \vec{\tau}(t)dt.$$

On écrit ce système dans la base orthonormée directe  $(\vec{\tau}_0, \vec{\nu}_0, \vec{\beta}_0)$  : si  $O(s)$  est la matrice dont les colonnes représentent les coordonnées de  $\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s), \vec{\beta}(s)$  dans cette base alors ce système équivaut à :

$$\frac{d}{ds}O(s) = O(s) \begin{pmatrix} 0 & -K(s) & \\ K(s) & 0 & T(s) \\ 0 & -T(s) & 0 \end{pmatrix} = O(s)\omega(s).$$

Où

$$\omega(s) = \begin{pmatrix} 0 & -K(s) & \\ K(s) & 0 & T(s) \\ 0 & -T(s) & 0 \end{pmatrix}$$

est une application continue, ainsi on sait que cette équation différentielle a une unique solution telle que  $O(s_0) = \text{Id}_3$ . On vérifie sans peine que puisque pour tout  $s, \omega(s)$  est antisymétrique alors :

$$\frac{d}{ds} [{}^tO(s)O(s)] = -\omega(s) [{}^tO(s)O(s)] + [{}^tO(s)O(s)] \omega(s).$$

Ainsi  $s \mapsto [{}^tO(s)O(s)]$  vérifie une équation différentielle linéaire mais l'application  $s \mapsto \text{Id}_3$  est aussi solution de cette équation et prend la même valeur en  $s_0$ , par unicité de cette solution on a

$$\forall s \in I, [{}^tO(s)O(s)] = \text{Id}_3.$$

□

*Exemples :*

– La torsion est nulle si et seulement si l'arc géométrique est planaire. En effet la torsion est nulle si et seulement si la binormale est constante et ceci équivaut à ce que la fonction  $s \mapsto \langle \overrightarrow{c(s)c(s_0)}, \vec{\beta}(s_0) \rangle$  soit constante égale à 0 et donc à ce que la courbe soit tracée dans le plan passant par  $c(s_0)$  et orthogonale à  $\vec{\beta}(s_0)$ .

$$\forall s \in I, \langle \overrightarrow{c(s)c(s_0)}, \beta(s_0) \rangle = 0.$$

– Si la courbure et la torsion sont constante alors l'arc géométrique est une hélice circulaire. On peut démontrer ceci de plusieurs façons :

i) La première est de remarquer que puisqu'alors la matrice  $\omega(s)$  est constante antisymétrique, on peut trouver une matrice orthogonale  $P \in O(3)$  telle que

$$\begin{pmatrix} 0 & -K & \\ K & 0 & T \\ 0 & -T & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^tP$$

où  $\lambda^2 = K^2 + T^2$ . On en déduit :

$$O(s)P = \begin{pmatrix} \cos(\lambda t) & \sin(\lambda t) & 0 \\ -\sin(\lambda t) & \cos(\lambda t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et en intégrant on trouve bien que  $s \mapsto c(s)$  décrit une hélice circulaire.

ii) La seconde façon est d'utiliser les équations de Frenet : nous avons

$$\frac{d}{ds} \vec{\tau}(s) = K \vec{\nu}(s), \frac{d^2}{ds^2} \vec{\tau}(s) = K \frac{d}{ds} \vec{\nu}(s) = -K(K \vec{\tau}(s) + T \vec{\beta}(s))$$

et donc

$$\frac{d^3}{ds^3} \vec{\tau}(s) = -K \left( K \frac{d}{ds} \vec{\tau}(s) + T \frac{d}{ds} \vec{\beta}(s) \right) = -K^2 \frac{d}{ds} \vec{\tau}(s) - T^2 K \vec{\nu}(s)$$

$$\frac{d^2}{ds^2} \frac{d\tau}{ds}(s) + (K^2 + T^2) \frac{d\tau}{ds}(s) = 0$$

On en déduit que si on pose  $\lambda = \sqrt{K^2 + T^2}$  alors

$$\frac{d\tau}{ds}(s) = \cos(\lambda(s - s_0)) \frac{d\tau}{ds}(s_0) + \frac{\sin(\lambda(s - s_0))}{\lambda} \frac{d^2\tau}{ds^2}(s_0)$$

Soit compte tenu des relations précédentes :

$$\frac{d\tau}{ds}(s) = \cos(\lambda(s - s_0)) K \vec{\nu}_0 - \frac{\sin(\lambda(s - s_0))}{\lambda} (K^2 \vec{\tau}_0 + K T \vec{\beta}_0)$$

et en intégrant :

$$\vec{\tau}(s) = \vec{\tau}_0 + \frac{\sin(\lambda(s - s_0))}{\lambda} K \vec{\nu}_0 - \frac{1 - \cos(\lambda(s - s_0))}{\lambda^2} (K^2 \vec{\tau}_0 + K T \vec{\beta}_0)$$

et en intégrant encore une fois :

$$c(s) = c(s_0) + (s - s_0) \left[ \tau_0 - \frac{1}{\lambda^2} (K^2 \vec{\tau}_0 + K T \vec{\beta}_0) \right] + \frac{1 - \cos(\lambda(s - s_0))}{\lambda^2} K \vec{\nu}_0 + \frac{\sin(\lambda(s - s_0))}{\lambda^3} (K^2 \vec{\tau}_0 + K T \vec{\beta}_0).$$

## Exercices sur les courbes planes et gauches

**Exercice 5.1.** — Soit  $c : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^2$  la courbe paramétrée par

$$c(t) := (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$$

(1) Montrer que  $c$  est de longueur finie.

(2) Montrer que  $e^{-2\pi} L\left(c\Big|_{[T, T+2\pi]}\right) = L\left(c\Big|_{[T+2\pi, T+4\pi]}\right)$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 5.2.** — Montrer que la longueur de la courbe  $c : ]0, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  paramétrée par  $c(t) := (t, t \sin \frac{1}{t})$  est infinie.

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 5.3.** — (1) Montrer que si  $c$  est une courbe paramétrée régulière passant par deux points  $M = c(a)$  et  $L = c(b)$  alors Montrer que pour tout vecteur unitaire  $\vec{u}$  de  $\mathbb{R}^2$  on a  $\overrightarrow{ML} \cdot \vec{u} \leq \int_a^b \|c'(t)\| dt$ . Caractériser les cas d'égalités.

(2) En déduire que

$$d(M, L) \leq \int_a^b \|c'(t)\| dt$$

avec égalité si et seulement si  $c$  parcourt le segment  $[M, L]$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 5.4.** — Calculer la courbure d'une courbe plane si elle est donnée en représentation polaire  $(r(s), \phi(s))$ .

Exprimer cette courbure en fonction de  $r$  lorsque  $r$  est fonction  $C^1$  de  $\phi$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 5.5.** — Trouver une formule pour la courbure d'une courbe donnée en fonction implicite.

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 5.6.** — Calculer la courbure des courbes suivantes :

(1) Ellipse de demi-axes de longueurs respectives  $a$  et  $b$ .

(2) Cycloïde paramétrée par  $u \mapsto (u - \sin u, 1 - \cos u)$ .

(3) Spirale logarithmique  $r = Ce^{-n\phi}$ .

(4) Tractrice  $t \mapsto (t - \tanh t, \frac{1}{\cosh t})$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 5.7.** — Soit  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe régulière de classe  $C^3$  que l'on suppose paramétrée par longueur d'arc. On note  $\vec{T} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  son vecteur tangent unitaire et  $\vec{N} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  son vecteur normal unitaire. Pour  $\alpha \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  fixé on définit  $\vec{u} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  par  $\vec{u}(s) = \cos(\alpha)\vec{T}(s) + \sin(\alpha)\vec{N}(s)$ . Pour  $s \in I$  on note  $\mathcal{D}_s$  la droite passant par le point  $c(s)$  et dirigée par le vecteur  $\vec{u}(s)$ .

Déterminer l'enveloppe de la famille de droites  $(\mathcal{D}_s)_{s \in I}$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 5.8.** — Déterminer le repère de Frenet, la courbure et la développée de la courbe paramétrée par  $t \mapsto (\cos 3t, \sin 2t)$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 5.9.** — On travaille ici dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^2$  orienté. Soit  $c : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe  $C^\infty$  régulière paramétrée par longueur d'arc. On note  $\vec{\tau}(s) = c'(s)$  le vecteur tangent unitaire et  $\vec{\nu}(s)$  le vecteur normal unitaire l'angle  $(\vec{\tau}(s), \vec{\nu}(s))$  est donc  $\pi/2$ . On rappelle que la courbure  $\kappa$  est définie par

$$\frac{d}{ds} \vec{\tau}(s) = \kappa(s) \vec{\nu}(s).$$

On introduit la fonction  $F : ]a, b[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$F(s, t) = c(s) + t\vec{\nu}(s).$$

(1) Soit  $s_0 \in ]a, b[$ , montrer qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que la restriction de  $F$  à  $]s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon[ \times ]-\varepsilon, +\varepsilon[$  soit un  $C^\infty$  difféomorphisme sur son image.

(2) Si  $0 < \eta < \varepsilon$ , exprimer alors l'aire de  $F(]s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon[ \times ]0, \eta[)$  en fonction de  $\int_{s_0 - \varepsilon}^{s_0 + \varepsilon} \kappa(s) ds$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 5.10.** — Soit  $a > b > 0$  on considère l'ellipse  $\mathcal{E}$  d'équation  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  qui est paramétrée par

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t) \quad (21)$$

(1) Calculer le vecteur tangent unitaire  $\vec{T}(t)$ , le vecteur normal unitaire  $\vec{N}(t)$  et la courbure  $\kappa(t)$  de cette ellipse en  $\gamma(t)$ .

(2) Soit  $m \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2/a^2 + y^2/b^2 > 1\}$ .

i) Soit  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'unique fonction  $C^\infty$  telle que

$$\vec{N}(t) = (\cos \alpha(t), \sin \alpha(t)) \text{ et } \alpha(0) = 0.$$

Montrer que  $\alpha$  est un difféomorphisme croissant de  $\mathbb{R}$  sur lui-même et que  $\alpha(k\pi) = k\pi$  si  $k = 1/2, 1, 3/2, 2$ . Expliquer alors pourquoi l'application qui à  $p = \gamma(t) \in \mathcal{E}$  associe la normale  $N(t)$  à  $\mathcal{E}$  en  $p$  est un homéomorphisme de  $\mathcal{E}$  sur le cercle unité  $S^1$  (22).

ii) Donner une condition pour que  $p_0 \in \mathcal{E}$  soit un minimum ou un maximum de la fonction  $p \in \mathcal{E} \mapsto \|\vec{pm}\|^2$ . En déduire que cette fonction a un unique minimum et maximum sur  $\mathcal{E}$ .

iii) Montrer que si ce minimum est atteint en  $\gamma(t)$  alors  $\gamma(t)$  est caractérisé par  $\langle \gamma'(t), \vec{m\gamma(t)} \rangle = 0$  et  $\langle \kappa(t)\vec{N}(t), \vec{m\gamma(t)} \rangle + 1 > 0$ .

(3) On introduit comme précédemment (au détail près que la courbe n'est pas paramétrée par longueur d'arc) la fonction  $F(t, \lambda) = \gamma(t) + \lambda\vec{N}(t)$  Montrer que  $F$  est un  $C^\infty$  difféomorphisme de  $]0, 2\pi[ \times ]-\infty, 0[$  sur  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2/a^2 + y^2/b^2 > 1\} \setminus \{(x, 0), x \geq 0\}$ . Pour cela, montrer que si  $F(t, \lambda) = m$  avec  $\lambda < 0$  alors  $\gamma(t)$  est le point de  $\mathcal{E}$  le plus proche de  $m$ .

(4) Si  $R > 0$ , alors calculer l'aire de  $F(]0, 2\pi[ \times ]-R, 0[)$  en fonction de  $L$  la longueur de l'ellipse  $\mathcal{E}$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 5.11.** — (1) Soit  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $t \mapsto (x(t), y(t))$  une courbe  $C^2$  régulière (non forcément paramétrée par longueur d'arc), donner en fonction de  $x'(t), y'(t), x''(t), y''(t)$  l'expression de la courbure de cette courbe.

(21) Attention : ce n'est pas une paramétrisation par longueur d'arc !

(22) On pourra admettre ce résultat.

On considère la fonction  $e : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$e((x, y); (\xi, \eta)) = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

$e$  est une fonction  $C^\infty$ . Et si  $\gamma \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^3)$ , on lui associe son énergie

$$E(\gamma) = \int_{[0,1]} e(\gamma(t); \gamma'(t)) dt.$$

On cherche les courbes réalisant le minimum de l'énergie sur

$$\Omega = \{\gamma \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^2), \text{ tel que } \gamma(0) = (x_0, y_0) \text{ et } \gamma(1) = (x_1, y_1)\}.$$

(2) Si  $\gamma \in \Omega$  réalise ce minimum, écrire les équations d'Euler-Lagrange vérifiées par  $\gamma$ , on notera  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . On doit trouver les équations :

$$\ddot{x} = \frac{2}{1 + x^2 + y^2} [2(x\dot{x} + y\dot{y})\dot{x} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)x]$$

$$\ddot{y} = \frac{2}{1 + x^2 + y^2} [2(x\dot{x} + y\dot{y})\dot{y} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)y]$$

(3) Montrer que si  $\gamma \in \Omega$  vérifie ces équations alors les fonctions

$$t \mapsto \frac{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

$$\text{et } t \mapsto \frac{y(t)\dot{x}(t) - x(t)\dot{y}(t)}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

sont constantes.

(4) En déduire que les solutions de ces équations parcourent des cercles ou des droites .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 5.12.** — Soit  $a \in ]0, \infty[$ , on considère la courbe plane  $C_a$  paramétrée par

$$t \in ]0, \pi[ \mapsto c(t) = (a \log |\tan(t/2)| + a \cos(t), a \sin(t)).$$

(1) Donner une représentation graphique de la courbe  $C_a$ .

(2) Pour quelles valeurs de  $t$ , cette courbe est elle bi-régulière ?

(3) En ces points calculer la courbure et le centre de courbure.

(4) Quelle est la courbe décrite par les centres de courbures ?

(5) Soit  $t \in ]0, \pi[ \setminus \{\pi/2\}$ , et  $P$  le point d'intersection de la tangente en  $c(t)$  à  $C_a$  et de l'axe  $Ox = \{(t, 0), t \in \mathbb{R}\}$ . Calculer la distance de  $P$  à  $c(t)$ . Quelles sont les courbes planes birégulières aillant la même propriété?

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 5.13. — Courbes gauches tracées sur une sphère.**

On suppose que  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une courbe gauche  $C^\infty$  birégulière, paramétrée par longueur d'arc. On note  $T : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  son vecteur tangent unitaire,  $N : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  son vecteur normal principal et  $B(s) = T(s) \wedge N(s)$  son vecteur binormal. On rappelle les relations

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} T(s) &= K(s)N(s) \\ \frac{d}{ds} N(s) &= -K(s)T(s) - \mathcal{T}(s)B(s) \\ \frac{d}{ds} B(s) &= \mathcal{T}(s)N(s) \end{aligned}$$

où  $K : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  est la courbure et  $\mathcal{T} : I \rightarrow \mathbb{R}$  la torsion.

On suppose d'abord que  $c$  est tracée sur la sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$ . i.e. que  $\forall s \in I, \|\overrightarrow{Oc(s)}\|^2 = r^2$ .

- (1) Montrer que les vecteurs  $T(s)$  et  $\overrightarrow{Oc(s)}$  sont orthogonaux.
- (2) En déduire qu'il existe des fonctions  $C^\infty, \alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\begin{aligned} \alpha(s)^2 + \beta(s)^2 &= r^2, \\ \text{et } \forall s \in I, \overrightarrow{Oc(s)} &= \alpha(s)N(s) + \beta(s)B(s). \end{aligned}$$

- (3) En déduire trois relations entre les fonctions  $\alpha, \beta, K, \mathcal{T}$ .
- (4) En déduire que la courbure et la torsion de  $c$  vérifie l'équation

$$r^2 = \left(\frac{1}{K}\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{K}\right)' \frac{1}{\mathcal{T}}\right)^2.$$

(on a noté  $'$  la dérivation par rapport à  $s$ ).

(5) Réciproquement, on suppose que  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une courbe gauche  $C^\infty$  birégulière, paramétrée par longueur d'arc et que sa courbure et sa torsion vérifie la relation :

$$0 = \frac{\mathcal{T}}{K} + \left(\left(\frac{1}{K}\right)' \frac{1}{\mathcal{T}}\right)'.$$

Montrer qu'alors  $c$  est tracée sur une sphère.

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Indication exercice 5.1.** —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

**Indication exercice 5.2.** —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

**Indication exercice 5.3.** —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

**Indication exercice 5.4.** —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

**Indication exercice 5.5.** —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

**Indication exercice 5.6.** —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

**Indication exercice 5.7.** —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

**Indication exercice 5.8.** —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

**Indication exercice 5.9.** —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

**Indication exercice 5.10.** —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

**Indication exercice 5.11.** —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

**Indication exercice 5.12.** —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

**Indication exercice 5.13.** — *Indication : trouver des fonctions  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}$ , telles que  $s \mapsto c(s) - \alpha(s)N(s) - \beta(s)B(s)$  soit une application constante. et démontrer qu'il y a une constante  $r$  telle que :*

$$r^2 = \left(\frac{1}{K}\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{K}\right)' \frac{1}{T}\right)^2.$$

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Corrigé exercice 5.1.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 5.2.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 5.3.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 5.4.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 5.5.* — Solution :

$$k(s) = \frac{r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{r}^2 (1 + \dot{\phi}) + r \dot{r} \ddot{\phi} - r \ddot{r} \dot{\phi}}{(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 5.6.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 5.7.* — (spirale hyperbolique  $r\phi = cste$ )

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 5.8.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 5.9.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 5.10.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 5.11.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 5.12.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 5.13.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

## Les surfaces

**6.1. Rappel sur les formes quadratiques et bilinéaires.** —

*6.1.1. Définition.* — Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension finie  $n$ , on appelle forme bilinéaire sur  $E$  une application  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  qui est linéaire par rapport à chaque variable :

$$\forall x, y, z \in E, \lambda \in \mathbb{R}, b(x + \lambda y, z) = b(x, z) + \lambda b(y, z)$$

$$b(z, x + \lambda y) = b(z, x) + \lambda b(z, y).$$

On dit qu'une forme bilinéaire est symétrique si

$$\forall x, y \in E, b(x, y) = b(y, x).$$

Une forme quadratique sur  $E$  est une application  $q : E \rightarrow \mathbb{R}$  qui est polynomiale homogène de degré 2. A une forme quadratique est associée une unique forme bilinéaire symétrique  $b_q$  via :

$$b_q(x, y) = \frac{1}{2} [q(x + y) - q(x) - q(y)] \quad \text{et} \quad q(x) = b_q(x, x).$$

On parlera donc indifféremment de formes quadratiques ou de formes bilinéaires symétriques.

*6.1.2. Matrices et changement de base.* — Si  $e = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  et si  $b$  est une forme bilinéaire sur  $E$  alors pour  $x = \sum_i x_i e_i$  et  $y = \sum_i y_i e_i$  nous avons

$$b(x, y) = \sum_{i,j} x_i y_j b(e_i, e_j) = {}^t X M Y,$$

où on a noté

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

et

$$M = \text{Mat}(b, e) = \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & \dots & b(e_1, e_j) & \dots & b(e_1, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b(e_i, e_1) & \dots & b(e_i, e_j) & \dots & b(e_i, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b(e_n, e_1) & \dots & b(e_n, e_j) & \dots & b(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

la matrice de  $b$  dans la base  $e$ . Si on considère une autre base  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  et  $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  la matrice de changement de base, c'est à dire que les colonnes de  $P$  exprime les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne base :  $e'_j = \sum_i p_{i,j} e_i$ . Alors

$$\text{Mat}(b, e') = {}^t P \text{Mat}(b, e) P$$

Alors  $b$  est une forme bilinéaire symétrique si et seulement si la matrice de  $b$  dans une base  $e$  est symétrique :

$${}^t \text{Mat}(b, e) = \text{Mat}(b, e).$$

Soit  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{R}$  espaces vectoriels de dimension finie et  $\varphi : E \rightarrow F$  une application linéaire ; lorsque  $q : F \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme quadratique sur  $F$  alors  $\varphi^* q = q \circ \varphi$  est aussi une forme quadratique sur  $E$  et si  $e$  est une base de  $E$ ,  $f$  une base de  $F$  alors

$$\text{Mat}(\varphi^* q, e) = {}^t \text{Mat}(\varphi, e, f) \text{Mat}(q, f) \text{Mat}(\varphi, e, f).$$

**6.1.3. Formes quadratiques sur un espace euclidien.** — Lorsque  $q$  est une forme quadratique définie positive <sup>(23)</sup> sur un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension finie,  $(E, b_q)$  est alors un espace euclidien :  $b_q$  est un produit scalaire. Et pour toute forme quadratique  $p$ , il existe une unique endomorphisme  $u$  autoadjoint de  $(E, b_q)$  tel que

$$\forall x \in E, p(x) = b_q(u(x), x)$$

ce qui équivaut aussi à

$$\forall x, y \in E, b_p(x, y) = b_q(u(x), y).$$

<sup>(23)</sup> C'est à dire  $\forall x \in E, q(x) \geq 0$  et  $(q(x) = 0) \Rightarrow (x = 0)$ .

**Proposition 6.1.** — Soit  $e$  une base de  $E$  et soit  $A = \text{Mat}(q, e)$  la matrice de  $q$  dans cette base et  $B = \text{Mat}(p, e)$  la matrice de  $p$  dans cette base. Alors l'endomorphisme  $u$  associé à  $p$  a pour matrice

$$A^{-1} B$$

dans la base  $e$ . En particulier le déterminant de  $u$  vaut :

$$\det u = \frac{\det B}{\det A}.$$

*Démonstration.* — Soit  $C$  la matrice recherchée, par définition celle-ci doit satisfaire

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X B Y = {}^t (C X) A Y = {}^t X {}^t C A Y$$

C'est à dire

$${}^t C A = B$$

mais comme  $A$  et  $B$  sont symétrique on a  $AC = B$  et donc  $C = A^{-1} B$ .  $\square$

Remarquons que cette matrice  $A^{-1} B$  n'est pas forcément symétrique, ceci est normal car c'est uniquement par rapport à une base orthonormée que la matrice d'un endomorphisme autoadjoint de  $(E, b_q)$  est symétrique, et ici  $e$  n'est pas forcément orthonormée (sauf si  $A = \text{Id}$ ). Le fait que  $u$  soit diagonalisable implique néanmoins que cette matrice est diagonalisable.

**6.2. La première forme fondamentale.** — On travaille jusqu'à la fin de cette leçon dans l'espace euclidien orienté  $\mathbb{R}^3$  et on note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire et  $\| \cdot \|$  la norme associée.

**6.2.1. Définition.** — Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface  $C^\infty$ , on appelle *première forme fondamentale* de  $S$  en  $p \in S$  la forme bilinéaire symétrique  $I_p$  définie sur  $\overrightarrow{T_p S}$  par

$$I_p(\xi, \eta) = \langle \xi, \eta \rangle$$

elle est associée à la forme quadratique  $\xi \mapsto \|\xi\|^2$ . La première forme fondamentale est donc définie positive.

6.2.2. *Expression dans les cartes.* — Soit  $f : U \rightarrow S$  une paramétrisation d'un bout de  $S$ , alors pour tout  $(u, v) \in U$ , l'application linéaire :

$$Df(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overrightarrow{T_{f(u,v)}S}$$

$$(a, b) \mapsto Df(u, v)(a, b) = a \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + b \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$$

est un isomorphisme et

$$Df(u, v)^* I_{f(u,v)}((a, b); (a, b)) = \left\| a \frac{\partial f}{\partial u} + b \frac{\partial f}{\partial v} \right\|^2 = Ea^2 + 2abF + b^2G$$

où les fonctions  $E$ ,  $F$  et  $G$  sont définies par

$$E(u, v) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}(u, v), \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \right\rangle, \quad G(u, v) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}(u, v), \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\rangle$$

$$\text{et } F(u, v) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}(u, v), \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\rangle.$$

On obtient ainsi sur  $U$  un champ de formes quadratiques

$$(u, v) \mapsto E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$$

où  $du(a, b) = a$ ,  $dv(a, b) = b$ , le produit de formes linéaires étant une forme quadratique :  $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$  est bien une forme quadratique. On pourrait aussi considérer que cette expression est celle d'un champ de formes quadratiques sur  $f(U)$  mais les formes linéaires  $du, dv$  sont maintenant des formes linéaires sur  $\overrightarrow{T_{f(u,v)}S}$  définies par :

$$du \left( a \frac{\partial f}{\partial u} + b \frac{\partial f}{\partial v} \right) = a$$

et

$$dv \left( a \frac{\partial f}{\partial u} + b \frac{\partial f}{\partial v} \right) = b.$$

6.2.3. *A quoi ça sert ?* — On a déjà rencontré et utilisé la première fondamentale pour calculer des aires et des longueurs de courbes tracées sur  $S$ , on peut aussi calculer les angles entre des vecteurs tangents. C'est l'outil qui sert à étudier la géométrie de  $S$ .

6.2.4. *Quelques expressions.* —

6.2.4.1. *Pour un graphe.* — Si  $S$  est donnée par  $z = g(x, y)$  où  $g \in C^\infty(U)$  ( $U$  étant un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ), alors  $S$  est paramétrée par  $f(x, y) = (x, y, g(x, y))$ . Un petit calcul montre que la première fondamentale est donnée par

$$I = \left( 1 + \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 \right) dx^2 + 2 \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} dx dy + \left( 1 + \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 \right) dy^2.$$

ou encore

$$\text{Mat} \left( I_{f(x,y)}, \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right) = \begin{pmatrix} 1 + \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 & \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} & 1 + \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 \end{pmatrix}.$$

6.2.4.2. *Pour une surface de révolution.* — Soit  $s \mapsto (x(s), y(s))$  une courbe plane  $C^\infty$  paramétrée par longueur d'arc :

$$\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2 = 1.$$

On considère une surface de révolution paramétrée par

$$f(s, \theta) = x(s)\vec{u}_\theta + y(s)\vec{k}.$$

puisque

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \dot{x}(s)\vec{u}_\theta + \dot{y}(s)\vec{k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = x(s)\vec{v}_\theta$$

on obtient :

$$\text{Mat} \left( I_{f(s,\theta)}, \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2(s) \end{pmatrix}.$$

### 6.3. La seconde forme fondamentale. —

6.3.1. *Définition.* — Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface  $C^\infty$ , on veut étudier l'allure locale de  $S$  au voisinage de  $p \in S$  et plus particulièrement sa position par rapport à son plan tangent. On considère  $\vec{v}_p$  une normale unitaire à  $S$  en  $p$  <sup>(24)</sup>. On peut paramétrer un voisinage de  $p$  dans  $S$  par un graphe au dessus du plan tangent  $\overrightarrow{T_p}S$  c'est à dire qu'il y a  $V$  un voisinage de  $p$  dans  $\mathbb{R}^3$  de la forme

$$V = \{p + \xi + z\vec{v}, \xi \in U, |z| \leq \varepsilon\},$$

<sup>(24)</sup>Il y a donc deux choix possibles.

où  $U$  est un voisinage de 0 dans  $\overrightarrow{T_p S}$  et  $\varepsilon$  un réel strictement positif et

$$S \cap V = \{p + \xi + g(\xi)\vec{v}_p, \xi \in U\}$$

où  $g$  est une fonction  $C^\infty$  sur  $U$ . Puisque l'espace tangent à  $S$  en  $p$  est  $\overrightarrow{T_p S}$ , la différentielle de  $g$  en 0 est nulle :

$$Dg(0) = 0,$$

et  $S$  est tangent à l'ordre deux en  $p$  au graphe de

$$\xi \mapsto \frac{1}{2}D^2g(0)(\xi, \xi)$$

**Définition 6.2.** — Si  $\vec{v}_p$  désigne une normale unitaire à  $S$  en  $p$ , on appelle *seconde forme fondamentale* de  $S$  en  $p$  la forme quadratique sur  $\overrightarrow{T_p S}$  définie par

$$II_p^{\vec{v}_p}(\xi, \xi) = D^2g(0)(\xi, \xi).$$

On omet en général la dépendance en la normale et on note  $II_p$ .

**6.3.2. Expression dans les cartes.** — Soit  $f : U \rightarrow S$  une paramétrisation d'un bout de  $S$ , on choisit alors la normale unitaire

$$\vec{v}(u, v) = \frac{\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \right\|}.$$

**Proposition 6.3.** — Si on note

$$\text{Mat} \left( \text{II}_{f(u,v)}, \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right) = \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix},$$

alors

$$\begin{aligned} l &= II \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \vec{v} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial u} \right\rangle \\ m &= II \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, \vec{v} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial u} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial v} \right\rangle \\ n &= II \left( \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \vec{v} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial v} \right\rangle \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Soient  $p = f(u, v)$  et  $\vec{v} = \vec{v}(u, v)$ , on effectue un développement limité en  $(u, v)$  de  $f$  :

$$\begin{aligned} f(u+t, v+s) &= p + t \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + s \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u, v) + 2st \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v) + s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u, v) \right] + o(s^2 + t^2). \end{aligned}$$

Soit  $\pi_0$  la projection orthogonale sur  $T_p S$ , nous avons donc :

$$\pi_0(f(u+t, v+s)) = p + t \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + s \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) + O(s^2 + t^2)$$

et si  $\text{Id} - \pi_0 = \pi_1$  est la projection sur la droite normale nous obtenons :

$$\begin{aligned} \pi_1(f(u+t, v+s)) &= \frac{1}{2} \left[ t^2 \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \vec{v} \right\rangle + 2st \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, \vec{v} \right\rangle + s^2 \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \vec{v} \right\rangle \right] \vec{v} \\ &\quad + o(s^2 + t^2). \end{aligned}$$

On sait qu'il existe  $U \subset \overrightarrow{T_p S}$  un ouvert et  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction  $C^\infty$  telle que

$$g(\overrightarrow{p\pi_1(f(u+t, v+s))}) = \langle \pi_1(f(u+t, v+s)), \vec{v} \rangle.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} g \left( t \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + s \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) + O(s^2 + t^2) \right) &= \\ \frac{1}{2} \left[ t^2 \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \vec{v} \right\rangle + 2st \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, \vec{v} \right\rangle + s^2 \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \vec{v} \right\rangle \right] & \\ + o(s^2 + t^2). & \end{aligned}$$

En effectuant un développement limité de cette expression, on obtient facilement :

$$\begin{aligned} D^2g(0) \left( t \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + s \frac{\partial f}{\partial v}(u, v), t \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + s \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right) &= \\ t^2 \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \vec{v} \right\rangle + 2st \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, \vec{v} \right\rangle + s^2 \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \vec{v} \right\rangle. & \end{aligned}$$

D'où les égalités :

$$l = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \vec{v} \right\rangle, \quad m = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, \vec{v} \right\rangle \quad \text{et} \quad n = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \vec{v} \right\rangle.$$

Les dernières identités s'obtiennent en dérivant par rapport à  $u$  et  $v$  les identités :

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \vec{v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \vec{v} \right\rangle = 0$$

Pour obtenir les identités :

$$\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \vec{v} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial u} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}, \vec{v} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial v} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, \vec{v} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial u} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \vec{v} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial v} \right\rangle = 0.$$

□

### 6.3.3. Quelques Calculs. —

6.3.3.1. *Les graphes* . — On a vu que si  $S$  est décrite par  $z = g(x, y)$  et que si le plan tangent à  $S$  est horizontale (i.e.  $Dg(x, y) = 0$ ) alors  $II = D^2g(x, y)$ . Dans le cas général, si  $f(x, y) = (x, y, g(x, y))$ , on obtient pour la normale :

$$\vec{v} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \wedge \frac{\partial f}{\partial y} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}} \left( -\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right).$$

et donc puisque puisque  $D^2f(x, y) = (0, 0, D^2g(x, y))$ , on obtient facilement

$$l = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$$

$$l = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}.$$

6.3.3.2. *Les surfaces de révolution*. — Soit  $s \mapsto (x(s), y(s))$  une courbe plane  $C^\infty$  paramétrée par longueur d'arc :

$$\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2 = 1.$$

On note  $\kappa$  la courbure de cette courbe. On considère une surface de révolution paramétrée par

$$f(s, \theta) = x(s)\vec{u}_\theta + y(s)\vec{k}.$$

puisque

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \dot{x}(s)\vec{u}_\theta + \dot{y}(s)\vec{k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = x(s)\vec{v}_\theta$$

On obtient facilement que

$$\vec{v}(s, \theta) = -\dot{y}(s)\vec{u}_\theta + \dot{x}(s)\vec{k},$$

puis en se servant des relations :

$$\ddot{x}(s) = -\kappa(s)\dot{y}(s) \quad \text{et} \quad \ddot{y}(s) = \kappa(s)\dot{x}(s).$$

on obtient donc

$$l = -\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} \right\rangle = \kappa(s)$$

$$m = -\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} \right\rangle = 0$$

$$l = -\left\langle \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} \right\rangle = \dot{y}(s)x(s).$$

On remarque que pour exprimer la seconde forme fondamentale, il est parfois plus facile de calculer les dérivées de la normale (comme pour les surfaces de révolution) ou les dérivées secondes de la paramétrisation (comme pour les graphes) : on choisit la meilleur stratégie !

6.3.4. *L'application de Weingarten ou "shape operator"*. — Sur  $\overrightarrow{T_p S}$ , on dispose donc d'un produit scalaire  $I_p$  et d'une forme bilinéaire symétrique  $II_p$ , on sait donc qu'il existe une application linéaire autoadjointe pour  $I_p$

$$L (= L_p) : \overrightarrow{T_p S} \rightarrow \overrightarrow{T_p S}$$

tel que

$$\forall \xi, \eta \in \overrightarrow{T_p S}, \quad I_p(L\xi, \eta) = II_p(\xi, \eta).$$

Cette application est nommée *application de Weingarten* ou en anglais "shape operator".

**Proposition 6.4.** —

$$L\xi = -D\vec{\nu}(p)\xi$$

Au sens où si  $c : ]\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow S$  est une courbe  $C^1$  tracée sur  $S$  telle que  $c(0) = p$  et  $\dot{c}(0) = \xi$  alors

$$L\xi = -\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \vec{\nu}(c(t)).$$

*Démonstration.* — Remarquons d'abord que puisque

$$\|\vec{\nu}(c(t))\|^2 = 1,$$

en dérivant nous obtenons :

$$\left\langle \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \vec{\nu}(c(t)), \vec{\nu}(p) \right\rangle = 0,$$

c'est à dire que le vecteur  $D\nu(p)\xi$  est orthogonal à  $\vec{\nu}(p)$ , c'est donc un vecteur de  $\overrightarrow{T_p S}$ . Il nous faut vérifier que

$$\forall \xi, \eta \in \overrightarrow{T_p S}, I_p(D\vec{\nu}(p)\xi, \eta) = -\langle D\vec{\nu}(p), \eta \rangle = II_p(\xi, \eta).$$

Mais pour cela il suffit de le vérifier sur une base de  $\overrightarrow{T_p S}$ . Si  $P : U \rightarrow S$  est une paramétrisation d'un voisinage de  $S$ , alors  $(\frac{\partial P}{\partial u}, \frac{\partial P}{\partial v})$  est une telle base et puisque par définition :

$$D\vec{\nu}(p) \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \vec{\nu} \circ P \quad \text{et} \quad D\vec{\nu}(p) \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \vec{\nu} \circ P,$$

cette assertion est exactement le contenu de la proposition (6.3).  $\square$

**6.3.5. Courbures.** — On peut ainsi diagonaliser  $II_p$  par rapport à  $I_p$  (ou diagonaliser  $L$  dans une base orthonormale de  $\overrightarrow{T_p S}$ ), on obtient donc deux réels  $k_1$  et  $k_2$  appelées les **courbures principales** de  $S$  en  $p$  et on définit la **courbure de Gauss** de  $S$  en  $p$  comme

$$K(p) = k_1 k_2 = \det L$$

et la **courbure moyenne** de  $S$  en  $p$  par

$$H(p) = \frac{k_1 + k_2}{2} = \text{Trace } L.$$

Si on change de normale, les courbures principales changent de signe, donc la courbure de Gauss reste inchangée et la courbure moyenne change de signe.

Grâce à ce que nous avons rappelé sur les formes quadratiques, on sait que si dans une paramétrisation  $P : U \rightarrow S$  d'un voisinage de  $S$ , on a

$$I = E(du)^2 + 2Fdu dv + G(dv)^2 \quad \text{et} \quad II = l(du)^2 + 2mdudv + n(dv)^2$$

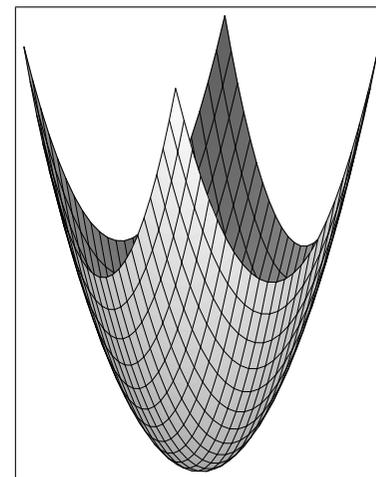
alors grâce à (6.1), nous obtenons :

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}$$

$$\text{et } H = \frac{1}{2} \text{Trace} \left[ \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \frac{Gl - 2Fm + En}{EG - F^2}.$$

**6.3.6. Allure de la surface par rapport à son plan tangent.** — La définition de la seconde forme fondamentale nous permet d'affirmer que

– Si  $K(p) > 0$ , alors  $II_p$  est définie négative ou définie positive et dans voisinage de  $p$ ,  $S$  est situé d'un seul coté du plan tangent. On dit alors que  $p$  est un point elliptique

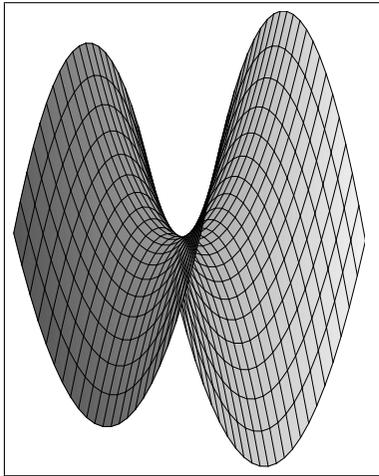


– Si  $K(p) < 0$ , alors  $S$  est situé de part et d'autre de son plan tangent et traverse celui-ci. En fait au voisinage de  $p$ ,  $S$  est le graphe d'une fonction  $z = g(x, y)$  (dans une base orthonormée ad hoc) où  $Dg(0, 0) = 0$  et  $K(p) = \det D^2g(0, 0) \neq 0$ , ainsi le lemme de Morse (2.5) nous assure

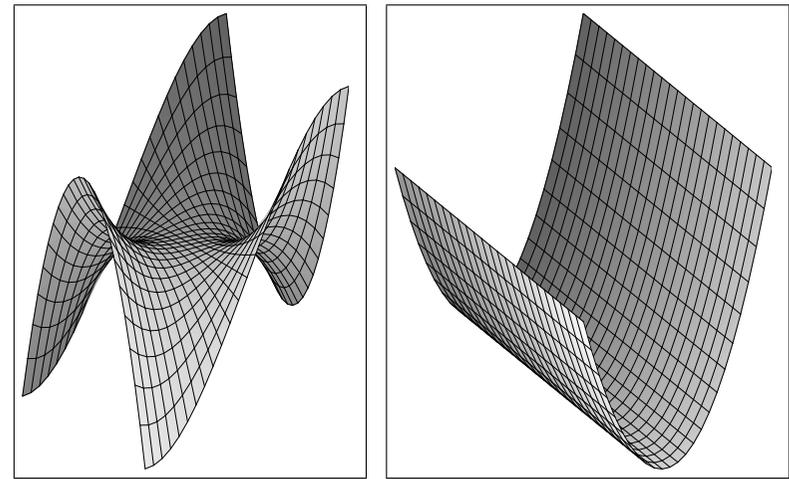
qu'il existe des coordonnées sur un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^2 (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$  telle que au voisinage de  $p$ ,  $S$  soit le graphe de

$$z = u^2(x, y) - v^2(x, y)$$

ainsi l'intersection du graphe de  $S$  avec le plan tangent est (au voisinage de  $p$ ) la réunion de deux courbes régulières qui ne s'intersectent qu'en  $p$  et les vecteurs tangents à ces courbes en  $p$  ne sont pas colinéaires. On dit que  $p$  est un point hyperbolique.



– Lorsque  $K(p) = 0$ , on dit que  $p$  est planaire mais on ne peut rien conclure à propos de la position relative de  $S$  et de son plan tangent. Les deux surfaces ci dessous ont toutes les deux un point planaire et des positions totalement différentes par rapport au plan tangent. La première surface est connu sous le nom de selle de singe.



Nous pouvons alors démontrer le résultat suivant :

**Proposition 6.5.** — Si  $S \subset \mathbb{R}^3$  est une surface compacte, alors il existe un point  $p \in S$  tel que

$$K(p) > 0.$$

Et donc il n'existe pas de surfaces compactes de  $\mathbb{R}^3$  à courbure négative ou nulle.

*Démonstration.* — Soit  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  un point fixé, la fonction

$$M \in S \mapsto \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2$$

est continue sur le compact  $S$ , on sait donc qu'il existe un point  $M_0 \in S$  tel que

$$\max_{M \in S} \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 = \|\overrightarrow{\Omega M_0}\|^2.$$

Notons  $R = \|\overrightarrow{\Omega M_0}\|$ . Grâce aux extrema liés (4.1.1), on sait que le vecteur  $\overrightarrow{\Omega M_0}$  est normal au plan tangent à  $S$  en  $M_0$ . Considérons donc un repère orthonormée  $(M_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  tel que  $(\vec{i}, \vec{j})$  soit une base de  $\overline{T_{M_0} S}$  et on suppose que  $\overrightarrow{M_0 \Omega} = R\vec{k}$ . On sait qu'un voisinage de  $M_0$  dans  $S$  se paramètre (dans ce repère) par un graphe  $z = g(x, y)$ , avec  $Dg(0, 0) = 0$  et  $\det D^2g(0, 0) = K$ . Si  $\overrightarrow{M_0 M} = x\vec{i} + y\vec{j} + g(x, y)\vec{k}$  alors

$$\|\overrightarrow{M_0 M}\|^2 = x^2 + y^2 + (g(x, y) - R)^2.$$

Mais on sait que

$$x^2 + y^2 + (g(x, y) - R)^2 \leq R^2,$$

On en déduit donc que pour  $x, y$  dans un voisinage de  $(0, 0)$  :

$$(18) \quad x^2 + y^2 \leq 2Rg(x, y).$$

Si  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(tx, ty)}{t^2} = \frac{1}{2} D^2 g(0, 0)((x, y); (x, y))$$

En conséquence en appliquant l'inégalité (18) à  $(tx, ty)$  en divisant l'inégalité obtenue par  $t^2$  et en faisant tendre  $t$  vers 0 on obtient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{x^2 + y^2}{R} \leq D^2 g(0, 0)((x, y); (x, y)).$$

Les courbures principales de  $S$  en  $M_0$  sont donc toutes les deux plus grandes que  $1/R$  et la courbure de  $S$  en  $M_0$  est plus grande que  $1/R^2 > 0$ .

□

6.3.7. *Calcul des courbures d'une surface de révolution.* — Si  $s \mapsto (x(s), y(s))$  est une courbe plane  $C^\infty$  paramétrée par longueur d'arc :

$$\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2 = 1.$$

On considère la surface de révolution paramétrée par

$$f(s, \theta) = x(s)\vec{u}_\theta + y(s)\vec{k}.$$

Nous avons obtenu

$$\text{Mat} \left( I_{f(s, \theta)}, \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2(s) \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Mat} \left( II_{f(s, \theta)}, \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right) = \begin{pmatrix} \kappa(s) & 0 \\ 0 & \dot{y}(s)x(s) \end{pmatrix}.$$

En conséquence, les courbures principales sont  $\kappa(s)$  et  $\frac{\dot{y}(s)}{x(s)}$ , la courbure de Gauss est :

$$K = \kappa(s) \frac{\dot{y}(s)}{x(s)}$$

et la courbure moyenne est

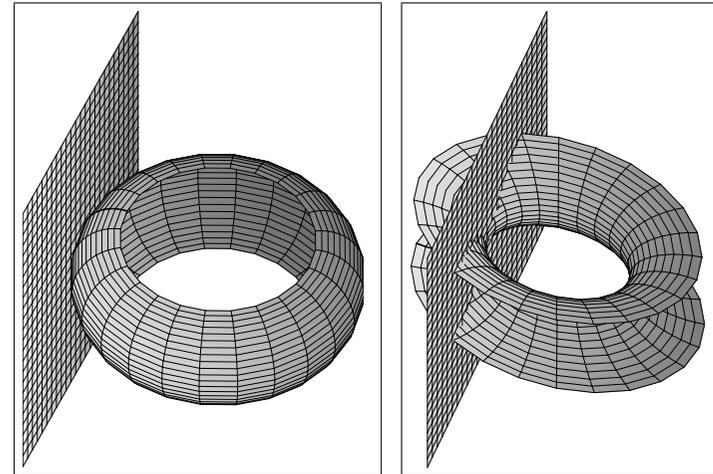
$$H = \frac{1}{2} \left( \kappa(s) + \frac{\dot{y}(s)}{x(s)} \right).$$

Pour la sphère de rayon 1, nous avons  $x(s) = \cos(s)$  et  $y(s) = \sin(s)$  et donc les courbures principales, de Gauss et moyenne sont toutes constantes égales à 1.

Pour un tore de révolution paramétré à l'aide de  $x(s) = a + \cos(s)$ ,  $y(s) = \sin(s)$  où  $a > 1$ , les courbures principales sont 1 et  $\frac{\cos(s)}{a + \cos(s)}$ , la courbure moyenne est donc  $H = \frac{a + 2\cos(s)}{2(a + \cos(s))}$  et la courbure de Gauss est

$$K = \frac{\cos(s)}{a + \cos(s)},$$

ainsi un tore de révolution est localement situé d'un seul côté de son plan tangent sur la partie correspondant aux points où  $\cos(s) > 0$  et est localement situé de part et d'autre du plan tangent sur la partie correspondant aux points où  $\cos(s) < 0$  :



6.3.8. *Directions particulières.* — On considère encore ici une surface  $S$   $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^3$ .

– Si  $p \in S$  est un point hyperbolique, on appelle **directions asymptotiques**, les droites de  $\overrightarrow{T_p S}$ , dirigées par un vecteur  $\xi$  tel que  $II_p(\xi, \xi) = 0$ . Ce sont les droites tangentes en  $p$  aux deux courbes  $S \cap T_p S$ . Une courbe toujours tangente à une direction asymptotique s'appelle une **courbe asymptotique**.

– On dit que  $p \in S$  est un point **ombilic** si  $II_p = \lambda I_p$ , c'est à dire un point où les courbures principales sont égales.

– On appelle **direction principale** en  $p$  une droite propre de l'application de Weingarten. Les **lignes de courbures** ou courbes principales sont les courbes toujours tangentes aux directions principales. Par exemple sur une surface de révolution les lignes de courbures sont les méridiens et les parallèles.

**Lemme 6.6.** — – Si  $K(p) < 0$  alors il y a deux courbes asymptotiques  $c_1, c_2$  passant en  $t = 0$  en  $p$  et  $(c'_1(0), c'_2(0))$  forme une base de  $\overrightarrow{T_p S}$ .  
– Si  $p$  n'est pas un point ombilic, il y a deux lignes de courbures  $\gamma_1, \gamma_2$  passant en  $t = 0$  en  $p$  telle que  $(\gamma'_1(0), \gamma'_2(0))$  forme une base de  $\overrightarrow{T_p S}$ .

*Démonstration.* — On considère une paramétrisation  $P : U \rightarrow S$  d'un voisinage de  $p$ , on a

$$I = E(du)^2 + 2Fdu dv + G(dv)^2 \quad \text{et} \quad II = l(du)^2 + 2mdudv + n(dv)^2$$

les fonctions  $E, F, G, l, m, n$  sont  $C^\infty$  sur  $U$ . De plus les fonctions courbures de Gauss et moyenne sont elles aussi  $C^\infty$  puisqu'elles s'expriment à l'aide des fonctions  $E, F, G, l, m, n$  : les courbures principales sont les solutions de l'équation :

$$X^2 - 2HX + K = 0,$$

dans les deux cas,  $p$  n'est pas un point ombilic, et on a en  $p$   $(k_1 - k_2)^2 = 4(H^2 - K) > 0$ , c'est donc aussi vrai au voisinage de  $p$ , et quitte à réduire  $U$ , on peut supposer que c'est vrai sur  $P(U)$ ; ainsi Les courbures principales sont

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \quad \text{et} \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K} ;$$

ce sont des fonctions  $C^\infty$  sur  $U$ . On veut déterminer des champs de vecteurs  $X_1, X_2$  sur  $U$  (et donc sur  $P(U)$ )

$$X_i = a_i \frac{\partial P}{\partial u} + b_i \frac{\partial P}{\partial v}$$

telle que

$$LX_i = k_i X_i.$$

Pour cela les fonctions  $a_i, b_i$  doivent satisfaire aux équations :

$$\begin{cases} (l - k_i E)a_i + (m - k_i F)b_i = 0 \\ (m - k_i F)a_i + (n - k_i G)b_i = 0 \end{cases}$$

Si  $m - k_i F \neq 0$  en  $p$ , alors dans un voisinage de  $p$  on peut prendre :  $a_i = 1$  et  $b_i = -(l - k_i E)/(m - k_i F)$ ; si  $l - k_i E \neq 0$  en  $p$ , alors dans un voisinage de  $p$  on peut prendre  $b_i = 1$  et  $a_i = -(m - k_i F)/(l - k_i E)$ ; si  $n - k_i G \neq 0$  en  $p$ , alors dans un voisinage de  $p$  on peut prendre  $a_i = 1$  et  $b_i = -(m - k_i F)/(n - k_i G)$  <sup>(25)</sup>. De toutes les façons et quitte à réduire  $U$ , on trouve deux champs de vecteurs  $X_1$  et  $X_2$  sur  $U$  tels que si  $P(u, v) = q \in P(U)$  alors  $DP(u, v)(a_1, b_1) = X_1(q)$  et  $DP(u, v)(a_2, b_2) = X_2(q)$  est une base de  $\overrightarrow{T_q S}$  formées de directions principales. Les courbes intégrales de ces champs de vecteurs sont des lignes de courbures .

Lorsqu'en plus  $K(p) < 0$ , alors quitte à réduire  $U$ , on peut supposer que sur  $P(U)$ ,  $K = k_1 k_2 < 0$ , alors les deux champs de vecteurs

$$Y_1 = \frac{X_1}{\sqrt{|k_1|}} + \frac{X_2}{\sqrt{|k_2|}} \quad \text{et} \quad Y_2 = \frac{X_1}{\sqrt{|k_1|}} - \frac{X_2}{\sqrt{|k_2|}}$$

sont tels que si  $P(u, v) = q \in P(U)$  alors  $Y_1(q)$  et  $Y_2(q)$  est une base de  $\overrightarrow{T_q S}$  formées de directions asymptotiques. Les courbes intégrales de ces champs de vecteurs sont des lignes asymptotiques.  $\square$

6.3.9. *Appendice : Surfaces totalement ombilicales.* —

**Proposition 6.7.** — Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface connexe dont tout les points sont ombilics alors  $S$  est soit tracée sur une sphère soit sur un plan.

*Démonstration.* — Soit  $P : U \rightarrow S$  une paramétrisation d'un morceau de  $S$ , on suppose que  $U$  est connexe. On a donc l'existence d'une fonction  $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} L_{P(u,v)} \frac{\partial P}{\partial u} = \lambda \frac{\partial P}{\partial u} \\ L_{P(u,v)} \frac{\partial P}{\partial v} = \lambda \frac{\partial P}{\partial v} \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda \frac{\partial P}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \lambda \frac{\partial P}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

Ceci implique notamment que  $\lambda$  est  $C^\infty$  (c'est la courbure moyenne). En dérivant la première équation par rapport à  $v$  et la seconde par rapport à

<sup>(25)</sup>Ce système étant de rang 1, on a ainsi exhaustif toutes les possibilités.

$u$ , en servant du lemme de Schwarz, on obtient :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v} = 0$$

Donc la différentielle de la fonction  $\lambda$  est nulle,  $\lambda$  est donc constante sur  $U$ . Soit  $\lambda$  est nulle et dans ce cas  $\vec{v}$  est constant et il est facile de montrer que la fonction  $(u, v) \mapsto \langle \overrightarrow{P(u_0, v_0)P(u, v)}, \vec{v} \rangle$  est constante égale à zéro :  $P(U)$  est tracé sur le plan passant par  $P(u_0, v_0)$  et orthogonale à  $\vec{v}$ .

Si  $\lambda \neq 0$  alors la fonction

$$(u, v) \mapsto P(u, v) + \frac{1}{\lambda} \vec{v}(u, v)$$

est constante <sup>(26)</sup> égale à  $\Omega$  et donc

$$\forall (u, v) \in U, \quad \|\overrightarrow{\Omega P(u, v)}\| = \frac{1}{\lambda}$$

$P(U)$  est tracée sur la sphère de centre  $\Omega$  et de rayon  $\frac{1}{\lambda}$ .

Plaçons nous dans le second cas. On conclut alors grâce à un raisonnement classique de connexité. Par définition l'intersection de  $S$  avec la sphère de centre  $\Omega$  et de rayon  $\frac{1}{\lambda}$  est un fermé de  $S$ . De plus l'argumentaire précédent nous montre que cette intersection est un ouvert de  $S$ , c'est donc  $S$  tout entier.  $\square$

**6.4. Courbes sur une surface.** — Les surfaces sont des objets deux dimensionnel, on dispose donc d'une théorie similaire à celle des courbes planes.

*6.4.1. Repère de Darboux.* — Soit donc  $S \subset \mathbb{R}^3$ , une surface  $C^\infty$ , on suppose que l'on a  $\vec{v} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  une normale unitaire continue et  $c : I \rightarrow S$  une courbe  $C^2$  régulière paramétrée par longueur d'arc. Le *repère de Darboux* est le repère

$$(\vec{t}(s), \vec{u}(s), \vec{v}(s))$$

où  $\vec{v}(s) = \vec{v}(c(s))$ ,  $\vec{t}(s) = \dot{c}(s)$  et  $\vec{u}(s) = \vec{v}(s) \wedge \vec{t}(s)$ . ainsi  $(\vec{t}(s), \vec{u}(s))$  est un repère orthonormé de  $\overrightarrow{T_{c(s)}S}$ . Nous avons les relations

$$\langle \vec{t}(s), \vec{t}(s) \rangle = \langle \vec{u}(s), \vec{u}(s) \rangle = \langle \vec{v}(s), \vec{v}(s) \rangle = 1$$

et

$$\langle \vec{t}(s), \vec{u}(s) \rangle = \langle \vec{u}(s), \vec{v}(s) \rangle = \langle \vec{v}(s), \vec{t}(s) \rangle = 0,$$

on obtient donc des fonctions  $\kappa_g, \kappa_n, \tau_n, \tau_g$  telle que

$$\begin{cases} \frac{d\vec{t}}{ds} = & \kappa_g \vec{u} & + \kappa_n \vec{v} \\ \frac{d\vec{u}}{ds} = & -\kappa_g \vec{t} & + \tau_g \vec{v} \\ \frac{d\vec{v}}{ds} = & -\kappa_n \vec{t} & -\tau_g \vec{u} \end{cases}$$

où

–  $\kappa_g$  est la **courbure géodésique**. Ainsi la courbure géodésique est nulle si et seulement si l'accélération est normale, c'est à dire si et seulement si la courbe est une géodésique.

–  $\kappa_n$  est la **courbure normale**. La courbure normale ne dépend que de  $\vec{t}(s)$  : en effet, on a

$$\kappa_n = \left\langle \frac{d\vec{t}}{ds}, \vec{v} \right\rangle = -\langle \vec{t}, D\vec{v}(c(s))(\vec{t}) \rangle = II_{c(s)}(\vec{t}, \vec{t}).$$

–  $\tau_g$  est la **torsion géodésique**. Puisqu'on a aussi

$$\tau_g = \left\langle \frac{d\vec{u}}{ds}, \vec{v} \right\rangle = -\langle \vec{u}, D\vec{v}(c(s))(\vec{t}) \rangle = II_{c(s)}(\vec{u}, \vec{t}).$$

Donc la torsion géodésique ne dépend donc aussi que de  $\vec{t}(s)$ .

La courbure de  $c$  comme courbe gauche est donc

$$K = \left\| \frac{d\vec{t}}{ds} \right\| = \sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}.$$

Remarquons que si l'on change  $\vec{v}$ , alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  changent de signe et donc  $\kappa_g, \kappa_n$  changent aussi de signe alors que  $\tau_g$  ne change pas de signe. Soit  $X_1, X_2$  est une base orthonormée de  $\overrightarrow{T_{c(s)}S}$  diagonalisant l'application de Weingarten :  $LX_i = k_i X_i$  ; si  $\vec{t} = \cos \theta X_1 + \sin \theta X_2$  alors

$$\kappa_n = \cos^2 \theta k_1 + \sin^2 \theta k_2$$

et

$$\tau_g = \cos \theta \sin \theta (k_2 - k_1).$$

<sup>(26)</sup>Ses dérivées partielles sont nulles.

6.4.2. Courbes particulières. —

**Proposition 6.8.** — Si  $\dot{c}(s)$  est un vecteur asymptotique alors soit la courbure de  $c$  en  $c(s)$  est nulle soit le plan tangent à  $S$  en  $c(s)$  est osculateur à la courbe  $c$ .

*Démonstration.* — Puisque  $\dot{c}(s)$  est un vecteur asymptotique, on a  $k_n = II_{c(s)}(\vec{t}, \vec{t}) = 0$ , La courbure de la courbe en  $c(s)$  est donc  $|\kappa_g|$ , si elle n'est pas nulle, cela signifie que la courbe  $c$  est birégulière et que la normale à cette courbe gauche est proportionnelle à  $\vec{u}$ .  $\square$

Si  $X \in \overrightarrow{T_p S}$  est unitaire,  $\tau_g(X)$  est la torsion d'une courbe géodésique  $c$  telle que  $c(0) = p$ ,  $\dot{c}(0) = X$ . En effet pour une telle courbe,  $\kappa_g = 0$  et la normale à la courbe est justement  $\vec{v}$ , la binormale est proportionnel à  $\vec{u}$ . En particulier, la géodésique partant de  $p \in S$  tangentiellement à une direction principale a en  $p$  une torsion nulle.

On a aussi

–  $c$  est une ligne de courbure si et seulement si  $D\vec{v}(c(s))(\dot{c}(s)) = \frac{d\vec{v}}{ds}$  est toujours proportionnelle à  $\dot{c}(s) = \vec{t}(s)$ , c'est à dire si et seulement si la torsion géodésique est nulle.

–  $c$  est une courbe asymptotique si et seulement si la courbure normale est nulle c'est à dire si et seulement si le plan osculateur à la courbe  $c$  (27) est le plan tangent à la surface ou encore si et seulement si la torsion est égale à la torsion géodésique.

–  $c$  est une géodésique si et seulement si la courbure géodésique est nulle.

**Proposition 6.9.** — Si  $c : I \rightarrow S$  est une courbe asymptotique alors la torsion de la courbe gauche  $c$  vérifie

$$|T| = |\tau_g| = |\sqrt{-K(c(s))}|$$

où  $K(p)$  est la courbure de Gauss de  $S$  en  $p$ .

*Démonstration.* — Pour une courbe asymptotique on a :  $|T| = |\tau_g|$  et donc si  $X_1, X_2$  est une base orthonormée de  $\overrightarrow{T_{c(s)} S}$  diagonalisant l'application

(27) là où il est défini

de Weingarten :  $LX_i = k_i X_i$  ; si  $\vec{t} = \cos \theta X_1 + \sin \theta X_2$  alors et

$$\tau_g = \cos \theta \sin \theta (k_2 - k_1)$$

et

$$0 = \kappa_n = \cos^2 \theta k_1 + \sin^2 \theta k_2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \tau_g^2 &= \cos^2 \theta \sin^2 \theta (k_2 - k_1)^2 \\ &= \cos^2 \theta \sin^2 \theta (k_2^2 - 2k_1 k_2 + k_1^2) \\ &= \cos^2 \theta (\sin^2 \theta k_2) k_2 - 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta k_1 k_2 + \sin^2 \theta (\cos^2 \theta k_1) k_1 \\ &= -\cos^4 \theta k_1 k_2 - 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta k_1 k_2 - \sin^4 \theta k_1 k_2 \\ &= -K(c(s)) (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2. \end{aligned}$$

$\square$

6.5. Les surfaces réglées. —

6.5.1. Définitions. — On appelle ainsi une surface décrite par une famille de droites. Une surface réglée se paramètre donc de la façon suivante :

$$P(s, \lambda) = c(s) + \lambda \vec{u}(s),$$

la droite (règle)  $D_s$  est la droite paramétrée par  $\lambda \mapsto c(s) + \lambda \vec{u}(s)$ .

Afin d'avoir une surface, il est nécessaire de supposer que

$$\frac{\partial P}{\partial s} \wedge \frac{\partial P}{\partial \lambda} = c' \wedge \vec{u} + \lambda \vec{u}' \wedge \vec{u} \neq 0$$

ce qui implique que pour tout  $s$ ,  $(c', \vec{u}, \vec{u}')$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Remarque 6.10.** — On peut toujours supposer que  $\|\vec{u}(s)\| = 1$  et que  $\|c'(s)\| = 1$ . C'est à dire que  $c$  est paramétré par longueur d'arc. On n'a pas unicité de la courbe  $c$ , une autre paramétrisation est par exemple donnée par

$$(s, \lambda) \mapsto c(s) + (\mu(s) + \lambda) \vec{u}(s).$$

On peut montrer (28) que si  $\vec{u}'(s) \neq 0$ , alors pour  $\varepsilon$  assez petit, il y a sur la droite  $D_s$  un point  $M_\varepsilon$  le plus proche de  $D_{s+\varepsilon}$ , de plus lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$

(28) faite le vous même c'est un bon exercice de géométrie.

on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon = c(s) - \langle c'(s), \vec{u}'(s) \rangle / \langle \vec{u}'(s), \vec{u}'(s) \rangle \vec{u}(s) = \sigma(s).$$

et on a

$$\langle \sigma'(s), \vec{u}'(s) \rangle = 0 ;$$

et c'est la seule courbe vérifiant la propriété :  $\sigma(s)$  est l'unique point de  $D_s$  où le plan tangent à  $S$  contient  $\vec{u}'(s)$ ;  $\sigma$  est appelée la **courbe de striction**.

Il est aisé d'exprimer la première forme fondamentale :

$$I = E(ds)^2 + 2Fdsd\lambda + G(d\lambda)^2$$

où

$$\begin{cases} E = \|\vec{c}'(s) + \lambda \vec{u}'(s)\|^2 = \|\vec{c}'(s)\|^2 + 2\lambda \langle \vec{c}'(s), \vec{u}'(s) \rangle + \lambda^2 \|\vec{u}'(s)\|^2 \\ F = \langle \vec{c}'(s) + \lambda \vec{u}'(s), \vec{u}(s) \rangle = \langle \vec{c}'(s), \vec{u}(s) \rangle + \lambda \langle \vec{u}'(s), \vec{u}(s) \rangle \\ G = \|\vec{u}(s)\|^2. \end{cases}$$

Si on choisit  $\vec{u}$  de norme 1 et si  $c$  est la courbe de striction paramétrée par longueur d'arc, on obtient alors l'expression :

$$I = (1 + \lambda^2 \|\vec{u}'(s)\|^2) (ds)^2 + 2 \langle \vec{c}'(s), \vec{u}(s) \rangle dsd\lambda + (d\lambda)^2.$$

Il est parfois aussi utile de considérer plutôt la paramétrisation telle que  $\vec{c}'(s) \perp \vec{u}(s)$ , en considérant la courbe  $\tilde{\sigma}(s) = c(s) - \langle \vec{c}'(s), \vec{u}(s) \rangle \vec{u}(s)$ .

Si on choisit pour normale :

$$\vec{\nu}(s, \lambda) = \frac{(\vec{c}'(s) + \lambda \vec{u}'(s)) \wedge \vec{u}(s)}{\|(\vec{c}'(s) + \lambda \vec{u}'(s)) \wedge \vec{u}(s)\|},$$

alors compte tenu du fait que

$$\frac{\partial^2 P}{\partial s^2} = \vec{c}''(s) + \lambda \vec{u}''(s), \quad \frac{\partial^2 P}{\partial s \partial \lambda} = \vec{u}'(s), \quad \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} = 0$$

on obtient les coefficients suivants pour la seconde forme fondamentale :

$$l = \frac{\det(\vec{c}''(s) + \lambda \vec{u}''(s), \vec{c}'(s) + \lambda \vec{u}'(s), \vec{u})}{\|(\vec{c}'(s) + \lambda \vec{u}'(s)) \wedge \vec{u}(s)\|}$$

$$m = \frac{\det(\vec{u}'(s), \vec{c}'(s) + \lambda \vec{u}'(s), \vec{u})}{\|(\vec{c}'(s) + \lambda \vec{u}'(s)) \wedge \vec{u}(s)\|} = \frac{\det(\vec{u}'(s), \vec{c}'(s), \vec{u})}{\|(\vec{c}'(s) + \lambda \vec{u}'(s)) \wedge \vec{u}(s)\|}$$

$$n = 0.$$

On en déduit la courbure de Gauss de la surface :

$$K = \frac{-m^2}{\|(\vec{c}'(s) + \lambda \vec{u}'(s)) \wedge \vec{u}(s)\|^2} = -\frac{(\det(\vec{u}'(s), \vec{c}'(s), \vec{u}))^2}{\|(\vec{c}'(s) + \lambda \vec{u}'(s)) \wedge \vec{u}(s)\|^4}.$$

Lorsque  $c$  est la courbe de striction paramétrée par longueur d'arc et  $\vec{u}$  est de norme 1, on obtient :

$$\|(\vec{c}'(s) + \lambda \vec{u}'(s)) \wedge \vec{u}(s)\|^2 = EG - F^2 = (1 + \lambda^2 \|\vec{u}'(s)\|^2) - \langle \vec{c}'(s), \vec{u}(s) \rangle^2.$$

Parmi les exemples de surfaces réglées nous avons le plan, l'hélicoïde qui est paramétré par  $H(\theta, \lambda) = \lambda \vec{u}_\theta + \theta \vec{k}$ , On a

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = \lambda \vec{\nu}_\theta + \vec{k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \vec{u}_\theta.$$

On vérifie aisément que la courbe de striction est l'axe  $Oz$ . On obtient aussi

$$\vec{\nu}(\theta, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \left( -\vec{\nu}_\theta + \lambda \vec{k} \right).$$

et

$$I = (1 + \lambda^2)(d\theta)^2 + (d\lambda)^2$$

ainsi que

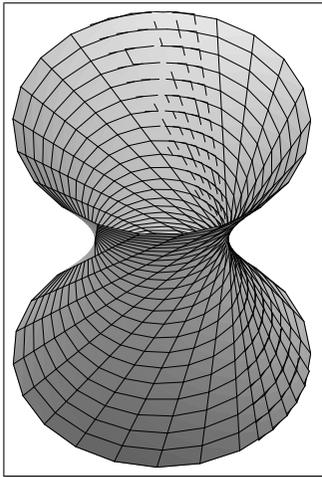
$$II = \frac{-2}{\sqrt{1 + \lambda^2}} d\theta d\lambda.$$

La courbure moyenne de cette surface est nulle et la courbure de Gauss est

$$K = -\frac{1}{(1 + \lambda^2)^2}.$$

Nous avons aussi l'hyperboloïde à une nappe :

$$x^2 + y^2 = z^2 + 1.$$



En fait celui ci peut de paramétrer par deux familles distinctes de règles :

$$P_1(s, \lambda) = (\cos(s) - \lambda \sin(s), \sin(s) + \lambda \cos(s), \lambda)$$

et

$$P_2(s, \lambda) = (\cos(s) + \lambda \sin(s), \sin(s) - \lambda \cos(s), \lambda).$$

**6.5.2. Surfaces développables.** — On appelle ainsi les surfaces réglées à courbure nulle, on les appelle ainsi parce que ce sont les surfaces réglées que l'on peut appliquer sans les déformer sur un plan, autrement dit ce sont les surfaces réglées pour lesquelles localement, il existe des coordonnées où la première fondamentale est  $I = (dx)^2 + (dy)^2$ .

On dispose de trois grandes familles de surfaces développables :

– *Cône sur une courbe gauche* : Si  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une courbe  $C^\infty$  régulière et  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  est un point fixé, on considère la surface paramétrée par :

$$P(s, \lambda) = c(s) + \lambda \overrightarrow{\Omega c(s)}.$$

Il est facile de vérifier que la courbe de striction est ici la courbe constante égale au sommet  $\Omega$  du cône. Ici on a  $\vec{u}(s) = \overrightarrow{\Omega c(s)}$  en particulier  $\vec{u}'(s) = c'(s)$  : la courbure est bien nulle.

– *Cylindre sur courbe gauche* : On suppose que  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$  est un vecteur telle que  $\forall s \in I, c'(s) \neq \vec{u}$ , alors la surface paramétrée par :

$$P(s, \lambda) = c(s) + \lambda \vec{u}$$

est bien développable

– *La surface des tangentes à une courbe gauche* : la surface paramétrée par

$$P(s, \lambda) = c(s) + \lambda c'(s),$$

(i.e.  $\vec{u}(s) = c'(s)$ .) est bien développable car  $\vec{u}(s)$  et  $c'(s)$  sont proportionnelle. La courbe de striction d'une telle surface est justement la courbe  $c$ .

**Proposition 6.11.** — Si  $S$  une surface  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^3$ , et si  $I \subset S$  est un segment de droite inclus dans  $S$ , alors  $I$  est évidemment une géodésique mais aussi une ligne asymptotique. Alors la courbure est à dire si et seulement si la normale est constante le long de  $I$

*Démonstration.* —  $I$  se paramètre par  $s \mapsto c(s) = A + s\vec{w}$  où  $\|\vec{w}\| = 1$ .

On a

$$\frac{d^2}{ds^2}c = 0$$

donc les courbures normale et géodésique sont nulles :  $\kappa_n = \kappa_g = 0$ . On a donc

$$\frac{d}{ds}\vec{\nu}(c(s)) = \frac{d}{ds}\vec{\nu}(s) = \tau_g \vec{w}.$$

Or grâce à la proposition (6.9) on sait que  $\tau_g^2 = K$ , le résultat de la proposition est donc immédiat.  $\square$

**Proposition 6.12.** — (théorème de Bonnet) Soit  $S$  une surface  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^3$  alors  $c : I \rightarrow S$  est une ligne de courbure si et seulement si la surface des normales à  $S$  le long de  $c$  est développable.

*Démonstration.* — Cette surface est paramétrée par

$$P(s, \lambda) = c(s) + \lambda \vec{\nu}(s).$$

où on a noté  $\vec{\nu}(s)$  le dernier vecteur du repère de Darboux. La courbe  $c$  est une ligne de courbure si et seulement si

$$\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -\kappa_n c'(s).$$

Et de l'autre coté cette surface est développable si et seulement si

$$\det \left( \frac{d\vec{\nu}}{ds}, c'(s), \vec{\nu}(s) \right) = 0,$$

mais puisque  $\frac{d\vec{v}}{ds} \perp \vec{v}(s)$ , ceci équivaut à ce que  $\frac{d\vec{v}}{ds}$  soit proportionnelle à  $c'(s)$ .  $\square$

Par exemple pour les surfaces de révolutions, on trouve les plans horizontaux et les plans contenant l'axe vertical.

## 6.6. Les surfaces minimales. —

6.6.1. *Le problème.* — Étant donné  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$  une courbe gauche fermée (c'est à dire paramétrée par un arc périodique), on cherche une surface  $S$  s'appuyant sur  $\mathcal{C}$  :  $\partial S = \mathcal{C}$  et dont l'aire minimise l'aire des surfaces s'appuyant sur  $\mathcal{C}$ . Un cas particulier peut être formulé de la façon suivante : on suppose que  $\mathcal{C}$  est un graphe au dessus d'une courbe plane  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , on suppose que  $\gamma(0) = \gamma(1)$ , que  $\gamma$  est injectif sur  $]0, 1[$  et que  $\gamma([0, 1])$  entoure un ouvert borné  $U$  du plan  $\mathbb{R}^2$  <sup>(29)</sup>. On suppose donc que  $\mathcal{C}$  est paramétré par  $h : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{C} = \{(\gamma(t), h(\gamma(t))), t \in [0, 1]\}.$$

On cherche à minimiser

$$\mathcal{A}(f) = \int_U \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy,$$

parmi toute les applications  $f \in C^\infty(U) \cap C^0(\bar{U})$  (et dont toutes les dérivées sont continues sur  $\bar{U}$ ) telle que

$$f = h \text{ sur } \partial U.$$

Supposons qu'une telle fonction  $f$  réalise ce minimum, alors si  $g \in C_c^\infty(U)$  <sup>(30)</sup> et si  $\varepsilon$  est un réel strictement positif, alors le graphe de la fonction  $f + \varepsilon g$  est encore une surface s'appuyant sur  $\mathcal{C}$ , en particulier on doit avoir :

$$\mathcal{A}(f) \leq \mathcal{A}(f + \varepsilon g)$$

et donc

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathcal{A}(f + \varepsilon g) = 0$$

<sup>(29)</sup> Un théorème de Jordan dit qu'il existe un tel domaine qui de plus est homéomorphe au disque.

<sup>(30)</sup> On note ainsi l'espace des fonctions  $C^\infty$  sur  $U$  à support compact dans  $U$ .

Soit encore :

$$(19) \quad \int_U \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} dx dy = 0.$$

Compte tenu du fait que  $g$  est à support compact dans  $U$ , on a pour tout  $u \in C_0^\infty(U)$

$$\int_U u \frac{\partial g}{\partial x} dx dy = - \int_U \frac{\partial u}{\partial x} g dx dy$$

En effet la fonction  $ug$  peut être étendu à  $\mathbb{R}^2$  en une fonction  $C_0^\infty$  alors grâce au théorème de Fubini on obtient

$$\int_U \left[ u \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} g \right] dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial(ug)}{\partial x} dx dy = 0,$$

De la même façon, on obtiendrait :

$$\int_U \left[ u \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} g \right] dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial(ug)}{\partial y} dx dy = 0.$$

En appliquant ces formules d'intégration par parties à (19), nous obtenons :

$$\int_U \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \right] g dx dy = 0.$$

Ceci pour toute fonction  $g \in C_0^\infty(U)$ , mais  $C_0^\infty(U)$  est un sous espace dense de  $L^2(U)$  en conséquence  $f$  doit vérifier l'équation aux dérivées partielles :

$$(20) \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

Ce résultat est du à Lagrange en 1760. Mais la courbure moyenne de la surface  $z = f(x, y)$  se calcule à l'aide des formules de (6.3.3.1), et on trouve :

$$(21) \quad 2H = \frac{\left( \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1 \right) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \left( \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 1 \right) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\left( 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right)^{3/2}}.$$

Un petit calcul montre que les équation (20) et (21=0) sont les mêmes. C'est un résultat de Meusnier qui date de 1776. Ainsi les surfaces candidates à réaliser ce minimum sont à courbure moyenne nulle.

**Définition 6.13.** — On appelle **surface minimale** une surface de  $\mathbb{R}^3$  qui est à courbure moyenne nulle.

Ainsi une surface minimale est à courbure négative ou nulle : en particulier il n'y a pas de surface minimale compacte (cf. 6.5). Les surfaces qui réalisent le minimum de notre problème sont donc minimales.

**6.7. Exemple.** — On peut en fait montrer que les seules surfaces minimales réglées sont les plans et l'hélicoïde (cf l'exercice 6.6). C'est un résultat de Meusnier (1776)

6.7.0.1. *le caténoïde.* — On peut déterminer les surfaces minimales de révolution. C'est également un résultat de Meusnier (1776)

On suppose que la surface de révolution est paramétrée par

$$(z, \theta) \mapsto P(z, \theta) = f(z)\vec{u}_\theta + z\vec{k},$$

où  $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  est une fonction  $C^\infty$ . On calcule

$$\frac{\partial P}{\partial z} = f'(z)\vec{u}_\theta + \vec{k}, \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} = f(z)\vec{v}_\theta$$

et on obtient la première forme fondamentale :

$$I = (1 + f'(z)^2)(dz)^2 + f^2(z)(d\theta)^2.$$

Une normale étant :

$$\vec{v}(z, \theta) = \frac{\vec{u}_\theta - f'(z)\vec{k}}{\sqrt{1 + f'(z)^2}},$$

avec

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = f''(z)\vec{u}_\theta, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial \theta \partial z} = f'(z)\vec{v}_\theta, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = -f(z)\vec{u}_\theta$$

On obtient facilement la seconde forme fondamentale :

$$II = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(z)^2}} (f''(z)(dz)^2 - f(z)(d\theta)^2).$$

Et donc cette surface est de courbure moyenne :

$$2H = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(z)^2}} \left( \frac{f''(z)}{1 + f'(z)^2} - \frac{1}{f(z)} \right).$$

Cette surface est donc minimale si et seulement si  $f$  vérifie l'équation :

$$\frac{f''(z)}{1 + f'(z)^2} - \frac{1}{f(z)} = 0$$

On peut multiplier par  $2f'$  cette équation et on obtient alors l'existence d'une constante  $C$  tel que

$$\log(1 + f'(z)^2) = C + \log f(z)^2.$$

Il y a donc une constante positive  $\Lambda^2 = e^C$  telle que

$$1 + f'(z)^2 = \Lambda^2 f^2(z),$$

On obtient donc :

$$\frac{f'}{\sqrt{\Lambda^2 f^2 - 1}} = \pm 1$$

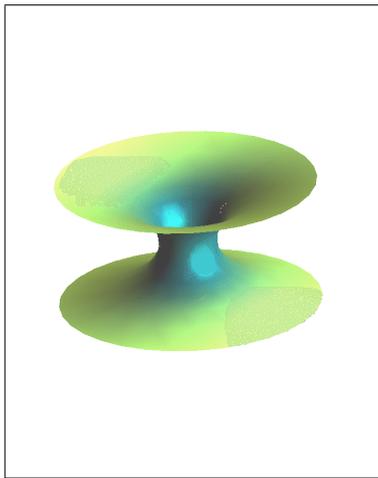
Mais puisque

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Argcosh}(\Lambda f) = \Lambda \frac{f'}{\sqrt{\Lambda^2 f^2 - 1}}.$$

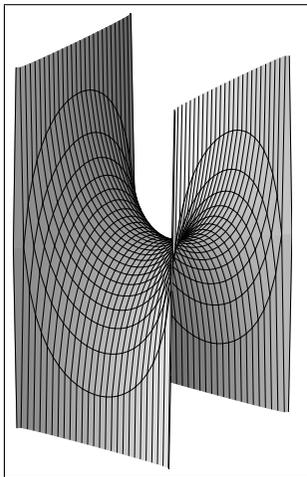
On obtient l'existence d'une constante  $z_0 \in \mathbb{R}$  telle que

$$f(z) = \frac{\cosh(\Lambda(z - z_0))}{\Lambda}.$$

La surface obtenue est le caténoïde, c'est la surface obtenue en faisant tourner une chaînette (le graphe de la fonction  $z \mapsto \frac{\cosh(\Lambda(z - z_0))}{\Lambda}$ , cette courbe s'appelle ainsi car c'est la courbe qu'épouse une chaîne ou un fil téléphonique entre deux poteaux).

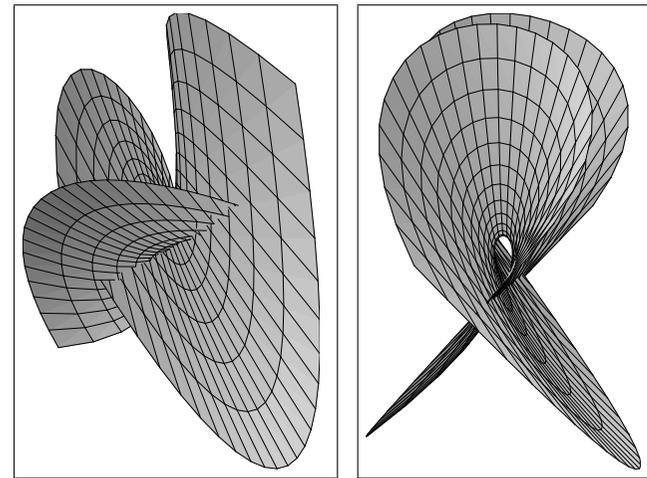


6.7.0.2. *la surface de Scherk.* — Pendant très longtemps, le plan, l'hélicoïde et le caténoïde furent les seules surfaces minimales connues (de 1776 à 1835), Puis apparurent d'autres exemples comme la surface de Scherk donnée par l'équation  $e^z \cos x = \cos y$  :



ou la surface d'Enneper donnée par la paramétrisation :

$$(u, v) \mapsto (u - u^3/3 + uv^2, v - v^3/3 + vu^2, u^2 - v^2)$$

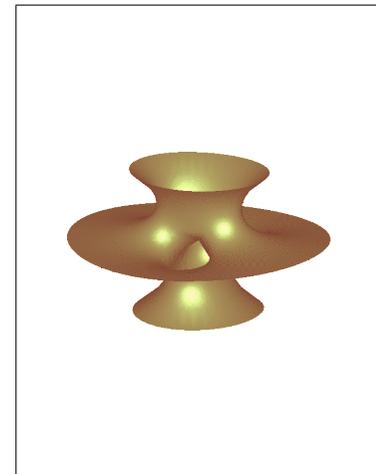


On connaît aujourd'hui énormément de surfaces minimales, le moyen le plus commode pour en obtenir est dû à K. Weierstrass qui a associé à toute fonction holomorphe  $f$  définie sur un ouvert simplement connexe  $U$  de  $\mathbb{C}$  une surface minimale paramétrée par :

$$(u, v) \simeq z = x + iy \in U \mapsto$$

$$\operatorname{Re} \left( \int_0^z (1 - \zeta^2) f(\zeta) d\zeta, i \int_0^z (1 + \zeta^2) f(\zeta) d\zeta, 2 \int_0^z \zeta f(\zeta) d\zeta \right).$$

Une partie de l'étude des surfaces minimales utilisent fortement l'analyse complexe ! La surface suivante a été découverte par J. Costa en 1988 :



## 6.8. Appendice : le Théorème Egregium de Gauss. —

6.8.1. *Géométrie intrinsèque versus géométrie extrinsèque.* — Un promeneur (armé d'un mètre et d'un rapporteur) sur une surface de  $\mathbb{R}^3$  ne peut mesurer que des invariants associés à la première forme fondamentale : c'est l'outil de la géométrie intrinsèque ; il ne voit pas la forme de la surface (ou la géométrie extrinsèque) qui est décrite localement par la seconde forme fondamentale. Cependant des liens doivent exister entre la géométrie intrinsèque et la géométrie extrinsèque. Par exemple si la surface  $S$  est le graphe d'une fonction  $g$

$$z = g(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2) + o(x^2 + y^2)$$

Dans ces coordonnées et en 0, on a

$$II_0 = a(dx)^2 + b(dy)^2$$

et on peut aussi obtenir un développement limité des coefficients de la première forme fondamentale :

$$E = 1 + a^2x^2 + o(x^2 + y^2), \quad F = abxy + o(x^2 + y^2), \quad \text{et} \quad G = b^2y^2 + o(x^2 + y^2).$$

Ainsi dans ce système de coordonnées  $II_0$  est prescrit par certaines dérivées des coefficients de  $I$  en 0. Certes ce système de coordonnées dépend de la géométrie extrinsèque, mais on peut raisonnablement espérer qu'une partie de  $II$  est prescrite par  $I$ .

Un autre exemple est donnée par l'hélicoïde et le caténoïde. Le premier est paramétré par

$$H(\theta, \lambda) = \lambda \vec{u}_\theta + \theta \vec{k}$$

et le second par

$$C(\theta, z) = \cosh(z) \vec{u}_\theta + z \vec{k}.$$

La courbure moyenne de ces deux surfaces est nulle et leur courbure de Gauss est donnée par  $K(\theta, \lambda) = -\frac{1}{(1+\lambda^2)^2}$  pour l'hélicoïde et par  $K(\theta, z) = -\frac{1}{(\cosh z)^4}$  pour le caténoïde. La première forme fondamentale de l'hélicoïde est :

$$I = (d\lambda)^2 + (1 + \lambda^2)(d\theta)^2,$$

alors que celle du caténoïde est

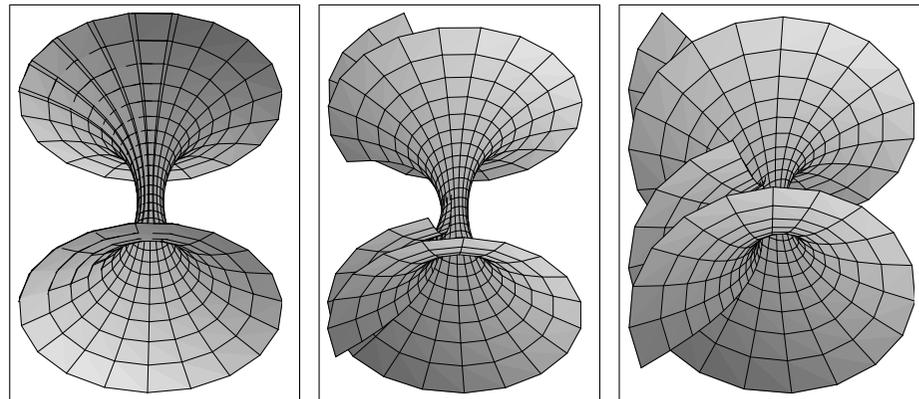
$$I = \cosh^2(z)(dz)^2 + \cosh^2(z)(d\theta)^2 = (d \sinh z)^2 + (1 + (\sinh z)^2)(d\theta)^2.$$

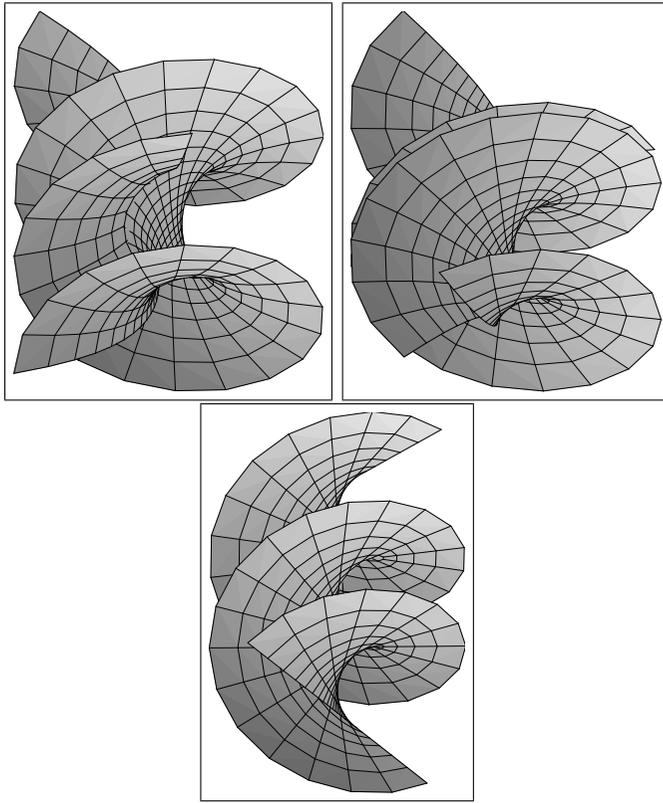
Si on pose  $\lambda = \sinh(r)$ , on obtient ainsi un paramétrage de l'hélicoïde par :

$$\tilde{H}(r, \theta) = \sinh(r) \vec{u}_\theta + \theta \vec{k}$$

et dans ce paramétrage les premières formes fondamentales de l'hélicoïde et du caténoïde sont identiques. On peut dire que ces deux surfaces sont isométriques. Un promeneur sur le caténoïde ne sait pas mesurer s'il est sur le caténoïde ou l'hélicoïde !

On peut en fait déformer l'hélicoïde en le caténoïde par une famille (continue) de surfaces minimales qui sont toutes localement isométriques.





Le théorème Egregium de Gauss dit qu'on peut calculer la courbure uniquement à partir de la première forme fondamentale. Les surfaces ci dessus ont donc même première forme fondamentale, même courbure moyenne et même courbure de Gauss.

6.8.2. *Le théorème Egregium.* — Ici  $S \subset \mathbb{R}^3$  est une surface et on suppose que  $P : U \rightarrow P(U) \subset S$  est une paramétrisation d'un bout de  $S$ . On note la première forme fondamentale par

$$I = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$$

et on prend

$$\vec{v}(u, v) = \frac{\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v} \right\|}$$

comme choix usuel de normale.

6.8.2.1. *Dérivée covariante.* — Soit  $X : P(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  un champ de vecteur sur  $P(U)$ , alors  $\bar{X} = X \circ P = a \frac{\partial P}{\partial u} + b \frac{\partial P}{\partial v}$ .

**Définition 6.14.** — On appelle dérivée covariante de  $X$  dans la direction de  $\frac{\partial P}{\partial u}$  la projection orthogonale sur le plan tangent à  $S$  de  $\frac{\partial \bar{X}}{\partial u}$  et on le note  $\frac{DX}{\partial u}$ . On a donc :

$$\frac{DX}{\partial u} \circ P = \frac{\partial \bar{X}}{\partial u} - \left\langle \frac{\partial \bar{X}}{\partial u}, \vec{v} \right\rangle \vec{v}.$$

On définit de même la dérivée covariante de  $X$  dans la direction de  $\frac{\partial P}{\partial v}$  :

$$\frac{DX}{\partial v} \circ P = \frac{\partial \bar{X}}{\partial v} - \left\langle \frac{\partial \bar{X}}{\partial v}, \vec{v} \right\rangle \vec{v}$$

**Lemme 6.15.** —  $\frac{DX}{\partial u}$  et  $\frac{DX}{\partial v}$  se calculent uniquement à l'aide de la première forme fondamentale.

*Démonstration.* — On a

$$\frac{\partial \bar{X}}{\partial u} = a \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} + b \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} + \frac{\partial a}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v}.$$

Et donc en projetant sur  $\overrightarrow{T_{P(u,v)}S}$ , nous obtenons :

$$\frac{D\bar{X}}{\partial u} = a \frac{D}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} + b \frac{D}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v} + \frac{\partial a}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v}.$$

Pour montrer le lemme, il suffit donc d'exprimer  $\frac{D}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u}$ ,  $\frac{D}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial v}$ ,  $\frac{D}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial u}$  et  $\frac{D}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v}$  en fonction de  $E, F, G$ . Mais on a

$$\frac{\partial E}{\partial u} = 2 \left\langle \frac{\partial^2 P}{\partial u^2}, \frac{\partial P}{\partial u} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u}, \frac{\partial P}{\partial u} \right\rangle$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \left\langle \frac{\partial^2 P}{\partial v \partial u}, \frac{\partial P}{\partial u} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 P}{\partial u^2}, \frac{\partial P}{\partial v} \right\rangle$$

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 2 \left\langle \frac{\partial^2 P}{\partial v \partial u}, \frac{\partial P}{\partial u} \right\rangle$$

D'où :

$$\begin{cases} \left\langle \frac{D}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u}, \frac{\partial P}{\partial u} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} \\ \left\langle \frac{D}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v}, \frac{\partial P}{\partial v} \right\rangle = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \end{cases}$$

On connaît donc les produits scalaires de  $\frac{D}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u}$  et des vecteurs d'une base de  $\overrightarrow{T_{P(u,v)S}}$ , on connaît donc  $\frac{D}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u}$ ; en effet un petit calcul montre que :

$$\frac{D}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} = \alpha \frac{\partial P}{\partial u} + \beta \frac{\partial P}{\partial v}$$

avec

$$\begin{cases} E\alpha + F\beta = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u} \\ F\alpha + G\beta = \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial v} \end{cases},$$

système d'où on déduit facilement une expression de  $\alpha$  et  $\beta$ .

On peut faire les mêmes manipulations pour exprimer  $\frac{D}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{D}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial u}$  et  $\frac{D}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial v}$ .  $\square$

Prenons un exemple où  $I = (du)^2 + J^2(u,v)(dv)^2$ . On obtient alors facilement :

$$\begin{cases} \frac{D}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} = 0 \\ \frac{D}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{D}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial u} = J^{-1} \frac{\partial J}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v} \\ \frac{D}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial v} = -J \frac{\partial J}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} + J^{-1} \frac{\partial J}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial v} \end{cases}$$

6.8.2.2. *Le théorème.* —

**Théorème 6.16.** — Si on note  $\mathcal{R}$  la rotation d'angle  $\pi/2$  dans le plan  $\overrightarrow{T_{P(u,v)S}}$  <sup>(31)</sup> alors

$$\frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X - \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X = -\sqrt{EF - G^2} K \mathcal{R}(X).$$

Et donc la courbure de Gauss se calcule uniquement à l'aide de  $E, F, G$ .

*Démonstration.* — Puisqu'on a :

$$\frac{\partial \bar{X}}{\partial u} = \frac{D}{\partial u} X \circ P + \left\langle \frac{\partial \bar{X}}{\partial u}, \vec{v} \right\rangle \vec{v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{X}}{\partial v} = \frac{D}{\partial v} X \circ P + \left\langle \frac{\partial \bar{X}}{\partial v}, \vec{v} \right\rangle \vec{v}.$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X \circ P + \left\langle \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial u \partial v}, \vec{v} \right\rangle \vec{v} + \left\langle \frac{\partial \bar{X}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial u} \right\rangle \vec{v} + \left\langle \frac{\partial \bar{X}}{\partial v}, \vec{v} \right\rangle \frac{\partial \vec{v}}{\partial u}$$

En projetant cette identité sur  $\overrightarrow{T_{P(u,v)S}}$ , nous obtenons :

$$\frac{D}{\partial u} \frac{\partial \bar{X}}{\partial v} = \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X + \left\langle \frac{\partial \bar{X}}{\partial v}, \vec{v} \right\rangle \frac{\partial \vec{v}}{\partial u}.$$

<sup>(31)</sup> En supposant la base  $(\frac{\partial P}{\partial u}, \frac{\partial P}{\partial v})$  directe.

Et de la même façon :

$$\frac{D}{\partial v} \frac{\partial \bar{X}}{\partial u} = \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X + \left\langle \frac{\partial \bar{X}}{\partial u}, \vec{v} \right\rangle \frac{\partial \vec{v}}{\partial v}.$$

Comme ces deux expressions sont égales, nous obtenons :

$$\frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X - \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X = \left\langle \frac{\partial \bar{X}}{\partial u}, \vec{v} \right\rangle \frac{\partial \vec{v}}{\partial v} - \left\langle \frac{\partial \bar{X}}{\partial v}, \vec{v} \right\rangle \frac{\partial \vec{v}}{\partial u}.$$

Mais puisque :

$$\left\langle \frac{\partial \bar{X}}{\partial u}, \vec{v} \right\rangle = -\left\langle \bar{X}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial u} \right\rangle \quad \text{et} \quad \left\langle \frac{\partial \bar{X}}{\partial v}, \vec{v} \right\rangle = -\left\langle \bar{X}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial v} \right\rangle.$$

Nous obtenons finalement :

$$\frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X - \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X = -\left\langle \bar{X}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial u} \right\rangle \frac{\partial \vec{v}}{\partial v} + \left\langle \bar{X}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial v} \right\rangle \frac{\partial \vec{v}}{\partial u}$$

On remarque donc que

$$\frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X - \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X$$

est orthogonale à  $X$ , c'est donc un vecteur colinéaire à  $\mathcal{R}(X)$ . On a donc

$$\frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} X - \frac{D}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X = \lambda \mathcal{R}(X),$$

avec

$$\lambda \|X\|^2 = -\left\langle X, \frac{\partial \vec{v}}{\partial u} \right\rangle \left\langle \mathcal{R}(X), \frac{\partial \vec{v}}{\partial v} \right\rangle + \left\langle X, \frac{\partial \vec{v}}{\partial v} \right\rangle \left\langle \mathcal{R}(X), \frac{\partial \vec{v}}{\partial u} \right\rangle.$$

Or :

$$\begin{aligned} & -\left\langle X, \frac{\partial \vec{v}}{\partial u} \right\rangle \left\langle \mathcal{R}(X), \frac{\partial \vec{v}}{\partial v} \right\rangle + \left\langle X, \frac{\partial \vec{v}}{\partial v} \right\rangle \left\langle \mathcal{R}(X), \frac{\partial \vec{v}}{\partial u} \right\rangle = \\ & -\left\langle X, L \left( \frac{\partial P}{\partial u} \right) \right\rangle \left\langle \mathcal{R}(X), L \left( \frac{\partial P}{\partial v} \right) \right\rangle + \left\langle X, L \left( \frac{\partial P}{\partial v} \right) \right\rangle \left\langle \mathcal{R}(X), L \left( \frac{\partial P}{\partial u} \right) \right\rangle \end{aligned}$$

et cette quantité vaut exactement

$$-\|X\|^2 \det L \det \left( \frac{\partial P}{\partial u}, \frac{\partial P}{\partial v}, \vec{v} \right) = -\|X\|^2 \det L \sqrt{EG - F^2}.$$

On a bien démontré le résultat annoncé.  $\square$

Dans notre cas simple ou  $I = (du)^2 + J^2(u, v)(dv)^2$  On a donc en prenant  $X = \frac{\partial P}{\partial u}$  alors  $\mathcal{R}(X) = \frac{1}{J(u, v)} \frac{\partial P}{\partial v}$  et

$$KJ(u, v) \frac{1}{J(u, v)} \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial u}.$$

Mais :

$$\frac{D}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{D}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v} = J^{-1} \frac{\partial J}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v}$$

et donc

$$\frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial v} \frac{\partial P}{\partial u} = -J^{-1} \frac{\partial^2 J}{\partial u^2} \frac{\partial P}{\partial v}.$$

Et donc on obtient pour la courbure de Gauss :

$$K = -J^{-1} \frac{\partial^2 J}{\partial u^2}.$$

Pour aller plus loin, je conseille la lecture des deux derniers chapitres du livre de Berger-Gostiaux qui est un guide de lecture et le livre de M. do Carmo et de Spivak.

## Exercices sur la géométrie des surfaces

**Exercice 6.1.** — Soit  $\Sigma$  le graphe de la fonction  $z = xy$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Dans la paramétrisation  $(x, y) \mapsto (x, y, xy)$ , en un point  $A$  de  $\Sigma$  calculer,

- (1) la première forme fondamentale  $I(A)$
- (2) la seconde forme fondamentale
- (3) la courbure de Gauss  $K(A)$  et la courbure moyenne  $H(A)$

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 6.2.** — Pour chaque une des surfaces suivantes, calculer la première et la seconde forme fondamentale, la courbure de Gauss et la courbure moyenne :

- (1)  $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto P + u\vec{w}_1 + v\vec{w}_2$ , où  $\vec{w}_1$  et  $\vec{w}_2$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  non colinéaires.
- (2)  $(u, v) \in ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \mapsto (\cos u, \sin u, v)$ .
- (3)  $(u, v) \in ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \mapsto (v \cos u, v \sin u, au)$ . On montrera que c'est bien une surface régulière.
- (4)  $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (u - u^3/3 + uv^2, v - v^3/3 + vu^2, u^2 - v^2)$ .
- (5)  $(u, v) \in ]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[ \mapsto ((a+r \cos u) \cos v, (a+r \cos u) \sin v, r \sin u)$ .

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 6.3.** — On considère le sous-ensemble  $H$  de  $\mathbb{R}^3$  définie par l'équation

$$x^2 + y^2 = 1 + z^2.$$

- (1) Montrer que  $H$  est une surface  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^3$ .
- (2) Grâce aux coordonnées cylindriques  $C(r, \theta, z) = r\vec{u}_\theta + z\vec{k}$  où  $\vec{u}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ , et  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  on notera aussi  $\vec{v}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$ , on paramètre  $H$  par

$$F(z, \theta) = \sqrt{1 + z^2} \vec{u}_\theta + z\vec{k}$$

Exprimer les matrices de première et seconde formes fondamentales de  $H$  en  $F(z, \theta)$  dans la base

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} F(z, \theta), \frac{\partial}{\partial \theta} F(z, \theta) \right)$$

de  $T_{F(z, \theta)} H$ . Déterminer la courbure de Gauss et la courbure moyenne de  $H$  en  $F(z, \theta)$ .

(3) On suppose que  $s \mapsto F(z(s), \theta(s))$  est une géodésique de  $H$  paramétrée par longueur d'arc, montrer que les fonctions  $s \mapsto z(s)$  et  $s \mapsto \theta(s)$  vérifient les équations

$$[(1 + z^2(s))\theta'] = 0 \text{ et } (1 + z^2(s))\theta'^2 + \frac{1 + 2z^2(s)}{1 + z^2(s)}(z'(s))^2 = 1.$$

(4) On veut étudier les géodésiques pour lesquelles  $(1 + z^2(s))\theta'(s) = 1$ . Montrer qu'on peut alors paramétrer une telle géodésique par  $\varphi \in I \mapsto F(\zeta(\varphi), \varphi)$  où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  non bornée à gauche (i.e.  $I$  contient un intervalle de la forme  $] -\infty, a[$ ) et montrer que la fonction  $\zeta$  doit vérifier

$$(1 + 2\zeta^2) \left( \frac{d}{d\varphi} \zeta \right)^2 = \zeta^2(1 + \zeta^2).$$

(5) Montrer qu'alors soit le fonction  $\zeta$  est nulle et la géodésique est le parallèle  $z = 0$  de  $H$  soit  $\zeta$  ne s'annule pas et alors la fonction  $\varphi \mapsto \zeta(\varphi)$  est strictement monotone. Montrer que si la fonction  $\zeta$  est positive et croissante alors

$$\lim_{\varphi \rightarrow -\infty} \zeta(\varphi) = 0.$$

En déduire que l'allure de la géodésique.

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 6.4.** — On paramètre la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$  à l'aide de l'inverse de la projection stéréographique de pôle Nord (i.e. le point  $(0, 0, 1)$ )  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  définit par

$$P(x, y) = \left( \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{1 + x^2 + y^2} \right).$$

Donner la matrice de la première forme fondamentale de  $\mathbb{S}^2$  au point  $P(x, y)$  dans la base  $\left( \frac{\partial}{\partial x} P(x, y), \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) \right)$  de  $T_{P(x, y)} \mathbb{S}^2$ .

Comparer avec l'exercice (★)

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 6.5.** — (1) i) Trouver les primitives des fonctions  $x \in ] - \pi/2, \pi/2[ \mapsto \tan x$ ,  $x \in ]0, \pi[ \mapsto 1/\sin x$  et  $x \in ] - \pi/2, \pi/2[ \mapsto 1/\cos x$ .

ii) Trouver (en fonction du paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}$ ) les solutions maximales de l'équation différentielle

$$\frac{h''(x)}{1 + (h'(x))^2} = \lambda$$

(2) Soit  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^\infty$ , on lui associe la surface

$$S_h = \{(x, y, z) \in I \times I \times \mathbb{R}, z = h(x) - h(y)\}$$

$S_h$  est donc paramétrée par  $(x, y) \in I \times I \mapsto P(x, y) = (x, y, h(x) - h(y))$ .

On note

$$\vec{v}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) / \left\| \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right\|$$

i) Exprimer les matrices des première et seconde formes fondamentales de  $S_h$  en  $P(x, y)$  dans la base  $\left( \frac{\partial P}{\partial x}(x, y), \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right)$  de  $T_{P(x, y)}S_h$ .

ii) Calculer les courbures moyenne et de Gauss de  $S_h$ .

iii) Déterminer les fonctions  $h$  pour lesquelles  $S_h$  est une surface minimale, i.e. à courbure moyenne nulle.

(3) On considère la surface  $S$  définie par

$$S = \left\{ (x, y, z) \in ] - \pi/2, \pi/2[ \times ] - \pi/2, \pi/2[ \times \mathbb{R}, z = \log \left( \frac{\cos x}{\cos y} \right) \right\}.$$

i) Montrer que  $S$  est une surface minimale.

ii) On rappelle que les lignes asymptotiques sont les courbes  $c : I \rightarrow S$  de classe  $C^1$  telles que

$$II_{c(t)}(c'(t), c'(t)) = 0.$$

Trouver l'équation satisfaite par  $t \mapsto (x(t), y(t))$  pour que la courbe

$$t \mapsto \left( x(t), y(t), \log \left( \frac{\cos x(t)}{\cos y(t)} \right) \right)$$

soit une ligne asymptotique.

iii) Trouver une fonction  $F : ] - \pi/2, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}$  tel que les lignes asymptotiques de  $S$  soit de la forme

$$\mathcal{L}_\lambda^\pm = \{(x, y, z) \in S, F(x) \pm F(y) = \lambda\}$$

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 6.6.** — On suppose que  $S$  est une surface  $C^\infty$  réglée de l'espace euclidien orienté  $\mathbb{R}^3$  paramétrée par

$$(s, \lambda) \in I \times \mathbb{R} \mapsto P(s, \lambda) = c(s) + \lambda \vec{u}(s),$$

où  $I$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $c, u \in C^\infty(I, \mathbb{R}^3)$  vérifie

i) :  $\forall s \in I, \langle c'(s), u'(s) \rangle = 0$ .

ii) :  $\forall s \in I, \|u(s)\| = \|u'(s)\| = 1$ .

On note

$$\vec{v}(s, \lambda) = \frac{\partial P}{\partial s}(s, \lambda) \wedge \frac{\partial P}{\partial \lambda}(s, \lambda) / \left\| \frac{\partial P}{\partial s}(s, \lambda) \wedge \frac{\partial P}{\partial \lambda}(s, \lambda) \right\|.$$

(1) Exprimer les matrices des première et seconde formes fondamentales de  $S$  en  $P(s, \lambda)$  dans la base  $\left( \frac{\partial P}{\partial s}(s, \lambda), \frac{\partial P}{\partial \lambda}(s, \lambda) \right)$  de  $T_{P(s, \lambda)}S$ .

(2) Calculer les courbures moyenne et de Gauss de  $S$ .

(3) En déduire que  $S$  est une surface minimale réglée si et seulement si pour tout  $s \in I$ , les fonctions  $u$  et  $c$  vérifient les équations :

iii) :  $\det(u''(s), u'(s), u(s)) = 0$ .

iv) :  $\det(u''(s), c'(s), u(s)) + \det(c''(s), u'(s), u(s)) = 0$ .

v) :  $\det(c''(s), c'(s), u(s)) - 2\langle c'(s), u(s) \rangle \det(u'(s), c'(s), u(s)) = 0$ .

(4) Déduire de iii) que  $u$  est planaire et donc qu'il existe un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  tel que  $u(s) = \cos s \vec{i} + \sin s \vec{j}$ .

(5) Poser alors  $c(s) = O + x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$  et montrer que  $z$  est une fonction affine. Montrer que si  $z$  n'est pas constante alors les fonctions  $x$  et  $y$  sont constantes. En déduire que soit  $S$  est incluse dans un plan soit il existe un repère orthonormé direct  $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et  $a \in \mathbb{R}^*$  tel que  $S$  soit incluse dans l'hélicoïde paramétrée par :

$$(s, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\lambda \cos s, \lambda \sin s, as).$$

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 6.7.** — Soit  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une paramétrisation d'une surface  $S_0 \subset \mathbb{R}^3$ . On note

$$N(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} F(u, v) \wedge \frac{\partial}{\partial v} F(u, v) / \left\| \frac{\partial}{\partial u} F(u, v) \wedge \frac{\partial}{\partial v} F(u, v) \right\|$$

(1) Calculer la différentielle de l'application  $(u, v, t) \mapsto P(u, v, t) = F(u, v) + tN(u, v)$ .

(2) Montrer que  $P$  est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage  $U$  de  $F(0, 0)$

(3) Quel est le Jacobien de ce difféomorphisme en fonction du déterminant de la première forme fondamentale et des courbures moyenne et de Gauss de  $S_0$ .

(4) On note  $k_1$  et  $k_2$ , les courbures principales de  $S_0$  en  $F(0, 0)$ , montrer que si  $(1 - tk_1)(1 - tk_2) \neq 0$  alors il existe un voisinage de  $(0, 0)$  sur lequel  $F_t(u, v) = P(u, v, t)$  paramètre une surface  $S_t$ .

(5) Exprimer, en fonction de la première et seconde forme fondamentale de  $S_0$ , les premières et seconde forme fondamentales de  $S_t$ , on pourra notamment commencer par remarquer que  $N(u, v)$  reste une normale à  $S_t$  au point  $F_t(u, v) = P(u, v, t)$ .

(6) Calculer les courbures de Gauss et moyenne de  $S_t$  en fonction des courbures principales de  $S_0$ .

(7) En déduire que si  $S_0$  est à courbure de Gauss constante  $a^2 > 0$  alors  $S_{\pm 1/a}$ <sup>(32)</sup> est à courbure moyenne constante et si  $S_0$  est à courbure moyenne constante  $h$  alors  $S_{1/h}$ <sup>(33)</sup> est à courbure de Gauss constante.

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 6.8.** — (1) Soit  $0 < b < a$  deux réels strictement positifs, calculer l'aire du domaine

$$E_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}.$$

<sup>(32)</sup>Si celle-ci est bien définie.

<sup>(33)</sup>Si celle-ci est bien définie.

(indication : faites un changement de variables pour vous ramener à un disque.)

(2) On note  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ , et on pose  $F = (-c, 0)$ . On considère les coordonnées polaires autour de  $F : P(r, \theta) = (-c + r \cos \theta, r \sin \theta)$ . On sait que  $P$  est un difféomorphisme de  $]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-c+t, 0), t \geq 0\}$ , déterminer la fonction  $\rho : ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  tel que

$$P^{-1}(E_{a,b}) = \{(r, \theta) \in ]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[, \text{ tel que } 0 < r < \rho(\theta)\}.$$

(3) Exprimer alors l'aire de  $E_{a,b}$  dans ces coordonnées polaires. En déduire que lorsque  $\lambda > 1$ , on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(\lambda + \cos \theta)^2} = \frac{2\pi\lambda}{(\lambda^2 - 1)^{3/2}}.$$

Et déduire de cette dernière formule que :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(\lambda + \cos \theta)} = \frac{2\pi}{(\lambda^2 - 1)^{1/2}}.$$

(4) Soit maintenant  $0 < r < R$  deux réels strictement positifs, on paramètre le tore de révolution  $T_{r,R}$  par

$$(s, \theta) \in ]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[ \mapsto P(s, \theta) = ((R+r \cos s) \cos \theta, (R+r \cos s) \sin \theta, r \sin s).$$

On note

$$\vec{v}(s, \theta) = \frac{\partial P}{\partial s}(s, \theta) \wedge \frac{\partial P}{\partial \theta}(s, \theta) / \left\| \frac{\partial P}{\partial s}(s, \theta) \wedge \frac{\partial P}{\partial \theta}(s, \theta) \right\|.$$

(5) Exprimer les matrices des première et seconde formes fondamentales de  $T_{r,R}$  en  $P(s, \theta)$  dans la base  $(\frac{\partial P}{\partial s}(s, \theta), \frac{\partial P}{\partial \theta}(s, \theta))$  de  $T_{P(s, \theta)} T_{r,R}$ .

(6) Calculer la courbure moyenne (notée  $H$ ) de  $T_{r,R}$  et la courbure de Gauss (notée  $K$ ) de  $T_{r,R}$ .

(7) Calculer  $W(r, R) = \int_{T_{r,R}} H^2 dA$  et déterminer  $\inf_{0 < r < R} W(r, R)$  et les valeurs de  $r$  et  $R$  qui réalisent ce minimum.

Ce calcul fait par Willmore en 1971 amena celui ci à conjecturer que pour toute surface  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  homéomorphe au tore on avait

$$W(S) = \int_S H^2 dA \geq 2\pi^2$$

avec le même cas d'égalité que ci dessus. Cette conjecture de Willmore est un domaine actif de la recherche en géométrie d'aujourd'hui ; et Schmidt en propose une preuve (les vraisements courageux peuvent regarder à <http://fr.arxiv.org/abs/mathDG/0203224>)

Indications ★ ; Corrigé : ★

**Exercice 6.9.** — On considère le sous-ensemble  $\mathcal{H}$  de  $\mathbb{R}^3$  définie par l'équation

$$x^2 + y^2 = 1 + z^2.$$

(1) Montrer que  $\mathcal{H}$  est une surface  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^3$ .

On paramètre  $\mathcal{H}$  par

$$(s, \theta) \in \mathbb{R} \times ]0, 2\pi[ \mapsto P(s, \theta) = (\cosh s \cos \theta, \cosh s \sin \theta, \sinh s)$$

On note

$$\vec{\nu}(s, \theta) = \frac{\partial P}{\partial s}(s, \theta) \wedge \frac{\partial P}{\partial \theta}(s, \theta) / \left\| \frac{\partial P}{\partial s}(s, \theta) \wedge \frac{\partial P}{\partial \theta}(s, \theta) \right\|.$$

(2) Exprimer les matrices des première et seconde formes fondamentales de  $\mathcal{H}$  en  $P(s, \theta)$  dans la base  $(\frac{\partial P}{\partial s}(s, \theta), \frac{\partial P}{\partial \theta}(s, \theta))$  de  $T_{P(s, \theta)}\mathcal{H}$ .

(3) On rappelle que les lignes asymptotiques sont les courbes  $c : I \rightarrow \mathcal{H}$  de classe  $C^1$  telles que  $II_{c(t)}(c'(t), c'(t)) = 0$ . Trouver l'équation satisfaite par  $t \mapsto (s(t), \theta(t))$  pour que la courbe  $t \mapsto P(s(t), \theta(t))$  soit une ligne asymptotique.

(4) Trouver une fonction  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que les solutions de l'équation trouvée précédemment pour les lignes asymptotiques soient de la forme  $F(s) \pm \theta = C^{te}$

(5) En déduire que ces lignes asymptotiques sont des droites et que  $\mathcal{H}$  est réglée par deux familles de règles.

Indications ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 6.1.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 6.2.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 6.3.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 6.4.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 6.5.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 6.6.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 6.7.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 6.8.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Indication exercice 6.9.* —

Exercice : ★ ; Corrigé : ★

*Corrigé exercice 6.1.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 6.2.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 6.3.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 6.4.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 6.5.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 6.6.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 6.7.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 6.8.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

*Corrigé exercice 6.9.* —

Exercice : ★ ; Indication : ★

---