

RAPPORT SCIENTIFIQUE

PRÉSENTÉ À

L'UNIVERSITE BORDEAUX 1

PAR

Mazen SAAD

POUR OBTENIR

L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

**ANALYSE ET SIMULATIONS NUMÉRIQUES DE PROBLÈMES
INTERVENANT EN MÉCANIQUE DES FLUIDES ET EN DYNAMIQUE DE
POPULATIONS**

Soutenue le 5 Juillet 2005

Après Avis des rapporteurs

M. Youcef AMIRAT	Professeur, Université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand 2)
M. Jean-Marie CROLET	Professeur, Université de Franche-Comté (Besançon)
M. Michel PIERRE	Professeur, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Antenne de Bretagne

Devant la commission d'examen formée de

M. Youcef AMIRAT	Professeur, Université Blaise Pascal
M. Charles-Henri BRUNEAU	Professeur, Université Bordeaux 1
M. Jean-Marie CROLET	Professeur, Université de Franche-Comté
M. Pierre FABRIE	Professeur, Université Bordeaux 1
M. Michel LANGLAIS	Professeur, Université Victor Segalen Bordeaux 2
M. Michel PIERRE	Professeur, Ecole Normale Supérieure de Cachan

*A celui qui a permis à des milliers d'étudiants d'entreprendre
A celui qui a brandit le savoir à la place des armes
A celui qui a reconstruit un pays dévasté
A l'homme de la paix*

A RAFIC HARIRI

REMERCIEMENTS

Cette habilitation est pour moi l'occasion d'exprimer mon amitié et toute ma reconnaissance à Charles-Henri Bruneau, Michel Langlais et Pierre Fabrie. J'ai beaucoup appris d'eux et profité de leurs expériences et compétences scientifiques. Merci aussi de m'avoir fait confiance en coencadrant plusieurs thèses.

Je remercie vivement Youcef Amirat, rapporteur et membre du Jury, d'avoir accepté de consacrer une partie de son temps à l'évaluation de ce travail. Je tiens aussi à lui exprimer toute ma reconnaissance pour la clarté de ses articles qui ont inspiré une partie de ce travail.

J'ai eu l'occasion de rencontrer Jean Marie Crolet à plusieurs reprises lors des congrès et à Besançon. J'apprécie son sens de l'organisation et son enthousiasme. Je suis très heureux qu'il m'ait fait l'amitié de rapporter sur mon travail.

Je suis très honoré que Michel Pierre ait accepté de rapporter sur mes travaux. Je le remercie chaleureusement du temps qu'il a bien voulu me consacrer et je tiens à lui exprimer toute ma gratitude pour sa disponibilité.

Je tiens aussi à remercier Henri Bertin qui a accepté de rapporter sur mes travaux pour le conseil scientifique.

Ce mémoire doit beaucoup aux membres du MAB, qui par leur amitié et leur disponibilité m'ont permis de travailler dans une ambiance chaleureuse. Merci à Cédric, merci encore à Cédric qui m'a permis de construire un mur droit, bon il reste le garage à refaire ... Merci à tous les collègues et pour la bonne humeur et les passionnates discussions dans la salle de détente qui dérapent souvent, surtout quand Thierry est en forme, c'est à dire tous les jours ; par contre François D., on ne sait pas comment il fait, il sait toujours de quoi on cause (ça doit être son côté Ricard). Après le Basque, l'Anglais, le Russe et j'en oublie d'autres, le petit basque s'est mis à parler en plus arabe. Il est affreux. Aller une devinette : شكرا يا صاحبي دافيد

La place me manque pour exprimer ma profonde amitié à Gillou, koko, Vincent, Zhang, Patrick, Ahmed, Gigi, Mathieu, Héloïse, Laurent, J.F, Thomas,....

Je ne pourrais pas terminer ces remerciements sans avoir une pensée affectueuse pour mon père, ma mère, mes frères (Waël, Maan, Ali, Hazem, saden, Samer) mes soeurs (Wissam, Salam) et toute ma famille au liban et un peu partout dans le monde. Je ne saurais oublier Rita pour son soutien.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1. Milieux poreux	3
1.1. Deux fluides compressibles et immiscibles [A9], [A16], [R]	3
1.2. Transport des élément radionucleides dans le sol [A17], [A5]	14
1.3. Maillage adaptatif et suivi des fronts [A15]	21
1.4. Ecoulement triphasique compressible [A12].....	27
2. La cavité entraînée et la cavité chauffée	33
2.1. Cavité entraînée [A7].....	33
2.2. Convection naturelle dans une cavité chauffée [A6].....	38
3. Problèmes à données L^1	43
3.1. Un problème d'obstacle [A13].....	43
3.2. Equation parabolique avec des termes d'ordre un [A11].....	46
3.3. Sur une équation de Fokker-Planck [A10].....	48
4. Dynamiques des populations	51
4.1. Modèle VIF (Virus d'Immunodéficience Féline) [A2].....	51
4.2. Solutions entropiques pour un modèle anisotropique [A3].....	55
4.3. Modèle VLF (Virus de la Leucémie Féline) [A1].....	57
4.4. Modèle m -proies et n -prédateurs [A4].....	58
Conclusions et perspectives	61
Publications	63
Bibliographie	65

INTRODUCTION

Ce mémoire est divisé en quatre chapitres indépendants.

Le premier chapitre traite de l'étude mathématique et de la simulation de quelques problèmes intervenant en milieu poreux.

Un premier travail concerne l'étude du problème de Cauchy pour les solutions faibles de trois problèmes modélisant des écoulements diphasiques et compressibles. D'abord, les deux fluides ont le même coefficient de compressibilité et les termes quadratiques en vitesse sont négligés. La difficulté de ce problème réside dans la dégénérescence du terme dissipatif dans l'équation en saturation. Même si ce type de dégénérescence est bien connu pour des écoulements incompressibles, la compressibilité complique considérablement l'analyse. Ainsi, selon le type de dégénérescence, la notion de solution faible est spécifiée. Ensuite, le deuxième problème concerne un écoulement eau/gaz où la phase gaz est compressible alors que la phase eau est incompressible. Outre la dégénérescence du terme dissipatif en saturation, le terme d'évolution est également dégénéré. De plus il n'y a pas d'équation spécifique pour la pression ; le système de conservation de la masse est traité sous sa forme initiale sans aucune hypothèse simplificatrice sur la vitesse. Enfin le dernier problème traite de l'existence des solutions locales en temps en dimension un d'espace pour un problème de deux phases compressibles avec des lois d'états différentes et sans simplification.

Le deuxième travail traite du transport des radionucléides dans le sol. Cette étude a été initiée dans le cadre du GDR MOMAS proposé par l'ANDRA concernant l'étude de certaines conséquences d'une fuite des déchets radioactifs dans un site de stockage. D'abord, l'existence de solutions faibles pour un problème de Cauchy modélisant l'écoulement des éléments radioactifs dans le sol, incluant les effets de transport, diffusion-réaction, adsorption, et désintégration, a été établie. La difficulté de ce système provient du terme d'évolution non linéaire. Ensuite, un schéma numérique adapté au terme d'évolution non linéaire est proposé.

Dans le troisième travail, on propose pour un modèle diphasique incompressible et sans terme dissipatif une méthode de raffinement et déraffinement adaptative sur des maillages composites en dimension deux. Le schéma proposé assure la conservation des flux et permet le suivi du front eau/huile.

Dans le quatrième travail, un algorithme pour la simulation numérique des écoulements triphasiques par une méthode de différences finies est proposé. Le modèle inclut deux phases incompressibles (eau/huile) et une phase compressible (gaz). On distingue dans le système une partie hyperbolique et une partie dissipative. La construction et l'étude des propriétés de la matrice de Roe associée à l'opérateur hyperbolique sont détaillées ainsi que la mise en place d'un schéma anti-diffusif de type Harten.

Le deuxième chapitre est consacré d'une part à la simulation numérique directe (DNS) des équations de Navier-Stokes pour la cavité entraînée et ensuite, en couplant ces équations à l'équation de l'énergie, la cavité différentiellement chauffée est également simulée. Un nouveau schéma de type Murmann d'ordre trois en espace est proposé pour l'approximation des termes non linéaires. L'efficacité et la robustesse du schéma sont prouvées en réalisant des Benchmark pour les nombres de Reynolds

$Re = 1000, 5000, 10000$ pour la cavité entraînée et pour des nombres de Rayleigh allant de $Ra = 10^{+5}$ à $3 \times 10^{+7}$ en passant par l'étude détaillée pour le fameux nombre de Rayleigh $3.4 \times 10^{+5}$. La première bifurcation de Hopf et le comportement des solutions autour des nombres critiques sont également considérés.

Le troisième chapitre traite trois problèmes dont le point commun est de considérer des données dans L^1 . Dans le premier travail, on s'intéresse à des problèmes unilatéraux elliptiques dont le terme non linéaire a une croissance au plus quadratique par rapport aux gradients. De plus, le second membre est pris dans L^1 . L'espace non réflexif L^1 conduit à considérer l'espace $W^{1,p}$ pour $p < 2$, au lieu de l'espace d'énergie naturel H^1 pour des données régulières, ainsi le cas d'une croissance quadratique par rapport aux gradients nécessite une analyse plus complexe que celle de croissance sous quadratique. On utilise de façon forte que l'opérateur linéaire est d'ordre deux pour traiter le cas quadratique. Dans le deuxième travail, on considère une équation parabolique contenant des termes non linéaires ayant une croissance sous quadratique par rapport aux gradients et des termes d'advection dont le champs d'advection est à divergence non nulle. Cette dernière hypothèse complique l'analyse et nécessite un nouveau résultat de compacité dans le cadre des problèmes à données L^1 . Dans le cas linéaire l'existence et l'unicité des solutions entropiques sont prouvées. Le troisième travail traite une équation intégral-différentielle de type Fokker-Planck en dimension un d'espace avec une donnée initiale dans L^1 . C'est une équation non linéaire dont la non linéarité est non locale. Un nouveau résultat de compacité relative à la dimension un d'espace permet d'établir l'existence des solutions faibles pour ce problème.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de quelques problèmes intervenant en dynamique des populations. Le premier modèle traite du Virus de l'Immunodéficience Féline (VIF) qui est un lentivirus induisant une immunosuppression létale chez le chat domestique. Le mode de transmission du VIF le plus probable est la morsure, infligée lors de combats. La population totale des chats est subdivisée en trois classes : les sensibles, les exposés et les infectés. La dynamique de l'épidémie est donnée par un système fortement non linéaire en considérant que la diffusion de chaque classe est anisotropique, en incluant le phénomène de transport des individus et en décrivant le mécanisme de transmission du virus. Il est naturel pour ce type de problème de considérer que les données représentant les densités soient positives et dans L^1 . L'existence des solutions faibles pour les systèmes anisotropiques et contenant des termes d'advections est établie. Ensuite, l'unicité des solutions entropiques pour ce type de système est prouvée. Le deuxième modèle concerne la transmission du Virus de la Leucémie Féline (VLF). La population totale est structurée en trois classes sanitaires : les sensibles, les infectés et les immunisés. Ce modèle dans sa structure est proche du modèle précédent et se traite de façon analogue. Enfin, le dernier modèle concerne l'interaction entre m -proies et n -prédateurs. Le système d'équations obtenues est un système de type réaction-diffusion-transport. Les proies sont supposées suivre une loi généralisant la loi logistique en absence des prédateurs, tandis que les prédateurs sont supposés se nourrir des proies selon des fonctionnelles de type Holling II. Une structure hiérarchique de type "food pyramid condition" modélise la compétition entre prédateurs. En considérant des conditions initiales et des données non régulière (dans L^1), l'existence des solutions faibles est établie.

CHAPITRE 1

MILIEUX POREUX

1.1. Deux fluides compressibles et immiscibles [A9], [A16], [R]

On décrit un système parabolique non linéaire modélisant le déplacement de deux fluides compressibles et immiscibles dans un milieu poreux. En dimension 3, l'étude du problème de Cauchy pour les solutions faibles de deux modèles diphasiques a été réalisée. Le premier modèle traite de deux phases compressibles ayant le même coefficient de compressibilité et en négligeant les termes quadratiques en vitesse, le deuxième traite d'une phase compressible et d'une phase incompressible (écoulement eau/gaz). Le point commun, du point de vue mathématique, de ces deux travaux est l'aspect diffusif dégénéré de ces équations. Dans le premier travail, on s'efforcera de gérer le problème de la dégénérescence de la diffusion, qui, associée à la compressibilité des deux phases, pose problème. Dans le deuxième, un terme d'évolution est dégénéré et pose la difficulté majeure de ce travail. En effet, la dégénérescence d'un terme dissipatif, posera moins de difficultés du fait de l'incompressibilité d'une des deux phases. Ensuite, dans un cadre général, en considérant deux fluides ayant des coefficients de compressibilité différents et sans aucune hypothèse simplificatrice, on établit l'existence et l'unicité des solutions locales en temps pour le système non dégénéré en dimension un d'espace. On donne également le comportement asymptotique des solutions lorsque les facteurs de compressibilité tendent vers zéro.

On s'intéresse au déplacement des fluides dans un gisement pétrolier constitué d'un seul type de roche caractérisé par la porosité, le tenseur des perméabilités intrinsèques, les pressions capillaires et les perméabilités relatives. Le fluide est constitué de deux phases compressibles, immiscibles et sans interaction chimique entre elles. Ici, la méthode de récupération secondaire du pétrole est modélisée. Elle consiste à injecter un fluide dans des puits d'injection (l'eau) afin de déplacer les hydrocarbures vers les puits de production.

Les équations décrivant les déplacements de deux fluides immiscibles sont données par la conservation de la masse de chaque phase,

$$\phi(x)\partial_t(\rho_i s_i)(t, x) + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{V}_i)(t, x) + \rho_i s_i g(t, x) = \rho_i s_i^* f(t, x) \quad i = 1, 2, \quad (1.1)$$

où ϕ est la porosité du milieu, ρ_i et s_i sont la densité et la saturation respectivement du fluide i .

La vitesse de chaque phase \mathbf{V}_i est donnée par la loi de Darcy :

$$\mathbf{V}_i(t, x) = -\mathbf{K}(x) \frac{k_i(s_i(t, x))}{\mu_i} \nabla p_i(t, x), \quad i = 1, 2, \quad (1.2)$$

où \mathbf{K} est le tenseur de perméabilité du milieu poreux, k_i la perméabilité relative de la phase i , μ_i la viscosité (constante) et p_i la pression de la phase i . Les effets de la gravité sont négligés. Les fonctions f et g sont respectivement les termes d'injection et production. Par ailleurs, les saturations des fluides injectés sont connus et sont notées s_i^* dans l'équation (1.1).

Par définition de la saturation, on a

$$s_1(t, x) + s_2(t, x) = 1. \quad (1.3)$$

On définit $s = s_1$ et $s_2 = 1 - s$. La pression capillaire ne dépend que de la saturation,

$$p_{12}(s(t, x)) = p_1(t, x) - p_2(t, x) \quad (1.4)$$

et est une fonction monotone croissante de la saturation, ($\frac{dp_{12}}{ds}(s) \geq 0$, pour tout $s \in [0, 1]$). Afin de récupérer l'hydrocarbure, de l'eau est injectée dans un réservoir. On modélise alors les déplacements de fluide dans ce réservoir en connaissant les valeurs des saturations injectées, $s_1^* = 1$ et $s_2^* = 0$ correspondant à la phase injectée. Les inconnues se résument donc à la saturation et à la pression d'une seule phase. On introduit alors les quantités suivantes fonction de la saturation s ,

$M_i(s) = k_i(s)/\mu_i$	la mobilité de la phase i ,
$M(s) = M_1(s) + M_2(s)$	la mobilité totale,
$\nu(s) = M_1(s)/M(s)$	la fraction des flux de la phase i ,
$\alpha(s) = M_1(s)M_2(s)p'_{12}(s)/M(s)$	le terme capillaire.

La vitesse totale du fluide est notée $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$. Il est alors classique ([23], [A12]) de considérer une pression globale $p = p_2 + \tilde{p}$ telle que $\frac{d\tilde{p}}{ds}(s) = \nu(s) \frac{dp_{12}}{ds}(s)$. Ainsi,

$$\mathbf{V}(t, x) = -\mathbf{K}(x)M(s) (\nabla p_2(t, x) + \nu(s)\nabla p_{12}(s)) = -\mathbf{K}(x)M(s)\nabla p(t, x).$$

L'hypothèse essentielle, classiquement formulée, est de considérer la densité du fluide comme une fonction de la pression globale :

$$\rho_i(p_i) = \rho_i(p).$$

En effet, selon Chavent et al. ([23], chapitre 3) la densité varie peu selon la pression capillaire.

A cette étape, les trois modèles que nous considérons diffèrent selon la compressibilité des fluides considérés. Le premier modèle traite d'un fluide injecté compressible, de même coefficient de compressibilité que le fluide présent dans le réservoir. Le second modèle traite d'un fluide incompressible injecté, de l'eau typiquement, dans un réservoir contenant un fluide compressible, du gaz. Le troisième modèle concerne deux fluides compressibles avec des coefficients de compressibilité différents.

1.1.1. Mélange de deux fluides de même compressibilité [A9]. — Les deux fluides sont considérés compressibles et vérifient la même loi,

$$\frac{d\rho_i}{dp}(p) = \gamma\rho_i(p), \quad \gamma > 0. \quad (1.5)$$

En exprimant la vitesse de chaque phase en fonction de la pression globale et de la pression capillaire, la conservation des masses se résume alors à

$$\begin{aligned} \phi\partial_t s + \gamma\phi s\partial_t p + \operatorname{div}(\nu(s)\mathbf{V}) + \gamma\nu(s)\mathbf{V} \cdot \nabla p - \operatorname{div}(\mathbf{K}\alpha(s)\nabla s) \\ - \gamma\mathbf{K}\alpha(s)\nabla s \cdot \nabla p + sg = f, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} -\phi\partial_t s + \gamma\phi(1-s)\partial_t p + \operatorname{div}((1-\nu(s))\mathbf{V}) + \gamma(1-\nu(s))\mathbf{V} \cdot \nabla p \\ + \operatorname{div}(\mathbf{K}\alpha(s)\nabla s) + \gamma\mathbf{K}\alpha(s)\nabla s \cdot \nabla p + (1-s)g = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

En sommant ces deux équations, on obtient une équation d'évolution pour la pression

$$\gamma\phi\partial_t p + \operatorname{div}\mathbf{V} + \gamma\mathbf{V} \cdot \nabla p = f - g. \quad (1.8)$$

En milieux poreux, les vitesses sont faibles et les termes quadratiques en vitesse sont alors souvent négligés [29]. Cette hypothèse est faite ici et les équations (1.8) et (1.6) se simplifient de la sorte,

$$\gamma\phi\partial_t p + \operatorname{div}\mathbf{V} = f - g. \quad (1.9)$$

$$\phi\partial_t s + \gamma\phi s\partial_t p + \operatorname{div}(\nu(s)\mathbf{V}) - \operatorname{div}(\mathbf{K}\alpha(s)\nabla s) - \gamma\mathbf{K}\alpha(s)\nabla s \cdot \nabla p = f - sg. \quad (1.10)$$

$$\mathbf{V} = -\mathbf{K}M(s)\nabla p. \quad (1.11)$$

Le réservoir est noté Ω et l'on suppose qu'aucun flux ne traverse le bord $\partial\Omega$ du réservoir. Le modèle mathématique se résume alors à la formulation suivante. Soit $T > 0$ fixé et soit Ω un borné de \mathbb{R}^3 , on pose $Q_T = (0, T) \times \Omega$, $\Sigma_T = (0, T) \times \partial\Omega$. Le couple (s, p) est solution du système,

$$\begin{aligned} \gamma\phi\partial_t p + \operatorname{div}\mathbf{V} &= f - g && \text{dans } Q_T \\ \phi\partial_t s - s\operatorname{div}(\mathbf{V}) + \operatorname{div}(\nu(s)\mathbf{V}) \\ &\quad - \operatorname{div}(\mathbf{K}\alpha(s)\nabla s) - \gamma\mathbf{K}\alpha(s)\nabla s \cdot \nabla p &= (1-s)g && \text{dans } Q_T \\ \mathbf{V} &= -\mathbf{K}M(s)\nabla p && \text{dans } Q_T \\ \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \mathbf{K}\alpha(s)\nabla s \cdot \mathbf{n} = 0 && \text{sur } \Sigma_T \\ p(0, x) &= p_0(x), \quad s(0, x) = s_0(x) && \text{dans } \Omega, \end{aligned} \quad (1.12)$$

où n représente la normale unitaire sortante à $\partial\Omega$. Un tel modèle pour des fluides immiscibles compressibles n'a pas été étudié auparavant, à notre connaissance. Le cas limite $\gamma = 0$, correspondant à l'incompressibilité des fluides est déjà traité dans [23], [44], [30] et ne pose pas autant de difficultés que pour ce système, dont les fortes nonlinéarités sont techniquement difficiles à contrôler par le terme de dissipation dégénérée. De plus, le fait que l'équation en pression soit à dissipation non constante et dépendante de la saturation, la régularité de la pression est limitée par celle de la saturation. Le recours à une pression régulière pour estimer la saturation dans un espace peu régulier n'est donc pas permis.

Les modèles mathématiques traitant des fluides miscibles compressibles [3], [4], [5], [32] [33], [34] n'ont pas les problèmes de dégénérescence sur le terme dissipatif. En particulier,

notre modèle est proche de celui de [4], mais leur modèle possède une viscosité de fluide constante (ce qui induit une pression plus régulière) et les termes dissipatifs ne dégénèrent pas.

Les hypothèses que nous formulons sont les suivantes,

- (H1) $\exists \phi_0 > 0, \phi_1 > 0$ tels que $\phi_0 \leq \phi \leq \phi_1$.
- (H2) $\exists k_0 > 0, k_\infty > 0$ tels que $(\mathbf{K}(x)\xi, \xi) \geq k_0|\xi|^2$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, p.p. $x \in \Omega$,
 $\|\mathbf{K}\|_{(L^\infty(\Omega))^{N \times N}} \leq k_\infty$.
- (H3) $M \in \mathcal{C}^0([0, 1])$, $\exists m_0 > 0$ tel que $M(s) \geq m_0$ pour tout $s \in [0, 1]$.
- (H4) $\nu \in \mathcal{C}^0([0, 1])$, $\nu(0) = 0, \nu(1) = 1$ et $\exists C > 0$; $\nu(s) \leq Cs$.
- (H5) $(f, g) \in (L^2(Q_T))^2$, $g(t, x) \geq 0$ p.p. $(t, x) \in Q_T$
- (H6) $(p_0, s_0) \in (L^2(\Omega))^2$, $0 \leq s_0(t, x) \leq 1$ p.p. $x \in \Omega$

Les hypothèses (H1)-(H6) sont classiques en milieu poreux. La difficulté majeure concernant le système (1.12) est la possible dégénérescence du coefficient de dissipation α . Dans le cas incompressible même si la dissipation est dégénérée, une formulation faible classique est toujours possible; tandis que dans le cas compressible, nous obtenons des solutions en un sens affaibli par rapport à la formulation classique et dépendante de la nature des dégénérescences. Les trois hypothèses suivantes correspondent à des situations physiques distinctes, mais sont toutes plausibles,

- (H7a) $\alpha \in \mathcal{C}^1([0, 1])$, $\alpha(s) > 0$ pour $0 < s < 1$, $\alpha(0) > 0, \alpha(1) = 0$,
il existe $\alpha_0 > 0, 0 < r_2 \leq 2, s_1 < 1, m_1$ et $M_1 > 0$ tels que
 $\alpha(s) \geq \alpha_0$ pour tout $s \in [0, s_1]$,
 $m_1(1-s)^{r_2} \leq \alpha(s) \leq M_1(1-s)^{r_2}$, pour tout $s \in [s_1, 1]$.
De plus $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{1-\nu(s)}{1-s} = 0$.
- (H7b) $\alpha \in \mathcal{C}^1([0, 1])$, $\alpha(s) > 0$ pour $0 < s < 1$, $\alpha(0) = 0, \alpha(1) > 0$.
De plus, il existe $r_1 > 0$ et $m_1, M_1 > 0$ tels que
 $m_1 r_1 s^{r_1-1} \leq \alpha'(s) \leq M_1 r_1 s^{r_1-1}$ pour tout $0 \leq s \leq 1$.
- (H7c) $\alpha \in \mathcal{C}^1([0, 1])$, $\alpha(s) > 0$ pour $0 < s < 1$, $\alpha(0) = 0, \alpha(1) = 0$,
il existe $r_1 > 0, r_2 > 0, s_1 < 1, m_1$ et $M_1 > 0$ tel que,
 $m_1 r_1 s^{r_1-1} \leq \alpha'(s) \leq M_1 r_1 s^{r_1-1}$, pour tout $s \in [0, s_1]$.
 $-r_2 M_1 (1-s)^{r_2-1} \leq \alpha'(s) \leq -r_2 m_1 (1-s)^{r_2-1}$, pour tout $s \in [s_1, 1]$.
et $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{1-\nu(s)}{1-s} = 0$.

On établit alors, selon que l'on suppose (H7a), (H7b) ou (H7c) trois résultats d'existence. Le premier étant obtenu en un sens classique, les suivants en un sens plus faible.

On définit la fonction $L \in C^2[0, 1]$ par

$$L(s) = \frac{s^2}{2} \quad \text{pour } 0 \leq s \leq s_1,$$

$$L''(s) = (\nu(s) - s)^{-1} L'(s), \quad \forall s \in [s_1, 1].$$

Notons qu'il existe $c_1, c_2 > 0$ tel que,

$$c_1 \ln(1-s) \leq L(s) \leq c_2 \ln(1-s), \quad \forall s \in [0, 1].$$

Définition 1.1. — Sous les hypothèses (H1)-(H6), (H7a) et pour des données initiales s_0 satisfaisant $L(s_0) \in L^1(\Omega)$, le couple (p, s) est dit **solution faible classique** de (1.12) si $p \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $\mathbf{V} \in (L^2(Q_T))^N$, $\phi \partial_t p \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$, $0 \leq s(t, x) \leq 1$, p.p. $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$, $L(s) \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$, $\nabla s \in (L^2(Q_T))^N$,

$$\gamma \langle \phi \partial_t p, \psi \rangle + \int_{Q_T} \mathbf{K}(x) M(s) \nabla p \cdot \nabla \psi \, dx dt = \int_{Q_T} (f - g) \psi \, dx dt, \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} \phi s \partial_t \chi \, dx dt - \int_{\Omega} \phi(x) s_0(x) \chi(0, x) \, dx + \int_{Q_T} \mathbf{V} \cdot \nabla (s \chi) \, dx dt \\ & - \int_{Q_T} \nu(s) \mathbf{V} \cdot \nabla \chi \, dx dt + \int_{Q_T} \mathbf{K} \alpha(s) \nabla s \cdot \nabla \chi \, dx dt \\ & - \gamma \int_{Q_T} \mathbf{K}(x) \alpha(s) \nabla s \cdot \nabla p \chi \, dx dt = \int_{Q_T} (1 - s) g \chi \, dx dt, \end{aligned} \quad (1.14)$$

pour tout $\psi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, $\chi \in C^1([0, T] \times \overline{\Omega})$ avec $\text{supp } \chi \subset [0, T] \times \overline{\Omega}$.

Théorème 1.1. — Sous les hypothèses (H1)-(H7a), si s_0 vérifie $\ln(1 - s_0) \in L^1(\Omega)$, il existe une solution faible classique au système dégénéré (1.12) au sens de la définition 1.1.

Afin de définir une notion de solution faible adaptée à l'hypothèse (H7b), on introduit,

$$\beta(s) = s^{r-1}, \quad h(s) = \int_0^s \beta(y) dy,$$

où $r > 1$ et $r = r_1$ si $r_1 > 1$ (r_1 est défini en (H7b)) et $r \leq r_1 + 2$ si $r_1 \leq 1$. Pour $\theta \geq 0$, on définit

$$\beta_\theta(s) = s^{r-1+\theta}, \quad h_\theta(s) = \int_0^s \beta_\theta(y) dy.$$

Définition 1.2. — Soit $\theta \geq 7r_1 + 6 - r$, sous les hypothèses (H1)-(H6), (H7b), le couple (p, s) est dit **solution faible dégénérée** de (1.12) si

$$\begin{aligned} & p \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ & \mathbf{V} \in (L^2(Q_T))^N, \quad \phi \partial_t p \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))'), \\ & 0 \leq s(t, x) \leq 1, \quad \text{p.p. } (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \\ & h_\theta(s) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad \alpha^{\frac{1}{2}}(s) \beta'^{\frac{1}{2}}(s) \nabla s \in (L^2(Q_T))^N, \end{aligned}$$

$$\gamma \langle \phi \partial_t p, \psi \rangle + \int_{Q_T} \mathbf{K}(x) M(s) \nabla p \cdot \nabla \psi \, dx dt = \int_{Q_T} (f - g) \psi \, dx dt, \quad (1.15)$$

pour tout $\psi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, on définit

$$\begin{aligned}
F(s, p, \chi) = & - \int_{Q_T} \phi h_\theta(s) \partial_t \chi \, dxdt - \int_{\Omega} \phi(x) h_\theta(s_0(x)) \chi(0, x) dx \\
& + \int_{Q_T} \mathbf{V} \cdot \nabla(s \beta_\theta(s) \chi) \, dxdt - \int_{Q_T} \nu(s) \mathbf{V} \cdot \nabla(\beta_\theta(s) \chi) \, dxdt \\
& + \int_{Q_T} \alpha(s) \mathbf{K} \nabla s \cdot \nabla(\beta_\theta(s) \chi) \, dxdt - \gamma \int_{Q_T} \mathbf{K}(x) \alpha(s) \nabla s \cdot \nabla p \beta_\theta(s) \chi \, dxdt \\
& - \int_{Q_T} (1-s) g \beta_\theta(s) \chi \, dxdt,
\end{aligned} \tag{1.16}$$

et F satisfait

$$F(s, p, \chi) \leq 0 \quad \forall \chi \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \overline{\Omega}), \text{ supp } \chi \subset [0, T] \times \overline{\Omega} \text{ et } \chi \geq 0 \tag{1.17}$$

de plus,

$$\begin{aligned}
& \forall \varepsilon > 0, \exists Q^\varepsilon \subset Q_T, \text{mes}(Q^\varepsilon) < \varepsilon, \text{ tel que ,} \\
& F(s, p, \chi) = 0, \quad \forall \chi \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \overline{\Omega}), \text{ supp } \chi \subset ([0, T] \times \overline{\Omega}) \setminus Q^\varepsilon.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Théorème 1.2. — Sous les hypothèses (H1)-(H6), (H7b), il existe une solution faible dégénérée au problème dégénéré (1.12) au sens de la définition 1.2.

Enfin, lorsque l'hypothèse (H7c) est satisfaite, on introduit les notations suivantes en vue d'une nouvelle définition de solution. Soit $j_{\theta, \lambda}$ la fonction continue définie par

$$j_{\theta, \lambda}(s) = \begin{cases} \beta_\theta(s) & \text{pour } 0 \leq s \leq s_1 \\ \beta_\theta(s_1) (1-s_1)^{1-\frac{r'}{2}-\lambda} (1-s)^{\frac{r'}{2}-1+\lambda} & \text{pour } s_1 \leq s. \end{cases}, \tag{1.19}$$

où $r' \geq \max(2, r_2)$ (r_2 est défini en (H7c)). On définit aussi $J_{\theta, \lambda}$ par

$$J_{\theta, \lambda}(s) = \int_0^s j_{\theta, \lambda}(y) dy. \tag{1.20}$$

De plus, $J = J_{0,0}$, $j = j_{0,0}$. Les fonctions μ et G vérifient

$$\mu(s) = \beta(s) \text{ pour } 0 \leq s \leq s_1, \tag{1.21}$$

μ est continue et

$$\mu'(s) = (\nu(s) - s)^{-1} \mu(s), \quad \forall s \geq s_1. \tag{1.22}$$

De plus,

$$G(s) = \int_0^s \mu(y) dy. \tag{1.23}$$

Définition 1.3. — Soit $\theta \geq 7r_1 + 6 - r$, $\lambda \geq 7r_2 + 6 - \frac{r'}{2}$. Sous les hypothèses (H1)-(H6), (H7c) et pour des données initiales s_0 satisfaisant $G(s_0) \in L^1(\Omega)$, le couple (p, s) est une solution faible dégénérée de (1.12) si

$$\begin{aligned}
& p \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad \mathbf{V} \in (L^2(Q_T))^N, \\
& \phi \partial_t p \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))'), \quad 0 \leq s(t, x) \leq 1, \text{ p.p. } (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \\
& G(s) \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)); \alpha^{\frac{1}{2}}(s) \mu'^{\frac{1}{2}}(s) \nabla s \in L^2(Q_T), \quad J(s) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)),
\end{aligned}$$

pour tout $\psi \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$,

$$\gamma \langle \phi \partial_t p, \psi \rangle + \int_{Q_T} \mathbf{K}(x) M(s) \nabla p \cdot \nabla \psi \, dx dt = \int_{Q_T} (f - g) \psi \, dx dt, \quad (1.24)$$

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $Q^\varepsilon \subset Q_T$, $\text{mes}(Q^\varepsilon) < \varepsilon$, tel que, pour tout $\chi \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \overline{\Omega})$ avec $\text{supp } \chi \subset ([0, T] \times \overline{\Omega}) \setminus Q^\varepsilon$,

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} \phi J_{\theta, \lambda}(s) \partial_t \chi \, dx dt - \int_{\Omega} \phi(x) J_{\theta, \lambda}(s_0(x)) \chi(0, x) \, dx \\ & + \int_{Q_T} \mathbf{V} \cdot \nabla (s j_{\theta, \lambda}(s) \chi) \, dx dt - \int_{Q_T} \nu(s) \mathbf{V} \cdot \nabla (j_{\theta, \lambda}(s) \chi) \, dx dt \\ & + \int_{Q_T} \mathbf{K} \alpha(s) \nabla s \cdot \nabla (j_{\theta, \lambda}(s) \chi) \, dx dt - \gamma \int_{Q_T} \mathbf{K}(x) \alpha(s) \nabla s \cdot \nabla p j_{\theta, \lambda}(s) \chi \, dx dt \\ & = \int_{Q_T} (1 - s) g j_{\theta, \lambda}(s) \chi \, dx dt, \end{aligned} \quad (1.25)$$

Théorème 1.3. — *Sous les hypothèses (H1)-(H6), (H7c), et pour des données initiales vérifiant $G(s_0) \in L^1(\Omega)$, pour tout $\gamma > 0$, il existe une solution faible dégénérée au problème 1.12) au sens de la définition 1.3.*

Idée de démonstration : La preuve du théorème 1.1 se fait en plusieurs étapes. On approche le système (1.12) par un problème non dégénéré pour lequel l'existence s'obtient par une technique proche de celle développée dans [4]. Ensuite, pour obtenir des résultats de compacité afin de passer à la limite sur le paramètre de diffusion non dégénéré, des estimations uniformes par rapport à ce paramètre s'imposent. Une estimation fondamentale permet d'obtenir une estimation de dissipation non dégénéré alors même que la dissipation dégénère. Ceci est obtenu à l'aide d'une fonction test qui dégénère vers l'infini au point de saturation $s = 1$, point où la dissipation dégénère. Cette fonction test obligera à choisir des données initiales particulières (voir théorème 1.1). Cette fonction test particulière permet des simplifications algébriques remarquables et annihile des termes qui, pris séparément, ne sont pas contrôlables lors des estimations d'énergie. Il s'agit de prendre comme fonction test dans la formulation (1.14) (où un terme de dissipation non dégénéré est ajouté), $\chi = \kappa(s)$

$$\kappa(s) = s \quad \text{for } 0 \leq s \leq s_1,$$

$$\kappa'(s) = (\nu(s) - s)^{-1} \kappa(s), \quad \forall s \in [s_1, 1]. \quad (1.26)$$

Il est à noter que κ se comporte comme $(1 - s)^{-1}$ au voisinage de $s = 1$, mais choisir $(1 - s)^{-1}$ comme fonction test ne permet pas d'obtenir les simplifications algébriques et des termes restent incontrôlables.

Le théorème 1.2 traite d'une dégénérescence au point $s = 0$. La même technique ne peut pas être appliquée. En revanche, une estimation de dissipation dégénérée suffit à obtenir de la compacité sur une fonction dégénérée (en zéro) de la saturation. Le but n'est pas alors d'obtenir une solution de l'équation, mais une solution de l'équation en saturation (1.12) multipliée par une fonction dégénérée (en zéro) de la saturation. Dans une telle formulation, les termes linéaires deviennent non-linéaires et posent des difficultés de passage à la limite.

Pour cette raison, nous obtenons le théorème d'existence sur Q_T privé d'un sous-ensemble aussi petit que l'on veut.

Enfin, le théorème 1.3 traite d'une dégénérescence au point $s = 0$ et au point $s = 1$ simultanément. Les techniques développées dans les deux précédents théorèmes peuvent alors être appliquées.

1.1.2. Mélange eau gaz [A16]. — Le modèle qui décrit l'injection d'un fluide incompressible dans un réservoir d'hydrocarbure compressible s'obtient à partir des équations (1.1)–(1.2). À l'aide de la pression globale p définie précédemment et en supposant que la densité du gaz présent dans le gisement est fonction de cette pression, on obtient un modèle qui tient compte de l'incompressibilité du fluide injecté,

$$\phi \partial_t (\rho(p)s) - \operatorname{div}(\mathbf{K}\rho(p)M_1(s)\nabla p) - \operatorname{div}(\mathbf{K}\rho(p)\alpha(s)\nabla s) + \rho(p)sf_P = 0, \quad (1.27)$$

$$\phi \partial_t s + \operatorname{div}(\mathbf{K}M_2(s)\nabla p) - \operatorname{div}(\mathbf{K}\alpha(s)\nabla s) + sf_P = f_P - f_I. \quad (1.28)$$

La première équation est la conservation de la masse du gaz, La deuxième est la conservation de la masse du fluide incompressible -l'eau en général-, dont la densité, constante, a été simplifiée. On note aussi $f_I := f$ le débit d'injection et $f_P := g$ celui de la production. La loi d'état considérée n'est pas une fonction exponentielle par rapport à la pression comme (1.41) mais une fonction croissante par rapport à la pression et est bornée (voir (H6)).

Le réservoir est toujours noté Ω , un ensemble borné de \mathbb{R}^N . On pose, $Q_T = (0, T) \times \Omega$, $\Sigma_T = (0, T) \times \partial\Omega$. Au système (1.27)–(1.28), on ajoute les conditions aux limites suivantes, $\partial\Omega = \Gamma_w \cup \Gamma_i$, où Γ_w désigne la frontière d'injection d'eau et Γ_i son complémentaire.

$$\begin{cases} s(t, x) = 0, & p(t, x) = 0 \text{ sur } \Gamma_w \\ \mathbf{K}\nabla p \cdot \mathbf{n} = \mathbf{K}\alpha(s)\nabla s \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_i. \end{cases} \quad (1.29)$$

Cela signifie que la pression est imposée dans une zone d'injection du bord du réservoir. On complète le problème par les conditions initiales suivantes

$$\begin{cases} s(0, x) = s_0(x), \text{ avec } 0 \leq s_0(x) \leq 1 \\ (s\rho(p))(0, x) = u_0(x) \in L^2(\Omega) \end{cases} \quad (1.30)$$

Les hypothèses portant sur les mobilités, la porosité du milieu, le tenseur de perméabilité et autres grandeurs physiques, sont similaires à celles de la section précédente,

(H1) il existe deux constantes ϕ_0 et ϕ_1 dans $W^{1,\infty}(\Omega)$ telles que $0 < \phi_0 \leq \phi(x) \leq \phi_1$ p.p. $x \in \Omega$.

(H2) Le tenseur \mathbf{K} appartient à $(W^{1,\infty}(\Omega))^{N \times N}$. De plus, il existe deux constantes strictement positives k_0 et k_∞ telles que

$$\|\mathbf{K}\|_{(L^\infty(\Omega))^{N \times N}} \leq k_\infty \quad \text{et} \quad (\mathbf{K}(x)\xi, \xi) \geq k_0|\xi|^2 \quad (\text{for all } \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ p.p. } x \in \Omega).$$

(H3) Les fonctions M_1 et M_2 appartiennent à $\mathcal{C}^0([0, 1]; \mathbb{R}^+)$ et $M_1(0) = 0$. De plus, il existe une constante strictement positive m_0 telle que, pour tout $s \in [0, 1]$,

$$M_1(s) + M_2(s) \geq m_0.$$

(H4) La fonction $\alpha \in \mathcal{C}^0([0, 1]; \mathbb{R}^+)$ satisfait $\alpha(s) > 0$ pour $0 < s \leq 1$, et $\alpha(0) = 0$.

On définit $\beta(s) = \int_0^s \alpha(z) dz$, on suppose que β^{-1} est une fonction Hölderienne d'ordre θ , avec $0 < \theta \leq 1$, sur $[0, \beta(1)]$. Cela signifie qu'il existe une constante positive non nulle c telle que pour tout $s_1, s_2 \in [0, \beta(1)]$, on a $|\beta^{-1}(s_1) - \beta^{-1}(s_2)| \leq c|s_1 - s_2|^\theta$.

(H5) $(f_P, f_I) \in (L^2(Q_T))^2$, $f_P(t, x), f_I(t, x) \geq 0$ p.p. $(t, x) \in Q_T$

(H6) La densité ρ est continue et $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ par morceaux, ρ est strictement croissante sur $]p_m, p_M[$,
 $\rho(p) = \rho(p_m) = \rho_m$ pour tout $p \leq p_m$,
 $\rho(p) = \rho(p_M) = \rho_M$ pour tout $p \geq p_M$.

L'hypothèse (H6) est une hypothèse de troncature qui n'affecte pas le problème dès lors que la pression reste bornée ponctuellement. Dans le cas, $f_P = f_I$, le principe du maximum suivant peut être obtenu,

si $0 \leq u_0 - \rho_{\min} s_0$ et $u_0 - \rho_{\max} s_0 \leq 0$, alors

$$0 \leq (\rho(p) - \rho_{\min})s, \quad (\rho(p) - \rho_{\min})s \leq 0.$$

Théorème 1.4. — *Sous les hypothèses (H1)–(H6), pour $u_0 \geq 0$ (défini par (1.30)) appartenant à $L^2(\Omega)$ et s_0 vérifiant $0 \leq s_0 \leq 1$ p.p. Ω , il existe (s, p) solution de (1.27), (1.28) vérifiant,*

$$0 \leq s(t, x) \leq 1 \text{ p.p. } Q_T, \quad \beta(s) \in L^2(0, T; H_{\Gamma_w}^1(\Omega)), \quad (1.31)$$

$$\phi \partial_t s \in L^2(0, T; (H_{\Gamma_w}^1(\Omega))'), \quad (1.32)$$

$$p \in L^2(0, T; H_{\Gamma_w}^1(\Omega)), \quad \phi \partial_t (s\rho(p)) \in L^2(0, T; (H_{\Gamma_w}^1(\Omega))'), \quad (1.33)$$

tel que pour tout $\varphi, \xi \in L^2(0, T; H_{\Gamma_w}^1(\Omega))$,

$$\begin{aligned} & \langle \phi \partial_t (\rho(p)s), \varphi \rangle + \int_{Q_T} \rho(p) M_1(s) \mathbf{K} \nabla p \cdot \nabla \varphi \, dx dt \\ & + \int_{Q_T} \mathbf{K} \rho(p) \nabla \beta(s) \cdot \nabla \varphi \, dx dt + \int_{Q_T} \rho(p) s f_P \varphi \, dx dt = 0 \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} & \langle \phi \partial_t s, \xi \rangle + \int_{Q_T} \mathbf{K} \nabla \beta(s) \cdot \nabla \xi \, dx dt \\ & - \int_{Q_T} M_2(s) \mathbf{K} \nabla p \cdot \nabla \xi \, dx dt + \int_{Q_T} s f_P \xi \, dx dt = \int_{Q_T} (f_P - f_I) \xi \, dx dt. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Les crochets $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignent les crochets de dualité entre $L^2(0, T; (H_{\Gamma_w}^1(\Omega))')$ et $L^2(0, T; H_{\Gamma_w}^1(\Omega))$.

Le point clef de ce théorème d'existence est d'obtenir une estimation L^2 sur ∇p . Pour cela, on multiplie (1.27) par p et (1.28) par $\mathcal{H}(p) - \rho(p)p$, où $\mathcal{H}'(p) = \rho'(p)p$ et $\mathcal{H}(0) = 0$ et on

somme ces des estimations. Après intégration en espace, il reste

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi s \mathcal{H}(p) dx + \int_{\Omega} \rho(p) M(s) \mathbf{K} \nabla p \cdot \nabla p dx \\ = \int_{\Omega} (f_P - f_I) (\mathcal{H}(p) - p \rho(p)) dx - \int_{\Omega} \mathcal{H}(p) s f_P dx. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Les hypothèses (H3) et (H6) ainsi que la borne de la fonction \mathcal{H} assurent alors que $p \in L^2(0, T; H_{\Gamma_w}^1(\Omega))$.

L'aspect dégénéré en évolution sur la variable pression ne permet pas d'obtenir de compacité en variable pression. Par contre, le terme d'évolution $\partial_t(\rho(p)s)$ dans l'équation (1.27) nous permet d'obtenir de la compacité en variable $\rho(p)s$. D'autres difficultés techniques apparaissent alors, en particulier l'identification de la limite de la variable $\rho(p_h)s_h$ où (p_h, s_h) est solution d'un problème approché. Cette identification est rendue possible grâce à la monotonie de la fonction ρ , alors même que l'on ne dispose que de la convergence faible dans la variable pression et de la convergence forte sur la saturation dans L^2 .

Le choix du problème approché doit dans un premier temps assurer la positivité de la saturation et ensuite pouvoir définir la pression dans un processus d'ajout de la dissipation artificielle. Faire le choix d'une approximation de type perturbation singulier en pression, en ajoutant par exemple un terme évolutif en pression, est très difficile à gérer. En effet, une telle régularisation fait perdre le principe du maximum sur la saturation. Cette régularisation dans (1.28) complique dans l'équation (1.27) l'obtention de l'estimation d'énergie (1.36) obtenue par combinaison non linéaire des équations. Ce type d'approximation est délaissé au profit d'une semi-discrétisation en espace.

La preuve du théorème 1.4 s'effectue en deux étapes, la première consiste à prouver l'existence des solutions pour le problème non-dégénéré en saturation, la fonction α (dégénérée en 0) est remplacée par une fonction non dégénérée

$$\alpha_{\eta}(s) = \alpha(s) + \eta, \quad \text{avec } \eta > 0,$$

L'existence des solutions du problème non dégénéré est basée sur une méthode de semi-discrétisation en temps ([2, 49]). Soit $T > 0$, $N \in \mathbb{N}^*$ et $h = \frac{T}{N}$. on définit la suite paramétrée par h :

$$s_h^0(x) = s_0(x) \in [0, 1], \quad \text{a.e. in } \Omega \quad (1.37)$$

$$\rho(p_h^0) s_h^0(x) = u_0(x) \quad \text{a.e. in } \Omega, \quad (1.38)$$

pour tout $n \in [0, N - 1]$, soit $(s_h^n, \rho(p_h^n) s_h^n) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ avec $0 \leq s_h^n \leq 1$, on désigne par $(f_P)_h^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{nh}^{(n+1)h} f_P(\tau) d\tau$ et $(f_I)_h^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{nh}^{(n+1)h} f_I(\tau) d\tau$ alors on définit, $(s_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in H_{\Gamma_w}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_w}^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{aligned} \phi \frac{\rho(p_h^{n+1}) s_h^{n+1} - \rho(p_h^n) s_h^n}{h} - \operatorname{div}(\mathbf{K} \rho(p_h^{n+1}) M_1(s_h^{n+1}) \nabla p_h^{n+1}) \\ - \operatorname{div}(\mathbf{K} \rho(p_h^{n+1}) \alpha_{\eta}(s_h^{n+1}) \nabla s_h^{n+1}) + \rho(p_h^{n+1}) s_h^{n+1} (f_P)_h^{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$\phi \frac{s_h^{n+1} - s_h^n}{h} + \operatorname{div}(\mathbf{K}M_2(s_h^{n+1})\nabla p_h^{n+1}) - \operatorname{div}(\mathbf{K}\alpha_\eta(s_h^{n+1})\nabla s_h^{n+1}) + s_h^{n+1}(f_P)_h^{n+1} = (f_P)_h^{n+1} - (f_I)_h^{n+1}. \quad (1.40)$$

avec les conditions aux limites (1.29). L'existence des solutions pour ce système elliptique est obtenue grâce au théorème de Leray–Schauder et en utilisant deux régularisations en pressions : la première consiste à projeter la pression sur les N premiers vecteurs propres de l'opérateur $-\operatorname{div}(\mathbf{K}\nabla p)$ uniquement dans l'équation (1.39) et la seconde consiste à ajouter de la dissipation artificielle $\varepsilon \operatorname{div}(\mathbf{K}\nabla p)$ uniquement dans l'équation (1.40). Ensuite une version discrète de l'inégalité (1.36) permet l'obtention des estimations uniformes sur les solutions indépendantes de h et donc le passage à la limite quand h tend vers zéro. Enfin, on s'intéresse au passage à la limite quand η tend vers zéro. Il est clair qu'il est inespéré de démontrer que $(\nabla s^\eta)_\eta$ est uniformément borné dans $L^2(Q_T)$, par contre on établit que les suites $(\beta(s^\eta))_\eta$ (avec $\beta(s) = \int_0^s \alpha(y)dy$), $(\eta s^\eta)_\eta$ et $(p^\eta)_\eta$ sont uniformément bornées dans $L^2(0, T; H_{\Gamma_w}^1(\Omega))$. Ces estimations sont essentielles pour démontrer le théorème 1.4.

1.1.3. Mélange de deux fluides de compressibilité différentes [R]. — Les densités suivent une loi d'état exponentielle

$$\frac{d\rho_i}{dp}(p) = z_i \rho_i(p), \quad z_i > 0. \quad (1.41)$$

Ainsi, la loi de conservation (1.1) pour chaque phase s'écrit

$$\phi \partial_t s_i + \phi s_i z_i \partial_t p + \operatorname{div}(\nu_i \mathbf{V}) + \nu_i z_i \mathbf{V} \cdot \nabla p - \operatorname{div}(\alpha \nabla s_i) - \alpha z_i \nabla s_i \cdot \nabla p + s_i g(t, x) = s_i^* f(t, x). \quad (1.42)$$

Sans perte de généralité et afin de simplifier les notations, on considère $k = \phi = 1$, $f = g = 0$ et $z_2 = \gamma > 0$, $z_1 = 2\gamma$, ainsi la dépendance de la solution en fonction du paramètre γ est exhibée. Soit $T > 0$, fixé et $\Omega = (0, 1)$. On considère alors le système non linéaire dans $Q_T = \Omega \times (0, T)$

$$\gamma d(s) \partial_t p - \partial_x(M(s) \partial_x p) - \gamma \beta(s) |\partial_x p|^2 - \gamma \alpha(s) \partial_x s \partial_x p = 0, \quad (1.43)$$

$$\partial_t s + \gamma b(s) \partial_t p - \partial_x(\alpha(s) \partial_x s) + \gamma k(s) |\partial_x p|^2 + a_\gamma(s) \partial_x s \partial_x p = 0, \quad (1.44)$$

avec

$$\begin{aligned} d(s) &= (1 + s), & \beta(s) &= M(s)(1 + \nu(s)) \\ b(s) &= 2s - (1 + s)\nu(s), & k(s) &= -M(s)\nu(s)(1 - \nu(s)) \\ \alpha(s) &= M(s)\nu(s)(1 - \nu(s)) \frac{dp_{12}}{ds}(s), & a_\gamma(s) &= \gamma \alpha(s)(\nu(s) - 1) - M(s) \frac{d\nu}{ds}(s). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Le système (1.43)-(1.44) est complété avec les conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} p(t, 0) = 1, & p(t, 1) = 0, \\ s(t, 0) = 0, & \alpha(s) \partial_x s(t, 1) = 0, \end{cases} \quad (1.46)$$

et les conditions initiales

$$s(0, x) = s_0(x), \quad p(0, x) = p_0(x). \quad (1.47)$$

La fonction $\alpha(s)$, qui apparaît dans le terme de diffusion $\partial_x(\alpha(s) \partial_x s)$, s'annule en général pour $s = 1$ et $s = 0$, cette perte de coercivité est classique en milieu poreux. Ici, on s'intéresse uniquement à l'existence des solutions du *problème non-dégénéré*, ce problème correspond à un modèle particulier des pressions capillaires, des modèles non-dégénérés ont été étudiés

dans [31]. En dimension un d'espace, on note par π le relèvement de la pression $\pi(t, x) = p(t, x) - (1 - x)$ de telle sorte que $\pi(t, 0) = \pi(t, 1) = 0$. On désigne par

$$\begin{aligned} V_0(\Omega) &= \{u \in H^1(\Omega), u(0) = 0\} \\ W &= \{u \in L^\infty((0, T); H_0^1(\Omega)) \cap L^2((0, T); H^2(\Omega)), \partial_t u \in L^2((0, T); L^2(\Omega))\} \\ V &= \{u \in L^\infty((0, T); V_0(\Omega)) \cap L^2((0, T); H^2(\Omega)), \partial_t u \in L^2((0, T); L^2(\Omega))\}. \end{aligned}$$

Définition 1.4. — Soit $(\pi_0, s_0) \in H_0^1(\Omega) \times V_0(\Omega)$. On dit que (π, s) est une solution forte de (1.43)-(1.44) si (π, s) appartient à $W \times V$ et satisfait les équations (1.43)-(1.44) presque partout dans Q_T .

Théorème 1.5. — Pour tout $\gamma > 0$, il existe $T_\gamma^* \in]0, T]$ tel que le système (1.43)-(1.44) admet une unique solution forte dans $Q_{T_\gamma^*}$. De plus, la solution du système (1.43)-(1.44) converge vers la solution du modèle incompressible (obtenue pour $\gamma = 0$) quand γ tend vers zéro.

La preuve est spécifique à la dimension un d'espace et utilise de façon forte les injections de Sobolev. La dépendance de la solution en fonction du coefficient de compressibilité est également précisée, celle ci permet de donner la limite du problème quand ce coefficient tend vers zéro.

1.2. Transport des élément radionucleides dans le sol [A17], [A5]

L'activité humaine utilise la radioactivité dans différents domaines tels que la production de l'électricité, la propulsion d'engins navals, l'armement ou en medecine. Autant de domaines qui utilisent l'énergie nucléaire et produisent des déchets radioactifs. La désintégration des éléments radioactifs produit d'autres éléments qui demeurent radiactifs et les éléments de très haute activité restent dangeureux pour de milliers d'années. Une option actuellement envisagée pour leur stockage est l'enfouissement en site géologique profond. L'idée est de stocker ces déchets radioactifs dans des containers qui seront enfouit en site très imperméable telle que l'argile, granite,... Plusieurs études traitent de la sécurité de tels stockages afin de prévenir des éventuelles pollutions dues à une fuite des fûts de stockage. Dans le cadre du GDR MOMAS financé par l'ANDRA (Agence Nationale pour la gestion des Déchets RAdioactifs), nous avons proposé une étude afin de prévoir certaines conséquences d'une fuite dans un site de stockage de déchets radioactifs situé dans les profondeurs. La première phase, décrite brièvement dans cette section, consiste à modéliser, analyser mathématiquement et numériquement le déplacement de radionucléides dans un milieu poreux saturé hétérogène. La deuxième phase du projet consiste à étudier certains phénomènes de dynamique des populations provoqués par l'arrivée éventuelle de polluant radioactif près de la surface du sol, cette étape est étudiée par M. Langlais et F. Marpeau.

On considère un milieu poreux saturé en eau et pollué par des éléments radioactifs suite à une fuite de leur site de stockage. Le problème associe deux phénomènes : l'écoulement, gouverné par vitesse de filtration de Darcy, et le déplacement de plusieurs espèces chimiques dans l'écoulement. Le déplacement d'un substrat miscible de concentration c est décrit par une

EDP incluant le transport et les effets de diffusion-dispersion. Des observations géologiques montrent que le mouvement est souvent retardé par fixation des éléments radioactifs sur la matrice poreuse, cet événement est connu comme le phénomène d'adsorption. On tient également compte de deux mécanismes propres aux radionucléides la décroissance et la filiation radioactives. La désintégration de certains noyaux radioactifs est le phénomène de décroissance radioactive. Il est proportionnel à la durée de vie de chaque radionucléide. Même si un composant disparaît par décroissance radioactive, il génère par filiation d'autres composants.

Les équations décrivant le déplacement de m -radionuclides de concentration $c = (c_1, \dots, c_m)^T$, de pression p et de vitesse de filtration V s'écrivent

$$\begin{aligned} \partial_t G_k(x, c_k(t, x)) + \operatorname{div}(c_k(t, x)V(t, x)) \\ - \operatorname{div}\left(D_k(x, c_k(t, x), V(t, x))\nabla c_k(t, x)\right) + \lambda_k G_k(x, c_k(t, x)) \\ - \sum_{l < k} \lambda_l R_{k,l} G_l(x, c_l(t, x)) - f_k(t, x) = 0 \text{ dans } Q_T, \quad k = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$\operatorname{div} V(t, x) = 0 \text{ dans } Q_T, \quad (1.49)$$

$$V(t, x) = -\frac{1}{\mu(c(t, x))} K(x) \left(\nabla p(t, x) - \rho(c(t, x)) \vec{g}(x) \right) \text{ dans } Q_T, \quad (1.50)$$

où

$$G_k(x, c) = \phi(x)c + (1 - \phi(x))\rho_s(x)F_k(x, c) \quad (1.51)$$

désigne la masse totale de l'élément k , ϕ la porosité, F_k représente la masse de l'élément k adsorbé par unité de masse de solide, ρ_s la densité de la roche, D_k représente le tenseur de diffusion-dispersion, λ_k le facteur de décroissance radioactive de l'élément c_k , les coefficients $R_{k,l}$ définissent les facteurs de filiation, $R_{k,l}$ présente le rapport de masse molaire du l -ème et k -ème élément si c_k est obtenu par désintégration de c_l (ce coefficient est nul dans le cas contraire), ν la viscosité, K le tenseur de perméabilité intrinsèque, \vec{g} la gravité.

1.2.1. Analyse [A17]. — Au système (1.48)-(1.50), on considère les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} D_k(\sigma, c_k(t, \sigma), V(t, \sigma))\nabla c_k(t, \sigma) \cdot \vec{\nu}(\sigma) \\ + (c_k(t, \sigma) - g_k(t, \sigma))(V(t, \sigma) \cdot \vec{\nu}(\sigma))^- = 0 \text{ sur } \Sigma_T, \end{aligned} \quad (1.52)$$

$$V(t, \sigma) \cdot \vec{\nu}(\sigma) = \mathcal{V}(t, \sigma) \text{ sur } \Sigma_T \quad (1.53)$$

La région où $\mathcal{V}(t, \sigma) < 0$ représente une injection de fluide contaminé avec une concentration g_k , la région où $\mathcal{V}(t, \sigma) > 0$ représente une zone de production (le flux total est le flux convectif) et la région où $\mathcal{V}(t, \sigma)$ s'annule est une frontière impénétrable.

L'incompressibilité du fluide entraîne la condition de compatibilité suivante :

$$\int_{\Gamma} \mathcal{V}(t, \sigma) d\sigma = 0 \text{ for a.e. } t \in (0, T). \quad (1.54)$$

Pour compléter le système, on associe des conditions initiales positives et bornées

$$c_k(0, \cdot) = c_{k,0}(\cdot) \in L^\infty(\Omega), \quad c_{k,0}(x) \geq 0 \text{ p.p. } x \in \Omega, \quad k = 1, \dots, m. \quad (1.55)$$

On décrit les hypothèses classiques sur les données du problème :

$$g_k \in L^\infty(\Sigma_T), \quad g_k(t, \sigma) \geq 0 \text{ p.p. sur } \Sigma_T, \quad k = 1, \dots, m, \quad (1.56)$$

$$\begin{aligned} f_k &\in L^1((0, T); L^\infty(\Omega)) \cap L^2\left((0, T); (H^1(\Omega))'\right), \\ f_k(t, x) &\geq 0 \text{ p.p. dans } Q_T, \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (1.57)$$

La fonction d'adsorption F_k satisfait

$$F_k(\cdot, u) \in L^\infty(\Omega), \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{R}_+, \quad (1.58)$$

$$F_k(x, 0) = 0, \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad (1.59)$$

$$u \mapsto F_k(x, u) \text{ continue et croissante sur } \mathbb{R}_+. \quad (1.60)$$

Le facteur de décroissance radioactive λ_k est positive. Les réactions nucléaires sont supposées irréversibles, ainsi les radionucléides sont ordonnés tels que $(R_{k,l})_{k,l}$ soit une matrice triangulaire inférieure.

Pour tout $k = 1, \dots, m$, il existe $\bar{D}_k \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha_k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que le tenseur D_k vérifie pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{R}^d$, et p.p. $x \in \Omega$,

$$D_k(\cdot, u, \eta) \text{ est mesurable, } D_k(x, \cdot, \cdot) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d; \mathcal{M}_d(\mathbb{R})), \quad (1.61)$$

$$\|D_k(x, u, \eta)\|_{\mathcal{M}_d(\mathbb{R})} \leq \bar{D}_k; \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad D_k(x, u, \eta)\xi \cdot \xi \geq \alpha_k |\xi|^2. \quad (1.62)$$

Les fonctions ρ et μ appartiennent à $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^m; \mathbb{R}_+)$. Les données ϕ , ρ_s , K et \vec{g} sont bornées et le tenseur K est coercif.

Théorème 1.6. — *Il existe une solution faible (c, p) du système (1.48)–(1.53) dans le sens suivant : Pour tout $k = 1, \dots, m$,*

$$c_k \in L^2((0, T); H^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T), \quad c_k(t, x) \geq 0 \text{ p.p. dans } Q_T,$$

$$t \mapsto G_k(\cdot, c_k(t, \cdot)) \in \mathcal{C}^0([0, T]; (H^1(\Omega))'),$$

$$t \mapsto \partial_t G_k(\cdot, c_k(t, \cdot)) \in L^2((0, T); (H^1(\Omega))'),$$

$$G_k(\cdot, c_k(0, \cdot)) = G_k(\cdot, c_{k,0}(\cdot)) \text{ p.p. dans } \Omega,$$

$$p \in L^2((0, T); H^1(\Omega)/\mathbb{R}), \quad V \in L^2((0, T); (L^2(\Omega))^d),$$

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left\langle \partial_t G_k(\cdot, c_k(t, \cdot)), \varphi(t, \cdot) \right\rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} dt - \int_{Q_T} c_k(t, x) V(t, x) \cdot \nabla \varphi(t, x) dx dt \\ &\quad + \int_{Q_T} D_k(x, c_k(t, x), V(t, x)) \nabla c_k(t, x) \cdot \nabla \varphi(t, x) dx dt \\ &\quad + \int_{\Sigma_T} \left(\gamma_\Gamma c_k(t, \sigma) \mathcal{V}^+(t, \sigma) - g_k(t, \sigma) \mathcal{V}^-(t, \sigma) \right) \gamma_\Gamma \varphi(t, \sigma) d\sigma dt \\ &\quad + \lambda_k \int_{Q_T} G_k(x, c_k(t, x)) \varphi(t, x) dx dt - \sum_{l < k} \lambda_l R_{k,l} \int_{Q_T} G_l(x, c_l(t, x)) \varphi(t, x) dx dt \\ &\quad - \int_{Q_T} f_k(t, x) \varphi(t, x) dx dt = 0 \text{ pour tout } \varphi \in L^2((0, T); H^1(\Omega)), \end{aligned}$$

$$\int_{Q_T} \frac{1}{\mu(c(t,x))} K(x) \left(\nabla p(t,x) - \rho(c(t,x)) \vec{g}(x) \right) \cdot \nabla \psi(t,x) dx dt \\ + \int_{\Sigma_T} \mathcal{V}(t,\sigma) \gamma_\Gamma \psi(t,\sigma) d\sigma dt = 0 \quad \text{pour tout } \psi \in L^2((0,T); H^1(\Omega)) ,$$

$$V(t,x) = -\frac{1}{\mu(c(t,x))} K(x) \left(\nabla p(t,x) - \rho(c(t,x)) \vec{g}(x) \right) \quad \text{p.p. dans } Q_T .$$

La preuve est basée sur une méthode de semi-discrétisation dans des espaces de Banach ([2, 49]). La méthode de semi-discrétisation en temps consiste à approcher $\partial_t G_k(x, c_k(t,x))$ dans (1.48) par $\frac{G_k(x, c_k(t+h,x)) - G_k(x, c_k(t,x))}{h}$. Cette approche est particulièrement adaptée à ce modèle parce que la fonction G_k est non linéaire et n'est pas dérivable par rapport à la variable c . Par contre, elle est croissante par rapport à c ceci permet alors de définir une fonction B selon le fameux travail de H.W. Alt et S. Luckhaus ([2]) :

$$B(x,u) = \int_0^1 (G(x,u) - G(x,su)) u ds \quad \text{pour p.p. } x \in \Omega, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}.$$

Dés que $G(x,u)$ est croissante en u , B est positive. Dans [2], un argument de convexité montre la propriété essentielle pour obtenir des estimations *a priori* sur les solutions approchées : pour presque tout $x \in \Omega$, et pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$,

$$(G(x, z_1) - G(x, z_2)) z_2 \leq B(x, z_1) - B(x, z_2) \leq (G(x, z_1) - G(x, z_2)) z_1 . \quad (1.63)$$

Ensuite, un principe de maximum montre que les concentrations demeurent dans un borné de \mathbb{R}^+ , ici la structure triangulaire des termes de filiation jouent un rôle important pour établir ce résultat. Enfin, un contrôle des translatés (en temps) montre que les solutions approchées sont bornées dans un espace de Nikolskii afin d'établir un résultat de compacité et conclure. Dans le cas d'un seul substrat (i.e. $m = 1$) on précise le comportement des solutions au cours du temps quand la fonction d'adsorption F est concave, plus précisément

Proposition 1.1. — *Soit la fonction $c \mapsto F(x, c)$ concave, pour presque tout $x \in \Omega$. On suppose qu'il existe $t_0 \in [0, T]$ tel que $g(t, \sigma) = 0$ pour presque tout $(t, \sigma) \in [t_0, T] \times \Gamma$. Alors pour presque tout $(t, x) \in Q_T$ on a*

$$c(t,x) \leq e^{-\lambda(t-t_0)} \left(\bar{c} + \int_0^{t_0} \left\| \frac{f(s, \cdot)}{\phi} \right\|_{L^\infty(\Omega)} ds \right) + \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-s)} \left\| \frac{f(s, \cdot)}{\phi} \right\|_{L^\infty(\Omega)} ds .$$

1.2.2. Simulation numérique [A5]. — On propose ici de simuler le déplacement des éléments radionucléides dans un milieu poreux hétérogène saturé. L'originalité de ce travail est de proposer des schémas précis pour résoudre les équations de convection-diffusion-réaction contenant des termes évolutifs non linéaires. Les tests numériques présentés montrent la stabilité et la robustesse de ces schémas sur des cas tests académiques. Enfin, Le benchmark COUPLEX 1 (proposé par l'ANDRA) concernant la simulation d'un champ lointain de la pollution d'un site, suite à une fuite d'un dispositif nucléaire, est réalisé et comparé avec d'autres résultats dans la littérature.

Algorithme. Soit $c^{k,n}$ une approximation de $c^k(t_n, \cdot)$ donnée, alors la pression $(p^n)_n$ et la vitesse $(V^n)_n$ sont calculées en approchant les équations (1.49) et (1.50) par un schéma classique en volumes finies. Ensuite $c^{k,n+1}$ est calculée par une méthode de splitting.

Splitting pour (1.48). Une méthode de splitting est mise en place afin de développer des schémas adaptés aux deux phénomènes présents : convection et diffusion-réaction. Plus précisément nous utilisons la méthode de splitting de Strang [79] :

$$c^{k,n+1} = \mathcal{S}_1 \left(\frac{\Delta t}{2}, \mathcal{S}_2 \left(\Delta t, \mathcal{S}_1 \left(\frac{\Delta t}{2}, c^{k,n} \right) \right) \right), \quad (1.64)$$

avec \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 sont respectivement les schémas approchant la partie transport et la partie diffusion-réaction. Dans [58], il est démontré que dans le cas linéaire que l'erreur additionnelle due à la méthode de Strang est d'ordre deux en temps. On utilise par extension cette méthode même si G^k est non linéaire.

Schéma quasi d'ordre deux pour une équation hyperbolique non linéaire. En utilisant la technique de Lax-Wendroff, on adapte ici la méthode utilisée dans [20] pour l'équation non linéaire suivante

$$\partial_t G(x, c) + V \cdot \nabla c = 0, \quad (1.65)$$

avec G satisfaisant $G(x, 0) = 0$, pour tout x et $c \mapsto G(x, c)$ est continue croissante et bijective. Ainsi, par la formule de Taylor sur (t_n, t_{n+1}) et en intégrant l'équation sur une maille générique $Q_{i,j}$ de bord $\Gamma_{i,j}$ on a

$$\begin{aligned} \int_{Q_{i,j}} G(x, c(t_{n+1}, x)) &= \int_{Q_{i,j}} G(x, c(t_n, x)) - \Delta t \int_{Q_{i,j}} V \cdot \nabla c \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Gamma_{i,j}} H(x, c) \begin{pmatrix} u^2 & uv \\ uv & v^2 \end{pmatrix} \nabla c \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{Q_{i,j}} \mathcal{O}(\Delta t^3), \end{aligned}$$

avec $H(x, c) = 1/\partial_c G(x, c)$. Ensuite, les dérivées sont approchées comme dans [20] par un schéma aux différences finies décentré en se servant du fait que H est positive. Le schéma résultant est d'ordre deux de type Lax-Wendroff. Afin de rendre ce schéma l^∞ -stable et positif, on met en place la technique de limitation de flux selon [76, 80]. Ainsi le schéma limité est quasi d'ordre deux positif et stable sous une certaine condition CFL.

On compare par la suite les limiteurs de flux classiques

$$\text{limiteur de Roe} : \varphi(r) = \max(0, \min(\Phi r, 1), \min(\Phi, r)), \quad \text{where } 1 \leq \Phi \leq 2.$$

Pour $\Phi = 1$, ce limiteur est appelé Minmod. pour $\Phi = 2$, il correspond à celui de Superbee. Le limiteur de van Leer s'écrit $\varphi(r) = \frac{2r}{1+r}$ si $r \geq 0$ et 0 sinon.

Approximation de l'équation de réaction-diffusion equation. On s'intéresse à l'équation de réaction-diffusion suivante

$$\partial_t G_k(x, C^k) - \operatorname{div} \left(D(x, V(x)) \nabla C^k \right) + \lambda G_k(x, C^k) = \sum_{l < k} \lambda^l R_l G_l(x, C^l) + f(t, x).$$

Avec C^k la concentration de l'espèce s^k dans l'équation (1.48). Les espèces sont classées de telle sorte que les facteurs de filiation représentent une matrice triangulaire inférieure, Ainsi, cette

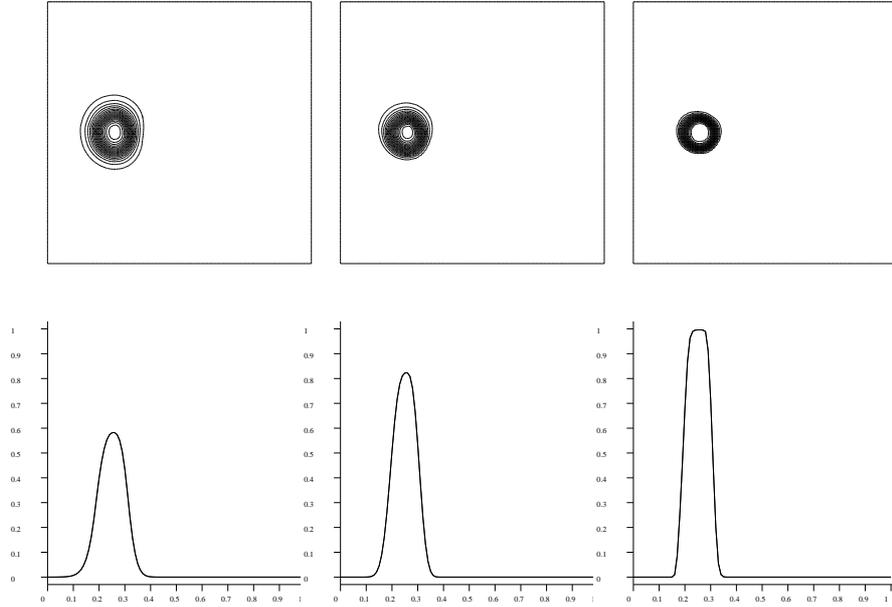


FIGURE 1. Isovaleurs de la concentration et courbes suivant l'axe $y = \frac{1}{2}$ après un tour. Schéma proposé avec limiteur Minmod (gauche), limiteur Van Leer (centre) et limiteur Superbee (droite).

structure est utilisée en commençant par résoudre les équations de $k = 1$ à m . Un schéma totalement implicite est alors proposé afin d'éviter une CFL très restrictive. On propose le schéma suivant

$$\frac{G_k(x, c^k(t_{n+1}, x)) - G_k(x, c^k(t_n, x))}{\Delta t} - \operatorname{div}(D_k(x, V(x)) \nabla c^k(t_{n+1}, x)) + \lambda G_k(x, c^k(t_{n+1}, x)) = \sum_{l=1}^k \lambda^l R_l G_l(x, c^l(t_{n+1}, X)) + f(t_{n+1}, x),$$

qu'on approche par un schéma classique aux volumes finies.

Résultats numériques. On présente plusieurs tests afin de mettre en évidence les différents phénomènes.

- *Convection linéaire.* Soit l'équation

$$\partial_t C + V \cdot \nabla C = 0 \quad \text{dans } \Omega = (0, 1) \times (0, 1)$$

et avec une vitesse circulaire centrée au point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. La condition initiale $C = 1$ dans le disque $(x - 0.25)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.0036$, et $C = 0$ ailleurs. Selon la Figure 1, le schéma proposé avec le limiteur de Superbee donne la meilleure approximation. nous utilisons alors ce schéma par la suite.

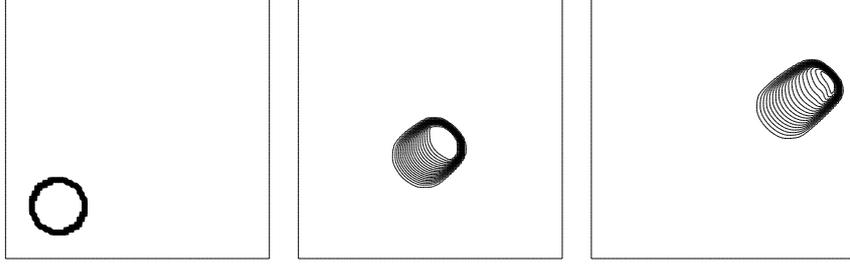


FIGURE 2. Convection avec une adsorption quadratique. Isovaleurs de la concentration à $t = 0$ (gauche), à $t = 0.2$ (centre) et $t = 0.4$ (droite).

- *Convection non linéaire.* Soit l'équation avec adsorption non linéaire

$$\partial_t \left(\phi C + (1 - \phi) \rho_s \left(\frac{1}{2} C - \frac{1}{4} C^2 \right) \right) + V \cdot \nabla C = 0 .$$

avec la condition initiale $C = 1$ dans le disque $(x - 0.2)^2 + (y - 0.2)^2 \leq 0.01$, et $C = 0$ ailleurs ; $\phi = 0.5$, $\rho_s = 1$ et $V = (1, 0.7)$. On observe sur la figure 2 le phénomène de retardation du à l'adsorption. La solution présente un choc en amont de la contamination et une détente en aval. Ceci s'explique par le fait que la fonction d'adsorption est concave.

- *Convection-diffusion-réaction.* Ce test couple les différents phénomènes : convection, diffusion et réaction, dans un milieu hétérogène. Le domaine est discontinu au niveau $y = x$, on note Ω_1 la région supérieure de porosité $\Omega_1 = 0.3$ et par Ω_2 la région inférieure de porosité $\Omega_1 = 0.2$. La vitesse est circulaire et de centre $(1/2, 1/2)$. On étudie le déplacement de deux espèces chimiques s^1 et s^2 . Le premier est radioactif et de facteur de décroissance radioactif $\lambda^1 = \text{Ln } 2/15$. Le second est stable ($\lambda^2 = 0$) et il est généré par filiation de l'élément s^1 avec un taux de 90 pour cent. Le tenseur de diffusion-dispersion s'écrit

$$D_k = d_m^k I + |V| (\alpha_t^k E(V) + \alpha_t^k (I - E(V))) , \quad (E(V))_{ij} = \frac{V_i V_j}{|V|^2} .$$

Il est considéré indépendant de k et ses valeurs valent $d_m^k = 0.00001$, $\alpha_t^k = 0.00005$, $\alpha_t^k = 0.00002$ dans Ω_1 et $d_m^k = 0.00001$, $\alpha_t^k = 0.00001$ et $\alpha_t^k = 0.00005$ dans Ω_2 .

L'adsorption pour s^1 est linéaire dans Ω_1 comme $F^1(x, c^1) = \frac{1}{10} c^1$, et de type Langmuir dans Ω_2 comme $F^1(x, c^1) = \frac{1}{10} \frac{c^1}{1+c^1}$. L'espèce s^2 est supposé inadsorbé ($F^2(x, c^2) = 0$ dans Ω). La condition initiale pour s^1 est $c^1 = 1$ dans le disque $(x - 0.2)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.01$ et $c^1 = 0$ ailleurs. c^2 est supposée nulle initialement. L'espèce s^2 est produite par destruction de s^1 (Figure 3). L'espèce s^1 perd sa masse au cours du temps tandis que s^2 augmente sa masse comme on l'observe sur la figure 4. Les différents phénomènes sont bien capturés. En particulier, l'espèce s^2 après avoir été générée par filiation se déplace plus vite parce qu'elle ne subit pas de décroissance comme l'espèce s^1 (Figure 3)

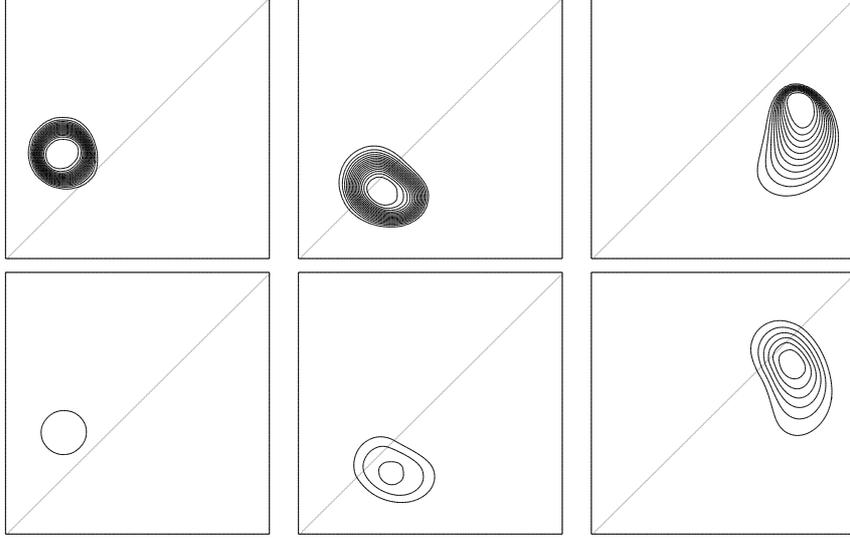


FIGURE 3. Isovaleurs de la concentration c^1 (haut) et c^2 (bas) aux temps $t = 2$ (gauche), $t = 5$ (centre) et $t = 14$ (droite).

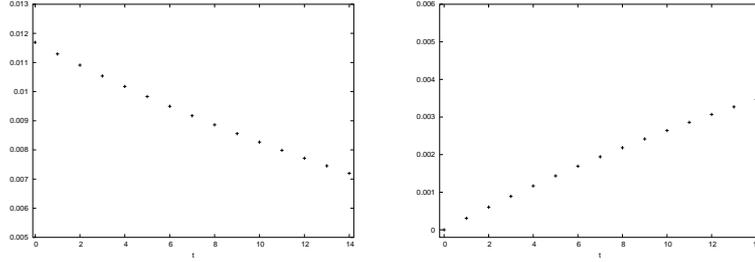


FIGURE 4. Masse de s^1 (gauche) et s^2 (droite) au cours du temps.

1.3. Maillage adaptatif et suivi des fronts [A15]

Un algorithme pour l'approximation des écoulements diphasiques incompressibles en milieu poreux est étudié par une méthode de suivi de front sur des grilles composites.

Les équations modélisant le déplacement de deux fluides incompressibles et sans tenir compte des termes capillaires et gravitationnels s'écrivent :

$$- \operatorname{div}(\mathbf{K}M(S)\nabla P) = 0 \quad \text{dans } Q_T, \quad (1.66)$$

$$\phi \partial_t S + \operatorname{div}(\mathbf{V}f(S)) = 0 \quad \text{dans } Q_T, \quad (1.67)$$

$$\mathbf{V} = -\mathbf{K}M\nabla P \quad \text{dans } Q_T. \quad (1.68)$$

On rappelle S la saturation, P la pression et $M(S)$ la mobilité totale. A ce système on associe les conditions aux limites : $\mathbf{K}M(S)\nabla P \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ_{imp} , $P = P_{in}$, $S = S_{in}$ sur Γ_{in} , $P = P_{out}$ sur Γ_{out} , et la condition initiale $S(x, y, 0) = S_0(x, y)$ dans Ω

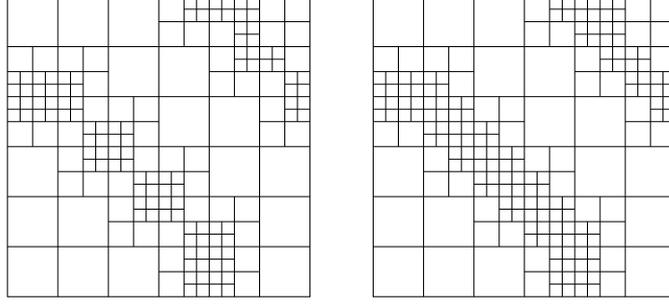


FIGURE 5. Maillage composite avec deux niveaux de raffinement consécutifs (gauche), en ajoutant des mailles sur trois niveaux (droite)

Une méthode de splitting est utilisée afin d’approcher une équation elliptique et une équation hyperbolique. C’est la méthode IMPES (implicite en pression et explicite en saturation) ([9], [35]). Pour plus de clarté, on s’intéresse à la discrétisation de deux problèmes typiques sur des grilles composites

- **Problème elliptique.** Soit $M(x, y)$ une fonction continue et positive sur Ω , on cherche P solution de

$$-div(M(x, y)\nabla P) = 0 \text{ dans } \Omega \quad (1.69)$$

associée aux conditions aux limites en pression.

- **Problème hyperbolique.** Soit $\mathbf{V}(x, y)$ un vecteur donné dans Ω satisfaisant $div\mathbf{V} = 0$, on cherche S solution de

$$\partial_t S + div(\mathbf{V}f(S)) = 0 \text{ dans } \Omega \quad (1.70)$$

avec $S(x, y, t) = S_{in}$ sur Γ_{in} et $S(x, y, 0) = S_0(x, y)$ dans Ω et $f \in C^1[0, 1]$ croissante.

1.3.1. Maillage composite. — La technique de raffinement consiste à subdiviser les mailles dans la zone où la solution représente un comportement raide c’est à dire la présence du front. Le raffinement consiste à diviser une maille en quatre sous mailles. Néanmoins, un taux de raffinement important entre deux mailles voisines détériorent la précision de la discrétisation. Par contre si on considère une différence de niveaux de raffinement entre mailles voisines de deux, ceci a pour conséquence d’augmenter artificiellement la zone de raffinement. Ainsi, on autorise peu de mailles d’avoir des mailles voisines de trois niveaux de différence (voir figure 5)

1.3.2. Discrétisation de l’équation elliptique sur une grille composite. — Soit C une maille composite générique de volume de contrôle Ω_C et de bord Γ_C comme sur la figure 6. Par la formule de Stokes on a

$$\int_{\Omega_C} div(M\nabla P)d\omega = \int_{\Gamma_C} M\nabla P \cdot \mathbf{n}d\gamma = fl(C) = 0 \quad (1.71)$$

où $fl(C)$ est la somme des quatre flux correspondant aux quatre côtés :

$$fl(C) = fl_e(C) + fl_w(C) + fl_n(C) + fl_s(C), \quad (1.72)$$

avec $fl_i(C)$ le flux à travers le côté i de maille C ($i = s, w, e, n$). Pour une fonction donnée Φ , on note

$$\begin{aligned}\Phi_N & : \text{ Valeur de } \Phi \text{ au milieu de la maille } N \\ \Phi_n & : \text{ Valeur de } \Phi \text{ au milieu du côté } n\end{aligned}$$

Sur la figure 6, les mailles nord et west sont des mailles du même niveau que la maille C , ainsi les flux s'écrivent de façon classique

$$fl_n(C) \simeq M_n(P_N - P_C) \text{ et } fl_w(C) \simeq -M_w(P_C - P_W).$$

Afin d'assurer la conservation du flux sur la face Est de la maille C , on impose

$$fl_e(C) = -fl_w(EN) - fl_w(ES),$$

où $fl_w(EN)$ (resp. $fl_w(ES)$) désigne de flux à travers le côté west de la maille EN (resp. ES). Ensuite, on introduit une pression auxilliaire $P_{\square} = \frac{3}{4}P_C + \frac{1}{4}P_N$ obtenue par interpolation linéaire de telle sorte que

$$fl_w(EN) \simeq -M_{en} \frac{P_{\square} - P_{EN}}{\frac{3h}{4}} \frac{h}{2} = -M_{en} \left(\frac{1}{2}P_C + \frac{1}{6}P_N - \frac{2}{3}P_{EN} \right).$$

Pour approcher le flux $fl_w(ES)$, deux pressions auxilliaires sont introduites par interpolation linéaire P_{Δ} et P_{\circ} ainsi,

$$fl_w(ES) \simeq -M_{es} \frac{P_{\circ} - P_{ES}}{\frac{3h}{4}} \frac{h}{2} = -M_{es} \left(\frac{4}{9}P_C + \frac{1}{9}P_{SW} + \frac{1}{9}P_{SE} - \frac{2}{3}P_{ES} \right)$$

De la même façon, on a

$$\begin{aligned}fl_s(C) & = -fl_n(SW) - fl_n(SE) \\ & \simeq -M_{sw} \left(\frac{1}{2}P_C + \frac{1}{6}P_W - \frac{2}{3}P_{SW} \right) - M_{se} \left(\frac{4}{9}P_C + \frac{1}{9}P_{EN} + \frac{1}{9}P_{ES} - \frac{2}{3}P_{SE} \right).\end{aligned}$$

1.3.3. Discrétisation de l'équation de transport. — Des schémas aux différences finies sont utilisés pour dicrétiser l'équation hyperbolique (1.70) sur une grille composite. On suppose que la vitesse est une donnée. Le schéma upwind est largement utilisé en ingénierie pétrolière, il est basé sur le décentrage des mobilités de chaque phase selon sa propre vitesse (voir Aziz et al. [9], Forsyth [35], Hermitte [52]). Ce schéma est d'ordre 1 et présente donc un inconvénient bien connu : la diffusion numérique. Afin de limiter cette diffusion au voisinage des chocs, une méthode de limitation de pente MUSCL sur un maillage composite est implémentée.

Soit Ω_h^k une grille composite et S_h^k un vecteur de saturation sur cette grille à l'instant t_k . On va décrire brièvement le schéma MUSCL pour la maille représentée sur la figure 6.

• **Schéma MUSCL.** L'idée de base est de considérer des solutions approchées affines par maille. Des méthodes de limitation ont été introduites par Van Leer dans une série de papier ([84], [83],...) où il a développé le schéma MUSCL ('Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservations Laws').

En 2D et sur des grilles composites, il est difficile de mettre en place la méthode MUSCL telle est décrite sur un maillage uniforme. Ici, on décrit l'algorithme de limitation des gradients

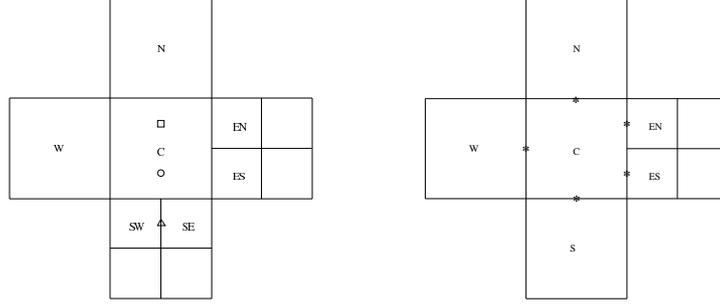


FIGURE 6. Grille générique composite avec deux niveaux de raffinement pour l'équation elliptique (gauche), pour l'équation hyperbolique (droite), (*) représente les points où la solution construite affine par morceaux ne crée pas d'extrema locaux par le schéma MUSCL.

sur une grille composite. Soit $\{S_C^k\}_C$ un vecteur donné sur une grille composite Ω_h^k à l'instant t^k . On considère la solution affine par morceaux :

$$\tilde{S}_X^k = S_C^k + Q_C^k \cdot \overrightarrow{CX},$$

où Q_C^k est une approximation du gradient sur la cellule C basée sur les données $\{S_V^k\}_V$, où V désigne un voisin de C . Dans la situation de la figure 6, un choix naturel est de prendre $Q_C^k = (A_C^k, B_C^k)$ avec

$$A_C^k = \frac{\frac{S_{EN}^k + S_{ES}^k}{2} - S_W^k}{\frac{7}{4}h}, \quad B_C^k = \frac{S_N^k - S_S^k}{2h}.$$

Ensuite, Le gradient Q_C^k est limité par un coefficient γ_C^k avec $0 \leq \gamma_C^k \leq 1$ de telle sorte que les saturations aux interfaces ne créent pas d'extrema locaux par rapport aux saturations des mailles voisines. Le schéma MUSCL dans la situation de la figure 6 s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{S_C^{k+1} - S_C^k}{\Delta t} &+ v_s^+ \frac{f(S_C^k + \frac{h}{2}\gamma_C^k B_C^k) - f(S_S^k + \frac{h}{2}\gamma_S^k B_S^k)}{h} \\ &+ v_n^- \frac{f(S_N^k - \frac{h}{2}\gamma_N^k B_N^k) - f(S_C^k - \frac{h}{2}\gamma_C^k B_C^k)}{h} \\ &+ u_w^+ \frac{f(S_C^k + \frac{h}{2}\gamma_C^k A_C^k) - f(S_W^k + \frac{h}{2}\gamma_W^k A_W^k)}{h} \\ &+ \frac{1}{2}u_{en}^- \frac{f(S_{EN}^k - \frac{h}{4}\gamma_{EN}^k A_{EN}^k) - f(S_C^k - \frac{h}{4}\gamma_C^k A_C^k + \frac{h}{4}\gamma_C^k B_C^k)}{\frac{3}{4}h} \\ &+ \frac{1}{2}u_{es}^- \frac{f(S_{ES}^k - \frac{h}{4}\gamma_{ES}^k A_{ES}^k) - f(S_C^k - \frac{h}{4}\gamma_C^k A_C^k - \frac{h}{4}\gamma_C^k B_C^k)}{\frac{3}{4}h} = 0. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Même si le schéma (1.73) demeure d'ordre un sur une grille composite, les résultats numériques montrent que ce schéma diminue considérablement la diffusion numérique par rapport au schéma UPWIND obtenu pour $\gamma = 0$.

1.3.4. Algorithme pour le problème diphasique par maillage adaptative. — Soit Ω_H une grille grossière fixe, $\Omega_{h_l}^k$ une grille composite au temps t^k , ($h_l = H/2^{l-1}$) est le pas de discrétisation au niveau l , et $(P_{h_l}^k, S_{h_l}^k)$ sont des vecteurs donnés sur cette grille. Le but est de construire une nouvelle grille $\Omega_{h_l}^{k+1}$ au temps t^{k+1} et la solution correspondante $(P_{h_l}^{k+1}, S_{h_l}^{k+1})$.

Pour passer l'information d'une grille composite à une autre, on note par $I_{\Omega_h}^{\Omega_{h'}}$ un opérateur d'interpolation de la grille Ω_h à $\Omega_{h'}$.

Les grilles composites $\Omega_{h_j}^{k+1}$ pour $j = 1, \dots, l$ sont contruites successivement selon l'algorithme suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_{h_j}^k = I_{\Omega_{h_l}^k}^{\Omega_{h_j}^{k+1}} S_{h_l}^k \\ -div(M(\hat{S}_{h_j}^k) \nabla P_{h_j}^{k+1}) = 0 \\ \mathbf{V}_{h_j}^{k+1} = -M(\hat{S}_{h_j}^k) \nabla P_{h_j}^{k+1} \\ \frac{S_{h_j}^{k+1} - \hat{S}_{h_j}^k}{\Delta t} + \mathbf{V}_{h_j}^{k+1} \cdot \nabla f(\hat{S}_{h_j}^k) = 0. \end{array} \right. \quad (1.74)$$

L'avantage de cet algorithme est de pouvoir traiter des problèmes complexes. La construction successive des grilles composites permet de localiser de façon très précise le front.

• **Récupération secondaire du pétrole.** On considère un milieu poreux rectangulaire et initialement saturé en huile. L'eau est injectée à une pression donnée par le haut du coté ouest et une pression de production est imposée en bas du coté Est, le reste du bord est considéré imperméable (voir Table 1.3.4). La grille grossière est 10×5 mailles et le niveau de

Perméabilité	$k_x = 10^{-13} m^2, k_y = 10^{-13} m^2$
Porosité	$\phi = 0.206$
Viscosités	$\mu_w = 1.0 \times 10^{-3} pa.s; \mu_o = 4.0 \times 10^{-3} pa.s$
Perméabilité relative	$k_w = S^2; k_o = (1 - S)^2;$
Pression d'injection	1500 kpa
Pression de production	1000 kpa

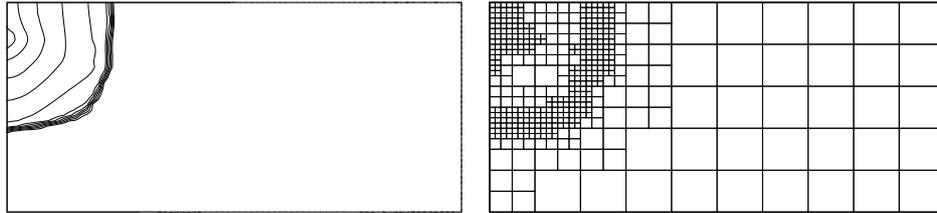
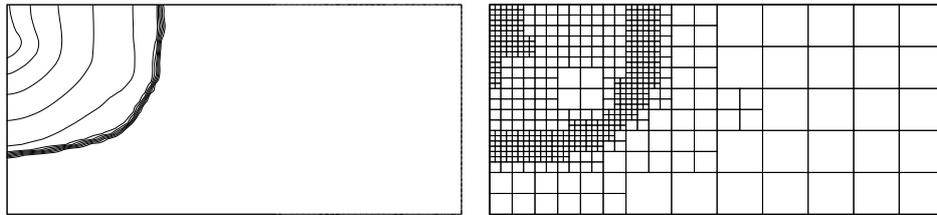
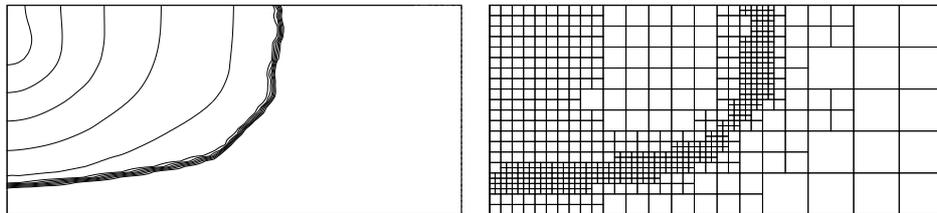
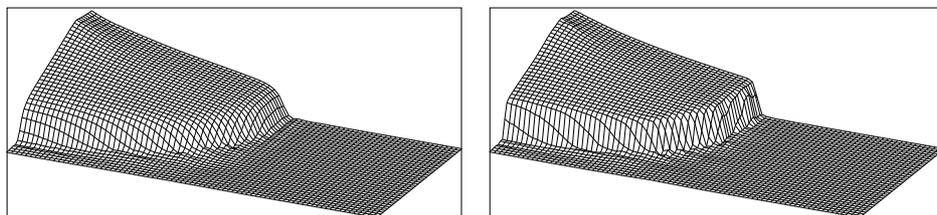
TABLE 1. Données

raffinement est 4. Sur les figures 7–9, la localisation des zones raffinés correspond à l'évolution du front. La performance de la méthode adaptative est illustrée dans le tableau 2.

Sur la figure 10, on note que l'interface eau-huile est mieux capturé par le schéma MUSCL par rapport au schéma upwind.

Temps	Nombre de mailles		Temps CPU	
	Composite	Régulier	Composite	Régulier
20.0	359	80×40	0.93	28.00
30.0	434	80×40	1.74	29.12
50.0	545	80×40	2.46	30.55
70.0	584	80×40	2.52	31.43
100.0	674	80×40	4.21	31.77

TABLE 2. Comparaison CPU : maillage composite, maillage régulier

FIGURE 7. Contours de la saturation et maillage composite, $t = 30$ jours, nombre de cellules = 434FIGURE 8. Contours de la saturation et maillage composite, $t = 50$ jours, nombre de cellules = 545FIGURE 9. Contours de la saturation et maillage composite, $t = 100$ jours, nombre de cellules = 674FIGURE 10. Comparaison entre le schéma upwind (gauche) et le schéma MUSCL (droite) sur une grille composite, $t = 80$ jours

1.4. Ecoulement triphasique compressible [A12]

Ce travail a été réalisé suite à ma thèse [T] en généralisant l'algorithme proposé, pour la résolution des systèmes modélisant des écoulements triphasiques compressibles, à la dimension deux d'espace.

On s'intéresse à la simulation numérique de la méthode de récupération secondaire du pétrole d'un gisement constitué d'un seul type de roche caractérisé par la porosité, le tenseur de perméabilité intrinsèque, les pressions capillaires et les perméabilités relatives.

On désigne par $\Omega = [0, L] \times [0, l]$ le domaine d'étude du phénomène, de frontière $\Gamma = \Gamma_e \cup \Gamma_i \cup \Gamma_s$, avec Γ_e la frontière d'injection de l'eau, Γ_s la frontière de récupération et Γ_i la frontière impénétrable.

On note par w la phase eau, o la phase huile, g la phase gaz, s_η la saturation de la phase η , ϕ la porosité, \mathbf{K} le tenseur de perméabilité intrinsèque, $k_\eta(s_w, s_o)$ la perméabilité relative de la phase, p_η la pression de la phase, μ_η la viscosité de la phase, ρ_η la masse volumique de la phase, \mathbf{g} le vecteur accélération de la pesanteur, $p_{cw} = p_{cw}(s_w)$ la pression capillaire de l'eau par rapport à celle de l'huile et $p_{cg} = p_{cg}(s_g)$ la pression capillaire du gaz par rapport à celle de l'huile.

On suppose que les phases eau et huile sont incompressibles tandis que la phase gaz est compressible suivant la loi d'état affine

$$\rho_g = \rho_g^0(1 + c_0(p_g - p_g^0)). \quad (1.75)$$

Les équations modélisant le déplacement des écoulements triphasiques sont les lois de conservation de la masse pour chaque phase :

$$\begin{cases} \phi \partial_t s_w + \operatorname{div}(\mathbf{V}_w) = 0 \\ \phi \partial_t s_o + \operatorname{div}(\mathbf{V}_o) = 0 \\ \phi \partial_t (\rho_g s_g) + \operatorname{div}(\rho_g \mathbf{V}_g) = 0 \end{cases} \quad (1.76)$$

On a de plus

$$s_w + s_o + s_g = 1 \quad (1.77)$$

La loi de Darcy traduit la conservation de la quantité de mouvement :

$$\mathbf{V}_\eta = -\mathbf{K} \frac{k_\eta}{\mu_\eta} (\nabla p_\eta - \rho_\eta \mathbf{g}), \quad \eta = w, o, g. \quad (1.78)$$

Enfin, La courbure de la surface de contact entre deux fluides entraîne une différence de pression appelé pression capillaire. On définit alors deux pressions capillaires

$$p_{cw}(s_w) = p_w - p_o, \quad p_{cg}(s_g) = p_g - p_o \quad (1.79)$$

On choisit s_w , s_o et p_g les trois variables indépendantes du problème. On décrit d'abord une formulation mathématique permettant de mettre en évidence une partie hyperbolique et une partie d'ordre deux dans le système (1.76).

Pour cela on introduit les notations suivantes : $\mathbf{s} = (s_w, s_o)$, $M_\eta = \frac{k_\eta}{\mu_\eta}$ la mobilité de la phase η , $M = M_w + M_o + M_g$ la mobilité totale, $\nu_\eta = \frac{M_\eta}{M}$ la fraction des flux de la phase, $\mathbf{V}_T = \mathbf{V}_w + \mathbf{V}_o + \mathbf{V}_g$ la vitesse totale. On exprime à présent la vitesse totale en fonction de

p_g , p_{cw} et p_{cg} , il vient

$$\mathbf{V}_T = -\mathbf{KM}\nabla p_g - \mathbf{KM}\nu_w\nabla p_{cw} + \mathbf{KM}(1 - \nu_g)\nabla p_{cg} + KM(\nu_w\rho_w + \nu_o\rho_o + \nu_g\rho_g)\mathbf{g} \quad (1.80)$$

ainsi les vitesses des trois phases s'écrivent

$$\begin{cases} \mathbf{V}_w = \nu_w\mathbf{V}_T - \mathbf{KM}\nu_w[(1 - \nu_w)\nabla p_{cw} - \nu_g\nabla p_{cg} + (\nu_o(\rho_o - \rho_w) + \nu_g(\rho_g - \rho_w))\mathbf{g}] \\ \mathbf{V}_o = \nu_o\mathbf{V}_T - \mathbf{KM}\nu_o[\nu_w\nabla p_{cw} - \nu_g\nabla p_{cg} + (\nu_w(\rho_w - \rho_o) + \nu_g(\rho_g - \rho_o))\mathbf{g}] \\ \mathbf{V}_g = \nu_g\mathbf{V}_T - \mathbf{KM}\nu_g[(1 - \nu_g)\nabla p_{cg} - \nu_w\nabla p_{cw} + (\nu_w(\rho_w - \rho_g) + \nu_o(\rho_o - \rho_g))\mathbf{g}] \end{cases} \quad (1.81)$$

Enfin, le système (1.76) s'écrit de manière équivalente

$$\begin{cases} \phi\partial_t s_w + \operatorname{div}(\nu_w\mathbf{V}_T) + \operatorname{div}(\mathbf{G}_w(\mathbf{s}, p_g)\mathbf{g}) + \operatorname{div}(\mathbf{D}_w(\mathbf{s})\nabla\mathbf{s}) = 0 \\ \phi\partial_t s_o + \operatorname{div}(\nu_o\mathbf{V}_T) + \operatorname{div}(\mathbf{G}_o(\mathbf{s}, p_g)\mathbf{g}) + \operatorname{div}(\mathbf{D}_o(\mathbf{s})\nabla\mathbf{s}) = 0 \\ \phi\partial_t(\rho_g s_g) + \operatorname{div}(\rho_g\nu_g\mathbf{V}_T) + \operatorname{div}(\rho_g\mathbf{G}_g(\mathbf{s}, p_g)\mathbf{g}) + \operatorname{div}(\rho_g\mathbf{D}_g(\mathbf{s})\nabla\mathbf{s}) = 0 \end{cases} \quad (1.82)$$

Le système (1.82) est composé de deux parties modélisant deux phénomènes différents. Le premier correspond au transport sous l'action de l'injection des fluides à une pression donnée ou à un débit donné et des termes gravitationnels, le deuxième correspond à la diffusion sous l'effet des termes capillaires. Afin de prendre en compte aussi précisément que possible ces deux phénomènes, une méthode de pas fractionnaires est utilisée.

Algorithme proposé. On cherche à calculer $\mathbf{U} = (s_w, s_o, p_g)$ solution approchée du système (1.82). La méthode de pas fractionnaire employée ici est une méthode à deux pas. Dans un premier temps, on cherche $\mathbf{U} = (s_w, s_o, \rho_g s_g)$ solution approchée de la partie correspondant au transport, puis on cherche \mathbf{W} solution approchée de la partie correspondant à la diffusion. Plus précisément, la méthode de pas fractionnaires s'écrit :

Etape 1. Etant donné $\mathbf{U}^n = (s_w^n, s_o^n, p_g^n)$, on cherche $\mathbf{U}^{n+\frac{1}{2}} = (s_w^{n+\frac{1}{2}}, s_o^{n+\frac{1}{2}}, (\rho_g s_g)^{n+\frac{1}{2}})$ solution approchée de :

$$\phi\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{V}_T \cdot \nabla \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \partial_y \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \phi\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{V}_T \cdot \mathbf{A}(\mathbf{U})\nabla \mathbf{U} + \mathbf{B}(\mathbf{U})\partial_y \mathbf{U} = 0 \quad (1.83)$$

où

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = (\nu_w(\mathbf{s}), \nu_o(\mathbf{s}), \theta_g h_1(\mathbf{s})) \quad (1.84)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}) = k_{yy}|\mathbf{g}| \begin{pmatrix} -M\nu_w\nu_o(\rho_o - \rho_w) - M\nu_w\theta_g h_1 + M\nu_w M\nu_g \rho_w \\ -M\nu_o\nu_w(\rho_w - \rho_o) - M\nu_o\theta_g h_1 + M\nu_o\nu_g \rho_o \\ -M\nu_w\theta_g h_1 \rho_w + M\nu_w\theta_g^2 h_2 - M\nu_o\theta_g h_1 \rho_o + M\nu_o\theta_g^2 h_2 \end{pmatrix} \quad (1.85)$$

avec $\mathbf{A} = \partial_U \mathbf{F}$, $\mathbf{B} = \partial_U \mathbf{G}$, $h_1(\mathbf{s}) = \frac{\nu_g(\mathbf{s})}{s_g}$; $h_2(\mathbf{s}) = \frac{\nu_g(\mathbf{s})}{s_g^2}$. Cette formulation est devenue possible car les fonctions h_1 et h_2 sont C^1 .

Le schéma anti-diffusivé de Harten [62] est mis en place pour approcher les solutions de ce système hyperbolique. Ce schéma est une extension du schéma de Roe [76] à l'ordre deux dans les zones régulières. Le schéma de Harten utilise de façon essentielle la matrice de Roe. On montre tout d'abord dès que les flux s'écrivent comme quotient de deux fonctions polynomiales que l'on peut toujours construire une matrice de Roe, ce résultat généralise celui de Vila ([85]–[86]). On montre ensuite que les valeurs propres de la matrice de Roe associées à $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ sont positives dans le cas de perméabilités quadratiques.

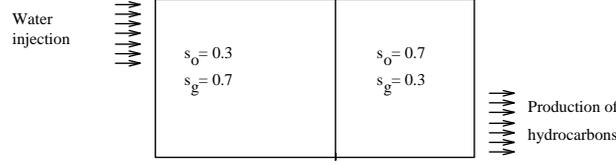


FIGURE 11. Conditions initiales et conditions aux limites

Etape 2. Etant donné $\mathbf{U}^{n+\frac{1}{2}}$, on cherche \mathbf{U}^{n+1} solution approchée de

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi s_{gij}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\rho_{gij}^{n+1} - \rho_{gij}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \rho_{gij}^{n+1} (\text{div} \mathbf{V}_T^{n+1})_{ij} \\ \quad + \rho_{gij}^{n+1} (\text{div}((1 - \rho_g^{n+1})(\mathbf{D}_w^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{D}_o^{n+\frac{1}{2}}) \nabla \mathbf{s}^{n+1}))_{ij} = 0 \\ \phi \frac{s_{w_{ij}}^{n+1} - s_{w_{ij}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \nu_{w_{ij}}^{n+\frac{1}{2}} (\text{div} \mathbf{V}_T^{n+1})_{ij} + (\text{div}(\mathbf{D}_w^{n+\frac{1}{2}} \nabla \mathbf{s}^{n+1}))_{ij} = 0 \\ \phi \frac{s_{o_{ij}}^{n+1} - s_{o_{ij}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \nu_{o_{ij}}^{n+\frac{1}{2}} (\text{div} \mathbf{V}_T^{n+1})_{ij} + (\text{div}(\mathbf{D}_o^{n+\frac{1}{2}} \nabla \mathbf{s}^{n+1}))_{ij} = 0 \end{array} \right. \quad (1.86)$$

avec

$$\mathbf{V}_T^{n+1} = -\mathbf{KM}(\mathbf{s}^{n+\frac{1}{2}}) \nabla p_g^{n+1} + \mathbf{D}_T(\mathbf{s}^{n+\frac{1}{2}}) \nabla \mathbf{s}^{n+1} + \mathbf{G}_T(\mathbf{s}^{n+\frac{1}{2}}, p_g^{n+1}) \mathbf{g}.$$

Il est à noter que la première équation du système (1.86) est une équation non dégénérée en pression et permet de calculer un champs de pression globale indépendamment des régions où l'une des phases est absente. Cette équation est obtenue en tenant compte des équations de l'eau et de l'huile. Ensuite la discrétisation en espace s'effectuent via une méthode de différences finies classique. Enfin, le système discrétisé est résolu par une méthode de Newton couplée à la méthode de bi-gradient préconditionné.

1.4.1. Resultats numériques. — On présente deux comparaisons : la première entre les écoulements compressibles et incompressibles sans pression capillaire et la seconde montre les effets de la diffusion capillaire pour un écoulement compressible.

★ *Comparaison compressible—incompressible sans pression capillaire.*

Les données sont

$$\begin{aligned} k_\eta &= s_\eta^2, \quad \mathbf{K} = 0.01510^{-12} \text{m}^2, \quad \phi = 0.206, \\ \mu_w &= 10^{-3} \text{ Pa.s}, \quad \mu_o = 4.10^{-3} \text{ Pa.s}, \quad \mu_g = 0.08 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}, \\ \rho_g &= \rho_g^0 (1 + c_0(p_g - p_g^0)), \quad \text{avec } c_0 = 0.5 \text{ atm}^{-1}, p_g^0 = 1 \text{ atm} \end{aligned}$$

avec les conditions initiales et les conditions aux limites comme sur la figure 11.

Sur les figures 12, 13, 14 les solutions sont calculées sur une grille 40×20 mailles et en utilisant le schéma de Harten. La variation de la densité, dans le cas compressible a pour effet de confiner les fronts des saturations. En effet, dans la région où la phase eau est injectée la pression est importante ainsi le gaz est compressé et ceci le rend moins mobile ce qui freine le déplacement des autres phases.

L'algorithme proposé est non conservatif et afin de vérifier la conservation de la masse de chaque phase, on calcule la masse au cours du temps. Sur la figure 16 la conservation de la masse de chaque phase est comparée à zéro sauf pour la phase eau où nous avons supprimé la contribution du côté de production afin d'indiquer le temps de percé de la phase eau.

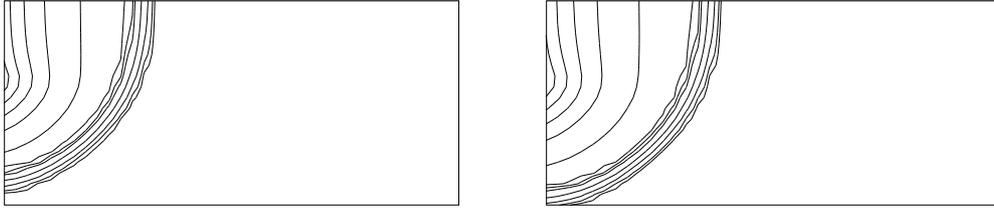


FIGURE 12. Eau à T=20 jours avec $\Delta x = \Delta y = 0.05$. Compressible (gauche) et incompressible (droite)

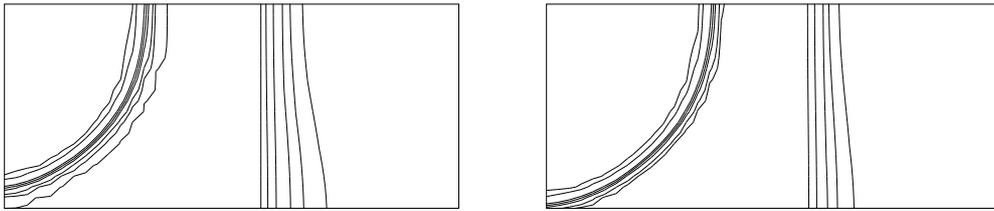


FIGURE 13. Gaz à T=20 jours avec $\Delta x = \Delta y = 0.05$. Compressible (gauche) et incompressible (droite)

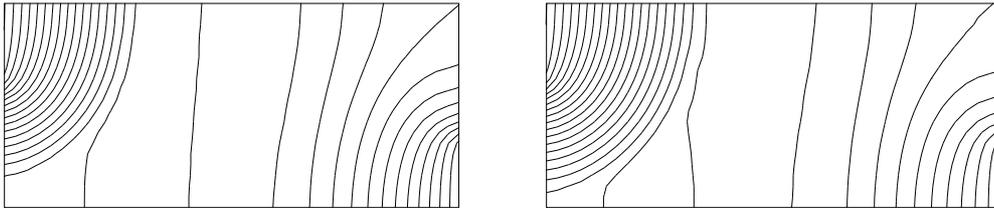


FIGURE 14. Pression à T=20 jours avec $\Delta x = \Delta y = 0.05$. Compressible (gauche) et incompressible (droite)

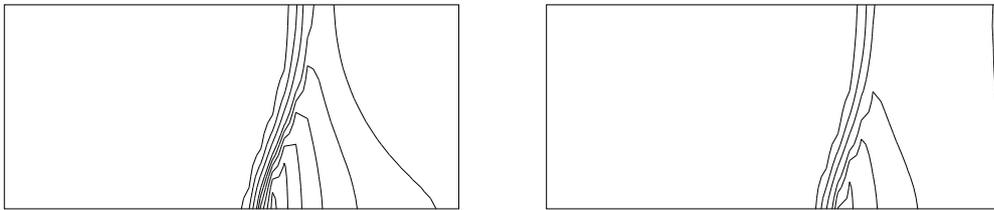


FIGURE 15. Gaz à T=60 jours avec $\Delta x = \Delta y = 0.05$. Compressible (gauche) et incompressible (droite)

★ *Influence des termes capillaires.*

les données sont

$$k_\eta = s_\eta^2, \mathbf{K} = 2.10^{-12} \text{m}^2, \phi = 0.4,$$

$$\mu_w = 10^{-3} \text{ Pa.s}, \mu_o = 4.10^{-3} \text{ Pa.s}, \mu_g = 0.08 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s},$$

$$\rho_g = \rho_g^0 (1 + c_0(p_g - p_g^0)), \text{ avec } c_0 = 0.5 \text{ atm}^{-1}, p_g^0 = 1 \text{ atm}$$

$$p_{cw} = p_{cwm}(s_w - 1), p_{cg} = p_{cgm}s_g, \text{ avec } p_{cwm} = 0.2 \text{ atm}, p_{cwg} = 0.05 \text{ atm}$$

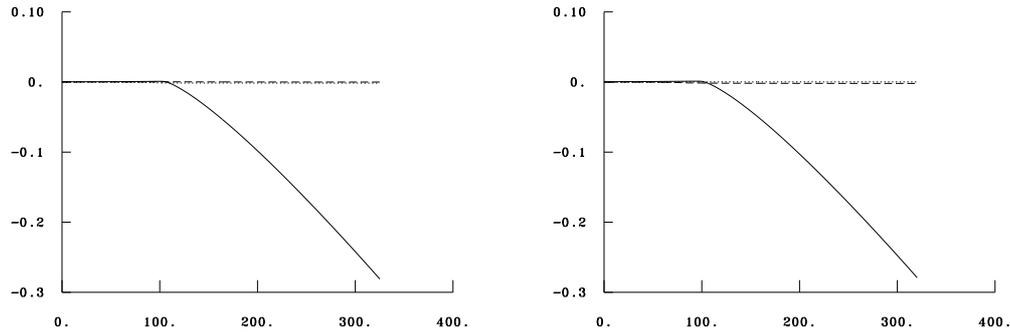


FIGURE 16. Conservation de la masse au cours du temps pour les trois phases. (... huile, - - - gaz, — eau) écoulement compressible (gauche) et incompressible (droite). Le temps de percé de l'eau est de 112 jours

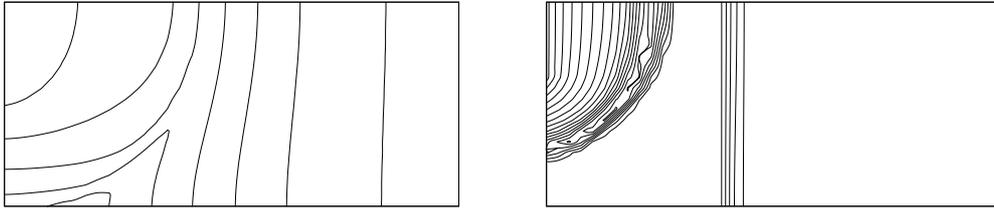


FIGURE 17. Huile à T=10 jours avec $\Delta x = \Delta y = 0.05$ pour un écoulement compressible avec pressions capillaires (gauche) et sans effet capillaire (droite)

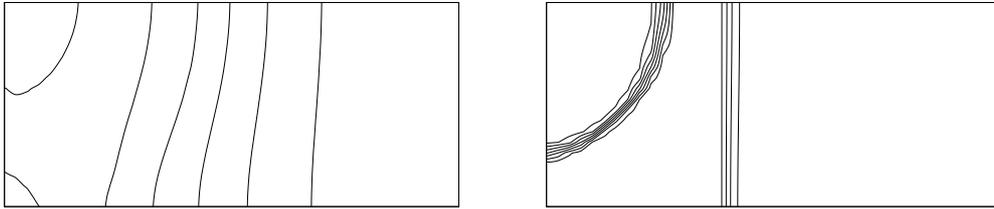


FIGURE 18. Gaz à T=10 jours avec $\Delta x = \Delta y = 0.05$ pour un écoulement compressible avec pressions capillaires (gauche) et sans effet capillaire (droite)

Les conditions initiales sont $(s_o, s_g) = (0.6, 0.4)$ dans la région $x < 3$ et $(s_o, s_g) = (0.4, 0.6)$ dans la région $x > 3$. Ensuite, l'eau est injectée dans la région $(3 \leq y \leq 5)$ avec un débit constant égale à 2 cm/jour. Le bord droit pour $(0 \leq y \leq 2)$ est un bord de récupération à la pression atmosphérique et le reste du bord est impérméable. Les Figures 17–19 montrent les effets diffusifs dus aux pressions capillaires notamment la dissipation du choc présent dans le cas du transport. Sur la figure 20 la propriété de conservation pour chaque phase est montrée, on remarque aussi que le temps de percé de la phase eau en tenant compte des effets capillaires est nettement plus précoce par rapport à celui où ces termes sont négligés.

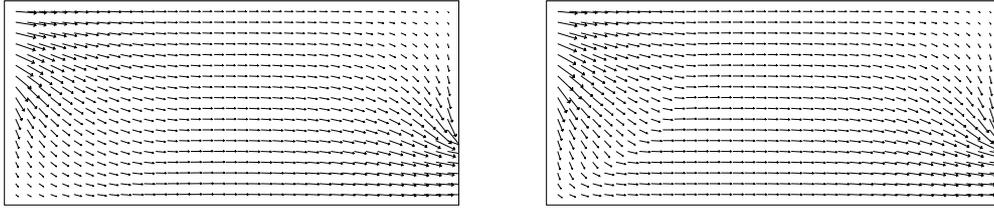


FIGURE 19. La vitesse totale à $T=10$ jours avec $\Delta x = \Delta y = 0.05$ pour un écoulement compressible avec pressions capillaires (gauche) et sans effet capillaire (droite)

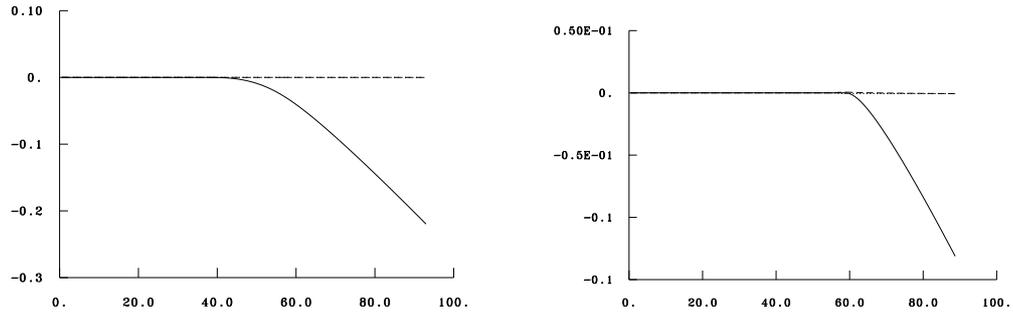


FIGURE 20. Conservation de la masse pour chaque phase avec pressions capillaires (gauche), sans pression capillaire (droite)

CHAPITRE 2

LA CAVITÉ ENTRAINÉE ET LA CAVITÉ CHAUFFÉE

Dans ce chapitre, on présente des simulations numériques de la cavité entraînée et de la cavité différentiellement chauffée en 2D.

2.1. Cavité entraînée [A7]

Le problème de la cavité entraînée est un problème classique en mécanique des fluides. Son étude remonte aux travaux pionniers de Ghia et al. [47], Schreiber et al. [78] sur l'étude des problèmes stationnaires. Ces résultats ont été confirmés par de nombreux auteurs pour $Re = 1000$. Néanmoins, on retrouve différents résultats concernant la première bifurcation de Hopf et le comportement des solutions autour du Reynolds critique et pour des grands nombres de Reynolds. En 1990, dans [21], il a été suggéré que la première bifurcation de Hopf est située autour de $Re = 7500$. Depuis, différents travaux ont situé ce Reynolds critique autour de $Re = 8000$ dans [36], [8] ou [77], tandis que d'autres travaux localisent ce nombre autour de $Re = 10000$ ou même $Re = 30000$ [42].

Le but de ce travail est d'apporter une réponse à cette question et de donner des résultats précis (Benchmark) pour des $Re \leq 10000$.

Equations de Navier-Stokes. Soit $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ désignant la cavité et $T > 0$. Les équations de Navier-Stokes régissant l'évolution d'un fluide incompressible et traduisant la conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{cases} \partial_t U - \frac{1}{Re} \Delta U + (U \cdot \nabla)U + \nabla p = 0 & \text{dans }]0, T[\times \Omega \\ \nabla \cdot U = 0 & \text{dans }]0, T[\times \Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

avec les conditions aux limites

$$U(t, x, y) = (-1, 0) \text{ sur }]0, T[\times \Gamma_1; \quad U(t, x, y) = (0, 0) \text{ sur }]0, T[\times \Gamma_0,$$

et la condition initiale suivante $U(0, x, y) = U_0(x, y)$ dans Ω .

Ici, $U = (u, v)$ et p désignent respectivement la vitesse et la pression, Γ_1 représente le bord supérieur, Γ_0 la réunion des trois bords restant et U_0 la condition initiale.

Semi-discrétisation en temps. Le système d'équations (2.1) est discrétisé soit par le schéma d'Euler d'ordre un en temps ou le schéma de Gear d'ordre deux en temps. Les termes linéaires sont traités implicitement tandis que les termes de convection sont traités sous forme

explicite. On note par U^n une approximation de U au temps $t_n = n\delta t$ avec $n \in \mathbb{N}$ et δt le pas de temps. Plus précisément, le schéma d'Euler s'écrit

$$\begin{cases} \frac{U^n}{\delta t} - \frac{1}{Re}\Delta U^n + \nabla p^n &= \frac{U^{n-1}}{\delta t} - (U^{n-1} \cdot \nabla)U^{n-1}, \\ \nabla \cdot U^n &= 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

et le schéma de Gear s'écrit

$$\begin{cases} \frac{3U^n}{2\delta t} - \frac{1}{Re}\Delta U^n + \nabla p^n &= \frac{2U^{n-1}}{\delta t} - 2(U^{n-1} \cdot \nabla)U^{n-1} - \frac{U^{n-2}}{2\delta t} + (U^{n-2} \cdot \nabla)U^{n-2}, \\ \nabla \cdot U^n &= 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Discretisation en espace. Le système d'équations (2.2) ou (2.3) est discrétisé en espace par différences finies sur une grille uniforme G_h de pas $h = \delta x = \delta y$ dans chaque direction. La pression est alors approchée au centre de chaque maille tandis que la vitesse est approchée aux interfaces des mailles (figure 1).

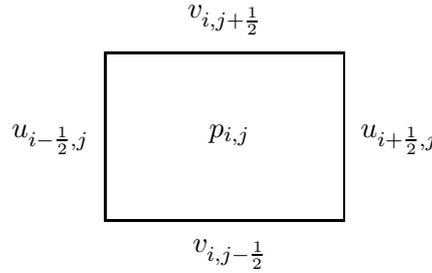


FIGURE 1. Maille générique et localisation des inconnues

Un schéma centré d'ordre deux en espace est utilisé pour approcher le terme à gauche des équations (2.2) ou (2.3). Par exemple, la quantité $\frac{u^n}{\delta t} - \frac{1}{Re}\Delta u^n + \partial_x p^n$ est approchée au point générique $(i - \frac{1}{2}, j)$ par

$$\frac{u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\delta t} - \frac{1}{Re} \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^n - 2u_{i-\frac{1}{2},j}^n + u_{i-\frac{3}{2},j}^n}{\delta x^2} + \frac{u_{i-\frac{1}{2},j+1}^n - 2u_{i-\frac{1}{2},j}^n + u_{i-\frac{1}{2},j-1}^n}{\delta y^2} \right) + \frac{p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n}{\delta x}.$$

L'équation d'incompressibilité est approchée au point de la pression (i, j) par

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^n - u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - v_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\delta y} = 0.$$

Pour approcher les termes de convection on propose un nouveau schéma d'ordre trois en espace basé sur le décentrage amont des dérivées troisième. Par exemple, le terme convectif

$$u^{n-1}\partial_x u^{n-1} + v^{n-1}\partial_y u^{n-1}$$

est approché au point $(i - \frac{1}{2}, j)$ par

$$\begin{array}{l}
\frac{u_{i,j}^{n-1}}{3} \frac{\Delta_{i,j} u^{n-1}}{\delta x} + \frac{5u_{i-1,j}^{n-1}}{6} \frac{\Delta_{i-1,j} u^{n-1}}{\delta x} - \frac{u_{i-2,j}^{n-1}}{6} \frac{\Delta_{i-2,j} u^{n-1}}{\delta x} \\
\frac{u_{i-1,j}^{n-1}}{3} \frac{\Delta_{i-1,j} u^{n-1}}{\delta x} + \frac{5u_{i,j}^{n-1}}{6} \frac{\Delta_{i,j} u^{n-1}}{\delta x} - \frac{u_{i+1,j}^{n-1}}{6} \frac{\Delta_{i+1,j} u^{n-1}}{\delta x} \\
\frac{v_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n-1}}{3} \frac{\Delta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u^{n-1}}{\delta y} + \frac{5v_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{6} \frac{\Delta_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} u^{n-1}}{\delta y} - \frac{v_{i-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}}^{n-1}}{6} \frac{\Delta_{i-\frac{3}{2},j-\frac{3}{2}} u^{n-1}}{\delta y} \\
\frac{v_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{3} \frac{\Delta_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} u^{n-1}}{\delta y} + \frac{5v_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n-1}}{6} \frac{\Delta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u^{n-1}}{\delta y} - \frac{v_{i-\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}^{n-1}}{6} \frac{\Delta_{i-\frac{3}{2},j+\frac{3}{2}} u^{n-1}}{\delta y}
\end{array}
\begin{array}{l}
\text{si } u_{i-1,j}^{n-1} > 0 \\
\text{si } u_{i,j}^{n-1} < 0 \\
\text{si } v_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n-1} > 0 \\
\text{si } v_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n-1} < 0
\end{array}$$

avec $u_{i,j}^{n-1} = \frac{1}{2}(u_{i+\frac{1}{2},j}^{n-1} + u_{i-\frac{1}{2},j}^{n-1})$ et $v_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n-1} = \frac{1}{2}(v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-1} + v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{n-1})$ sont obtenues par interpolation linéaires, $\Delta_{i,j} u^{n-1} = (u_{i+\frac{1}{2},j}^{n-1} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{n-1})$ et $\Delta_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} u^{n-1} = (u_{i-\frac{1}{2},j+1}^{n-1} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{n-1})$.

Le système linéaire est résolu par une méthode multigrille utilisant une procédure de V-cycle. L'opérateur de lissage est celui de Gauss-Seidel par maille.

2.1.1. Résultats de Benchmark.— Re=1000. Récemment, une étude très précise de ce cas a été réalisée par Botella et al. [19] en utilisant une méthode spectrale avec collocation de Chebyshev. On compare nos résultats à ceux de [19] et d'autres travaux. Sur la figure 2, les isolignes en trait pleins sont considérées positives.

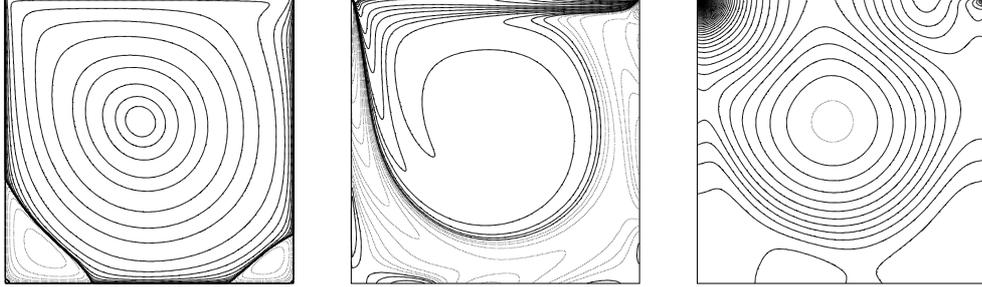


FIGURE 2. Solution stationnaire à $Re = 1000$ calculée sur une grille 1024×1024 . De gauche à droite : fonction courant, vorticité, pression.

Dans la table 1, on présente d'abord une première comparaison avec les résultats classiques de [47], [78] et [82] sur des grilles grossières ensuite aux résultats de [19] obtenus avec 160 polynômes de Chebyshev.

Re=5000. Pour ce nombre de Reynolds la solution est toujours stationnaire et il y a quelques comparaisons disponibles en littérature. Par contre, on ne dispose pas de résultats de benchmark précisés comme dans le cas précédent, pour cela on considère la solution obtenue sur une grille 2048×2048 comme solution de référence. Sur la figure 3, la solution exhibe un troisième vortex en haut à droite.

La comparaison avec les résultats de la littérature (table 2) est assez difficile parce que les résultats sont souvent présentés sur une seule grille. Néanmoins nos résultats sont cohérents avec ceux de [47], [70], [56] et [48].

Schéma	Grille	ψ_{max}	ω	x	y
Présent	128×128	0.11786	2.0508	0.46875	0.5625
Ghia [47]	128×128	0.117929	2.04968	0.4687	0.5625
Schreiber [78]	140×140	0.11603	2.026	0.47143	0.56429
Vanka [82]	320×320	0.1173	–	0.4562	0.5625
Présent	1024×1024	0.11892	2.0674	0.46875	0.56543
Botella [19]	N = 160	0.1189366	2.067753	0.4692	0.5652
Schéma	Grille	ψ_{min}	ω	x	y
Présent	128×128	-1.7003×10^{-3}	-1.1304	0.14063	0.10938
Ghia [47]	128×128	-1.75102×10^{-3}	-1.15465	0.14062	0.1094
Schreiber [78]	140×140	-1.700×10^{-3}	-0.999	0.13571	0.10714
Vanka [82]	320×320	-1.74×10^{-3}	–	0.1375	0.1063
Présent	1024×1024	-1.7292×10^{-3}	-1.1120	0.13672	0.11230
Botella [19]	N = 160	-1.729717×10^{-3}	-1.109789	0.13602	0.1118

TABLE 1. Comparaison avec différents travaux sur le vortex primaire et sur le vortex secondaire dans le coin en bas à gauche à $Re = 1000$.

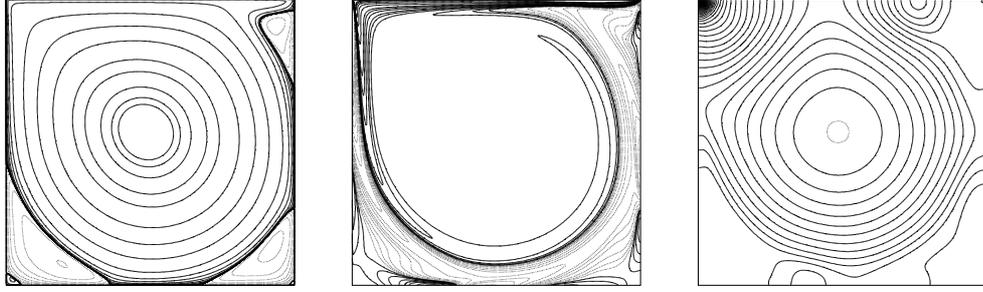


FIGURE 3. Solution stationnaire à $Re = 5000$ calculée sur une grille 2048×2048 . De gauche à droite : fonction courant, vortocité, pression.

Schéma	Grille	ψ_{max}	ω	x	y
Présent	256×256	0.12064	1.9125	0.48438	0.53516
Ghia [47]	256×256	0.118966	1.86016	0.4883	0.5352
Huser [42]	80×80 stretched	0.1219	2.001	–	–
Kim-Moin [55]	96×96 stretched	0.112	1.812	–	–
Goodrich [48]	256×256	0.118	–	0.48438	0.53516
Vanka [82]	160×160	0.0920	–	0.4875	0.5313
Pan-Glowinski [70]	256×256	0.121218	–	0.4844	0.5352
Kupperman [56]	128×128	0.12216	–	–	–
Present (référence)	2048×2048	0.12197	1.9327	0.48535	0.53516
Schéma	Grille	ψ_{min}	ω	x	y
Présent	256×256	-3.0348×10^{-3}	-2.6330	0.19141	0.074219
Ghia [47]	256×256	-3.0835×10^{-3}	-2.66354	0.1914	0.07422
Goodrich [48]	256×256	-3.13×10^{-3}	–	0.1953	0.07422
Vanka [82]	160×160	-5.49×10^{-3}	–	0.15	0.0813
Present (référence)	2048×2048	-3.0706×10^{-3}	-2.7244	0.19434	0.073242

TABLE 2. Comparaison des différents travaux sur la on the primary vortex and on the lower left secondary vortex at $Re = 5000$.

2.1.2. Stabilité linéaire. — On veut savoir aussi précisément que possible quand une solution stationnaire perd sa stabilité en faveur d'une solution périodique. Comme on s'intéresse ici uniquement à la première bifurcation de Hopf, on propose alors de calculer le premier exposant de Lyapunov du problème linéarisé. Soit (V, q) une petite perturbation ajoutée à la solution stationnaire (U_S, p_S) du système (2.1). La stabilité consiste à regarder le comportement asymptotique de la perturbation au cours du temps. Ce comportement est régi par la valeur propre de plus petite partie réelle de l'opérateur linéarisé. Si la solution stationnaire est stable alors la perturbation tend vers zéro quand t vers l'infinie comme $e^{\mu_1 t}$ où μ_1 est le premier exposant de Lyapunov [7] :

$$\mu_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log}\|V(t)\|}{t}.$$

Soit (U_S, p_S) une solution stationnaire, alors on résout le problème linéarisé :

$$\begin{aligned} \partial_t V - \frac{1}{Re} \Delta V + (U_S \cdot \nabla) V + (V \cdot \nabla) U_S + \nabla q &= 0 & \text{dans } & \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot V &= 0 & \text{in } & \Omega \times (0, T) \\ V &= V_0 & \text{dans } & \Omega \\ V &= 0 & \text{sur } & \partial\Omega \times (0, T) \end{aligned} \quad (2.4)$$

où le terme non linéaire $(V \cdot \nabla)V$ est négligé. Le problème (2.4) est approché de la même manière que le problème (2.1). La seule difficulté est que la solution numérique V^n à l'instant $n\delta t$ devient très petite pour n grand. Ainsi, la solution est normalisée à chaque itération en considérant $V_0^n = V^n / \|V^{n-1}\|$ et alors l'exposant de Lyapunov est approché par

$$\mu_1^n = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \text{Log}\|V_0^i\|}{n\delta t}.$$

Jusqu'au $Re = 8000$, on obtient une solution stationnaire sur la grille 256×256 comme sur les grilles plus fines. L'analyse de l'exposant de Lyapunov Table 3 montre que ces solutions stationnaires sont stables. Par contre pour $Re = 8050$ et sur la grille 512×512 ou sur des grilles plus fine la solution est périodique avec une fréquence $f = 0.45$ (voir figure 4). En résumé, on conclut que pour la cavité entraînée en 2D le nombre de Reynolds critique est $8000 \leq Re_c \leq 8050$ avec une tolérance de 1%.

Re	10	100	1000	5000	7800	8000
T	38	110	242	1386	2243	7442
μ_1	-5.2	-0.56	-0.076	-0.013	-0.0082	-0.0026

TABLE 3. Evolution de l'exposant de Lyapunov en fonction du nombre de Reynolds.

2.1.3. Solutions périodiques. — A $Re = 8100$ et $Re = 8200$, les solutions calculées sur une grille 512×512 avec le schéma de Gear en temps sont purement périodique avec une fréquence $f = 0.45$ comme le montre la figure 4. Pour ces nombres de Re la convergence de grille est assurée comme solution sur deux grilles consécutives 512×512 et 1024×1024 . De plus, cette fréquence est similaire à celle trouvée dans [36] pour $Re = 8000$, dans [8] pour $Re = 8018$ et dans [70] pour $Re = 8500$.

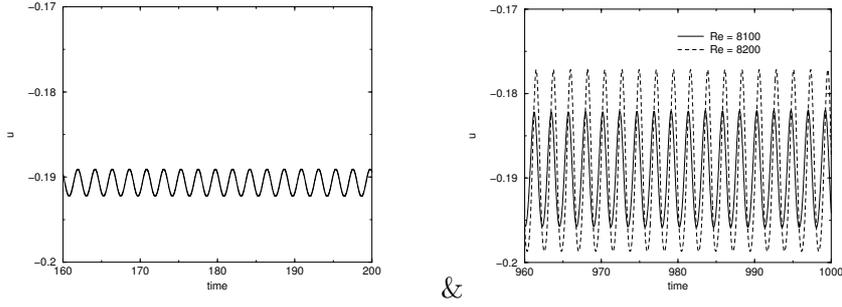


FIGURE 4. Signal de la composante horizontale de la vitesse au point $(14/16, 13/16)$ sur une grille 1024×1024 pour $Re = 8050$ (gauche), et pour $Re = 8100$ et $Re = 8200$ (droite).

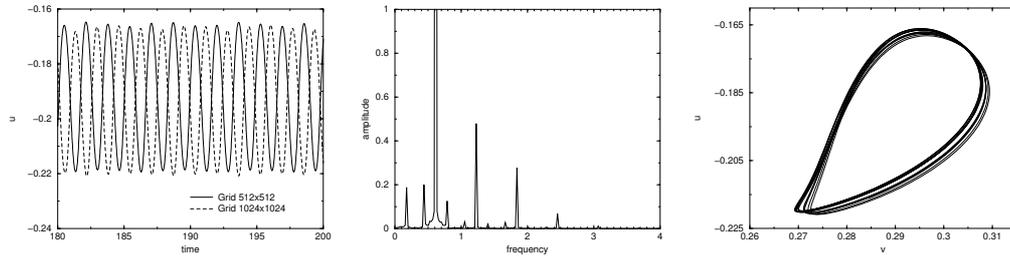


FIGURE 5. Signal de la composante horizontale de la vitesse (gauche), le spectre correspondant (milieu) et le portrait de phase au point $(14/16, 13/16)$ et pour $Re = 10000$.

Enfin, on s'intéresse à la solution à $Re = 10000$. Des travaux pionniers [47], [78] et même des travaux plus récents [42], [77], [87] confirment la stabilité des solutions jusqu'à cette valeur. Il est clair maintenant que la première bifurcation de Hopf se situent autour de $Re = 8000$. Plusieurs simulations numériques sur des grilles consécutives et pour des différentes conditions initiales montrent que la solution est essentiellement périodique. Les résultats sur les grilles 512×512 et 1024×1024 sont très similaires et donnent la même haute fréquence $f = 0.61$ (figure 5). Le signal de l'énergie cinétique est aussi périodique avec la même fréquence oscillant autour d'une valeur moyenne $E = 0.046$. L'analyse de Fourier et le portrait de phase montrent une petite variation de l'amplitude ce qui se traduit par la présence de basses fréquences $f_2 = 0.175$ et $f_3 = 0.4375$ (figure 5). Ces résultats sont similaires à ceux trouvés dans [8] pour $Re = 9765$ et dans [71] pour $Re = 10300$. Une simulation sur une grille fine 2048×2048 confirme ces résultats.

2.2. Convection naturelle dans une cavité chauffée [A6]

Ce travail a été motivé lors de la section 'Computational predictability of natural convection flows in enclosures' lors de conférence 'First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics [25]. Le but est de faire un benchmark autour de la convection naturelle dans une cavité chauffée de rapport 8. Le système couple l'équation de l'énergie écrite en terme de

température et les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \partial_t U - \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \Delta U + \nabla p &= -U \cdot \nabla U + e_y \theta && \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot U &= 0 && \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \partial_t \theta - \frac{1}{\sqrt{RaPr}} \Delta \theta &= -U \cdot \nabla \theta && \text{dans } \Omega \times (0, T) \end{aligned}$$

avec $\Omega = (0, L) \times (0, H)$ (le rapport $H/L = 8$) et le bord $\partial\Omega = \Gamma_{left} \cup \Gamma_{right} \cup \Gamma_{bottom} \cup \Gamma_{top}$. On rappelle que $U = (u, v)$, p et θ sont respectivement la vitesse, la pression et la température. Ici e_y est le vecteur unité dans la direction verticale. La cavité est remplie d'un fluide pour lequel le nombre de Prandtl Pr égale à 0.71 pour l'air. Le nombre de Rayleigh est $Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu\alpha}$ avec g la gravité, β le coefficient de l'expansion thermique, ΔT est la différence de température entre les murs chauds et froids, ν la viscosité cinématique et α le coefficient de diffusion thermique.

Le nombre de Rayleigh est le seul paramètre de ce problème ainsi plusieurs régimes seront captés du stationnaire au transitoire en augmentant ce nombre.

A ces équations, on associe les conditions initiales $U = U_0$ et $\theta = \theta_0$ dans Ω et les conditions aux limites

$$\begin{aligned} U &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ \theta &= \frac{1}{2} \text{ sur } \Gamma_{left} \times (0, T), \theta = -\frac{1}{2} \text{ sur } \Gamma_{right} \times (0, T) \\ \partial_y \theta &= 0 \text{ sur } \Gamma_{bottom} \cup \Gamma_{top} \times (0, T). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Approximations. Une méthode de splitting est utilisée. Soit θ^n et (U^n, p^n) donné, θ^{n+1} est solution de

$$\frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\delta t} - \frac{1}{\sqrt{RaPr}} \Delta \theta^{n+1} = -U^n \cdot \nabla \theta^n \text{ dans } \Omega \quad (2.6)$$

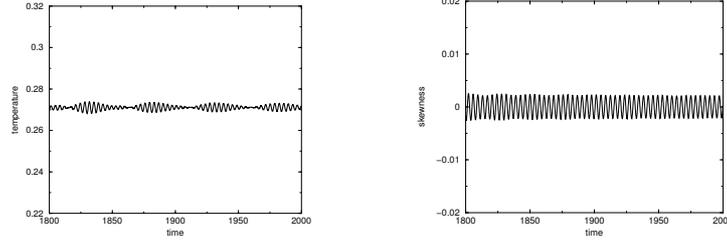
avec $\theta^{n+1} = \frac{1}{2}$ sur Γ_{left} , $\theta^{n+1} = -\frac{1}{2}$ sur Γ_{right} , $\partial_y \theta^{n+1} = 0$ sur $\Gamma_{bottom} \cup \Gamma_{top}$ et (U^{n+1}, p^{n+1}) est solution de

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1} - U^n}{\delta t} - \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} \Delta U^{n+1} + \nabla p^{n+1} &= -U^n \cdot \nabla U^n + e_y \theta^{n+1} \text{ dans } \Omega \\ \nabla \cdot U^{n+1} &= 0 \text{ dans } \Omega \\ U^{n+1} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.7)$$

La discrétisation en espace est celle de la section précédente. La résolution du système linéaire (2.6) est obtenue par la méthode des gradients conjugués préconditionnés par la factorisation incomplète de Cholesky, tandis que la résolution du système linéaire associé à (2.7) est assurée comme précédemment par une méthode multigrille avec la méthode de Gauss-Seidel par maille comme lisseur.

Stabilité linéaire et solutions stationnaires. Afin d'étudier la stabilité des solutions stationnaire, on étudie le comportement du premier exposant de Lyapunov

$$\mu_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log}\|(V(t), \kappa(t))\|}{t}.$$

FIGURE 6. Température (gauche) et skewness (droite) au court du temps à $Ra = 3.0 \times 10^5$

avec (V, q, κ) est une petite perturbation ajoutée à la solution stationnaire (U_S, p_S, θ_S) . Sur la grille 5 (80×400 mailles) la solution stationnaire est stable jusqu'au $Ra \leq 2.5 \times 10^5$. Pour $Ra = 2.8 \times 10^5$ une solution stable et stationnaire a été trouvée sur la grille 6 (160×800 mailles) (Table 4).

Ra	10^3	10^4	10^5	2×10^5	2.5×10^5	2.8×10^5
T	60	185	453	623	915	3107
μ_1	-0.38	-0.12	-0.050	-0.036	-0.025	-0.008

TABLE 4. Evolution de l'exposant de Lyapunov en fonction du nombre de Rayleigh

Solutions périodiques. Afin de mesurer l'asymétrie (*skweness*) de la température [73], on définit

$$\epsilon_{12} = \theta_1 - \theta_2 \quad (2.8)$$

avec $\theta_1 = \theta(x = 0.181, y = 7.370)$ et $\theta_2 = \theta(x = 0.819, y = 0.630)$. Ce paramètre doit être nul pour une solution asymétrique en température. Les nombres de Nusselt sont évalués sur les murs latéraux :

$$Nu(x = 0, t) = \frac{1}{H} \int_0^H \partial_x \theta(0, y, t) dy, \quad Nu(x = L, t) = \frac{1}{H} \int_0^H \partial_x \theta(L, y, t) dy$$

Ensuite, on s'intéresse également à l'énergie cinétique $\|U\| = \sqrt{\frac{1}{2A} \int_A U \cdot U dA}$ et l'enstrophie $\|\omega\| = \sqrt{\frac{1}{2A} \int_A \omega^2 dA}$, où A est l'aire du domaine.

A $Ra = 3.0 \times 10^5$ une solution périodique et nonsymétrique $\epsilon_{12} \neq 0$ est capturée sur la grille 7 (320×1600 mailles) comme on le voit sur la figure 6 ce qui montre que la nombre de Rayleigh critique est dans l'intervall $Ra = 2.8 \times 10^5$ et $Ra = 3.0 \times 10^5$.

Résultats à $Ra = 3.4 \times 10^5$. Une solution périodique et symétrique est établie sur trois grilles consécutives : 40×200 , 80×400 et 160×800 afin d'assurer la convergence de grilles. Sur la grille 160×800 on a $\epsilon_{12} = 1.159e - 7$ et les nombres de Nusselt valent la même valeur -4.579 , l'énergie vaut 2.395, l'enstrophie vaut 2.938 et enfin la période vaut 3.4071.

Résultats pour des grands nombres de Rayleigh. La solution demeure périodique pour des nombres de Rayleigh entre 3.4×10^5 et 4.0×10^5 . Par contre, la période diminue quand le nombre de Rayleigh augmente. De plus, la solution à $Ra = 4.0 \times 10^5$ est non symétrique

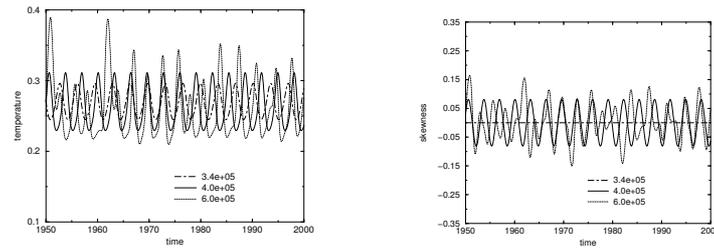


FIGURE 7. Température (gauche) et skewness (droite) au court du temps pour différent nombre de Rayleigh

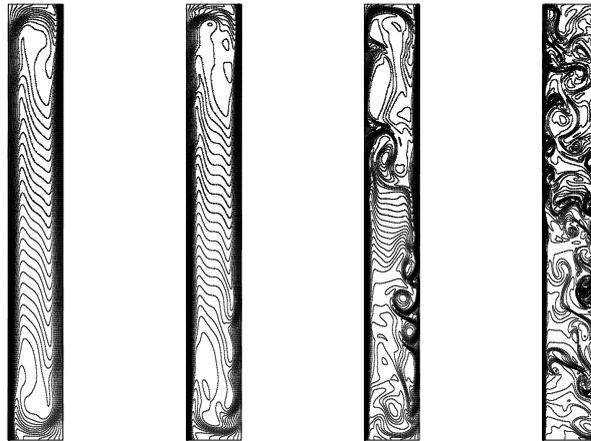


FIGURE 8. Isovaleurs de la température au temps 1000. De gauche à droite $Ra = 3.4 \times 10^5$, 6.0×10^5 , 3.0×10^6 , 3.0×10^7

comme on le voit sur la figure 7. A $Ra = 6.0 \times 10^5$ la solution n'est ni périodique ni symétrique figure 7. Ces résultats montrent la robustesse du schéma implémenté à pouvoir capter une palette de solutions ayant un comportement différent. Pour des grands nombres de Rayleigh, notamment $Ra = 3.0 \times 10^6$ et $Ra = 3.0 \times 10^7$ les solutions sont plus complexes. En effet, des activités tourbillonnaires se développent le long des parois verticales pour donner une solution chaotique à $Ra = 3.0 \times 10^6$ et une solution tourbillonnaire à $Ra = 3.0 \times 10^7$ (figure 8). Pour illustrer ces activités, sur la figure 9, l'évolution de l'énstrophie au cours du temps montrent essentiellement que l'énstrophie croît en moyenne suivant le nombre de Rayleigh.

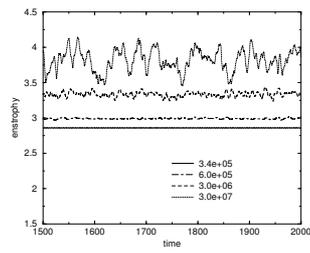


FIGURE 9. Evolution de l'entropie au cours du temps pour différents nombres de Rayleigh

CHAPITRE 3

PROBLÈMES À DONNÉES L^1

3.1. Un problème d'obstacle [A13]

On s'intéresse au problème d'obstacle pour des équations elliptiques avec terme non linéaire à croissance quadratique par rapport aux gradients et pour des données L^1 . Le problème est de chercher des solutions positives pour le modèle suivant

$$\begin{cases} Au(x) + g(x, u, \nabla u) = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$), A est un opérateur du second ordre uniformément elliptique avec des coefficients bornés et $g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory et ayant une croissance au plus quadratique par rapport au gradient et satisfaisant la condition du signe (i.e. $ug(x, u, \xi) \geq 0$). L'exemple modèle est de prendre $g(u, \nabla u) = u|\nabla u|^2$.

Dans [16], Boccardo et Murat établissent l'existence des solutions faibles dans le cas où $f \in H^{-1}(\Omega)$ et pour la non linéarité, une dépendance quadratique est supposée et satisfait la condition de signe, à savoir $g(\cdot, u, \nabla u)u \geq 0$. Ils montrent que $u \in H_0^1(\Omega)$, $g \in L^1(\Omega)$ $ug \in L^1(\Omega)$ telle que $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} g(u, \nabla u)v \, dx = \langle f, v \rangle$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Dans [45], l'existence des solutions est obtenue dans le cas où $f \in L^1(\Omega)$ et la fonction g a une croissance sous quadratique par rapport au gradient et satisfait la condition de signe (par exemple $g(u, \nabla u) = u|\nabla u|^\sigma$, $\sigma < 2$). L'auteur montre que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < 2$, $g \in L^1(\Omega)$ et $ug \in L^1(\Omega)$. Del Vecchio [28] a obtenu également un résultat d'existence dans le cas où l'opérateur d'ordre deux est remplacé par un opérateur fortement non linéaire satisfaisant les hypothèses de Leray–Lions [61], [68].

Dans le cas où g contient des termes d'ordre zéro : $g(u, \nabla u) = a_0u + h(u)|\nabla u|^2$, avec $a_0 > 0$, h continue et le second membre $f \in L^\infty(\Omega)$, Boccardo-Murat-Puel [17] ont montré l'existence des solutions bornées dans $H_0^1(\Omega)$. Ils montrent le principe du maximum suivant $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\|f\|_{L^\infty(\Omega)}}{a_0}$. Dans [18] les auteurs prouvent l'existence des solutions pour des problèmes unilatéraux ; la donnée f est considérée bornée, g croît comme $|\nabla u|^p$ et A est un opérateur de Leray-Lions contenant des termes d'ordre zéro. La présence du terme d'ordre zéro (a_0u avec $a_0 > 0$) est essentielle. En effet, ce résultat peut être faux si $a_0 = 0$ comme le montre le contre exemple suivant dû à Kadzan et Kramer ([53], p. 637) : soit $g(x, u, \nabla u) = -|\nabla u|^2$,

$f \in L^\infty(\Omega)$ et $f(x) \geq \lambda_1$ p.p. dans Ω (λ_1 est la première valeur propre du laplacien), alors le problème (3.1) n'a pas de solution dans $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Ici, on s'intéresse à l'existence des solutions *positives* non bornées des équations elliptiques pour des problèmes unilatéraux. La fonction $g(x, s, \xi)$ est supposée positive et ayant une croissance quadratique ou sous-quadratique par rapport à ξ . Le problème modèle est

$$g(x, u, \nabla u) = |u|^q |\nabla u|^r, \quad q > 0, 0 \leq r \leq 2.$$

On introduit maintenant les hypothèses dans un cadre général. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , ($N \geq 1$), de frontière $\Gamma = \partial\Omega$. Pour $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ les coefficients $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$

$$\exists \alpha > 0, \quad \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \quad (3.2)$$

l'opérateur $A = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}) : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ est défini

$$\langle Au, v \rangle = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx, \quad \text{avec } p' = \frac{p}{p-1}.$$

Soit $g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction de Carathéodory fonction et satisfaisant la condition de croissance

$$|g(x, s, \xi)| \leq b(x, s) |\xi|^r, \quad \text{avec } 0 \leq r \leq 2 \quad (3.3)$$

où la fonction b vérifie

$$\text{pour } 0 \leq r < 2, \quad \sup_{|s| < \eta} b(x, s) = h_\eta(x) \in L^{\frac{2}{2-r}}(\Omega), \quad \forall \eta \geq 0 \quad (3.4)$$

$$\text{pour } r = 2, \quad b(x, s) = b(|s|) \text{ avec } b \text{ une fonction continue et croissante,} \quad (3.5)$$

et,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad g(x, 0, \xi) = 0 \text{ p.p. dans } \Omega. \quad (3.6)$$

On rappelle la définition de la fonction de troncature. Pour tout $k \in \mathbb{R}^+$, on définit $T_k(z) = \min(k, (\max(z, -k)))$ pour $z \in \mathbb{R}$.

Théorème 3.1. — *Sous les hypothèses (3.2)–(3.6) et pour toute fonction $f \in L^1(\Omega)$, il existe une solution u satisfaisant*

$$u \in K = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad u \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega\}, \quad \text{pour tout } p \in [1, \frac{N}{N-1}[, \quad (3.7)$$

$$T_k(u)g(\cdot, u, \nabla u) \in L^1(\Omega), \quad g(\cdot, u, \nabla u) \in L^1(\Omega), \quad (3.8)$$

$$T_k(u) \in H_0^1(\Omega), \quad \forall k > 0, \quad (3.9)$$

$$\langle Au, v - T_k(u) \rangle + \int_{\Omega} g(\cdot, u, \nabla u)(v - T_k(u)) dx \geq \int_{\Omega} f(v - T_k(u)) dx, \quad (3.10)$$

pour tout $v \in \{v \in D(\Omega), v \geq 0\}$.

Dans le cas où $f \in L^2(\Omega)$, on peut prendre $p = 2$ et $T_k(u) = u$.

Idée de la preuve. On définit un problème approché. D'abord, la donnée L^1 est remplacée par une donnée plus régulière, pour cela soit $(f^\varepsilon)_\varepsilon$ une suite régulière (en particulier dans $L^2(\Omega)$), telle que

$$f^\varepsilon \longrightarrow f \text{ dans } L^1(\Omega) \text{ et } \|f^\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)}. \quad (3.11)$$

Selon ([16], [28]), on définit

$$g^\varepsilon(x, s, \xi) = \frac{g(x, s, \xi)}{1 + \varepsilon|g(x, s, \xi)|}.$$

Ensuite, on tient compte de la contrainte de la positivité en considérant un problème pénalisé :

$$\begin{cases} Au^\varepsilon + g^\varepsilon(\cdot, u^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}(u^\varepsilon)^- = f^\varepsilon \text{ dans } D'(\Omega) \\ u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \quad f^\varepsilon \in L^2(\Omega) \end{cases} \quad (3.12)$$

avec $(u^\varepsilon)^- = -\min(0, u^\varepsilon)$.

En utilisant le fait $g^\varepsilon(\cdot, u^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon)$ est bornée, il est possible de montrer l'existence des solutions $H_0^1(\Omega)$. Néanmoins, il semble difficile d'obtenir des estimations indépendantes de ε due au fait que $u^\varepsilon g^\varepsilon(x, u^\varepsilon, \nabla u^\varepsilon)$ n'a pas de signe. Afin d'éviter cela, on approche la fonction signe par une fonction Lipschitzienne et croissante : $S_\delta(z) = \frac{z-\delta}{z}$ si $z \geq \delta > 0$, $\frac{-z-\delta}{z}$ si $z \leq -\delta < 0$ et 0 sinon. On note

$$g_\delta^\varepsilon(x, s, \xi) = S_\delta(s)g^\varepsilon(x, s, \xi), \quad (3.13)$$

de telle sorte que g_δ^ε satisfait la condition de signe, la condition de croissance. On a $g_\delta^\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $\varepsilon > 0$, ainsi, il existe une solution $u_\delta^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ du problème suivant

$$\begin{cases} Au_\delta^\varepsilon + g_\delta^\varepsilon(\cdot, u_\delta^\varepsilon, \nabla u_\delta^\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}(u_\delta^\varepsilon)^- = f^\varepsilon \text{ dans } D'(\Omega) \\ u_\delta^\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \quad f^\varepsilon \in L^2(\Omega) \end{cases} \quad (3.14)$$

Estimations a priori. on établit les estimations uniformes (en δ, ε) et les résultats de convergence suivants :

$$u_\delta^\varepsilon \text{ bornée dans } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ uniformément en } \varepsilon \text{ et } \delta, \quad 1 \leq p < N/(N-1) \quad (3.15)$$

$$g_\delta^\varepsilon(\cdot, u_\delta^\varepsilon, \nabla u_\delta^\varepsilon) \text{ bornée dans } L^1(\Omega) \text{ uniformément en } \varepsilon \text{ et } \delta \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{\varepsilon}(u_\delta^\varepsilon)^- \text{ bornée dans } L^1(\Omega) \text{ uniformément en } \varepsilon \text{ et } \delta. \quad (3.17)$$

$$T_k(u_\delta^\varepsilon) \text{ bornée dans } H_0^1(\Omega) \text{ uniformément en } \varepsilon \text{ et } \delta, \forall k > 0. \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{k} \int_\Omega |\nabla T_k(u_\delta^\varepsilon)|^2 dx \longrightarrow 0 \text{ quand } k \longrightarrow \infty, \text{ uniformément en } \varepsilon \text{ et } \delta. \quad (3.19)$$

$$T_k(u_\delta^\varepsilon)g_\delta^\varepsilon(\cdot, u_\delta^\varepsilon, \nabla u_\delta^\varepsilon) \text{ bornée dans } L^1(\Omega) \text{ uniformément en } \varepsilon \text{ et } \delta, \forall k > 0. \quad (3.20)$$

$$u_\delta^\varepsilon \text{ est relativement compacte dans } W_0^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leq p < N/(N-1) \quad (3.21)$$

Passage à la limite. D'abord, pour δ fixé, on fait tendre ε vers zéro. En considérant $\phi = T_k(u_\delta^\varepsilon) - v$ dans (3.14) comme fonction test avec $v \in \{v \in D(\Omega), v \geq 0\}$, le passage à la limite sur les termes linéaires se fait aisément via le lemme de Fatou et les résultats de convergence précédents. Dans le cas d'une croissance sous quadratique des termes non linéaires, on montre grâce au Théorème de Vitalli, comme dans [16], la convergence forte

dans $L^1(\Omega)$ de $g_\delta^\varepsilon(\cdot, u_\delta^\varepsilon, \nabla u_\delta^\varepsilon)$ vers $g_\delta(\cdot, u_\delta, \nabla u_\delta)$. Dans le cas d'une croissance quadratique, la démarche est complètement différente, on va utiliser ici le fait que l'opérateur elliptique est d'ordre deux, ainsi le passage à la limite se fera globalement sur cet opérateur et les termes quadratique en même temps. Cette approche est inspirée des travaux de Boccardo et al. [16] dans le cadre des données régulières. Comme les troncatures des solutions sont dans H_0^1 , on considère des fonctions tests de la forme

$$T_k(u_\delta^\varepsilon) - \phi \exp\left(-\frac{B(T_k(w_\varepsilon^+))}{\alpha}\right) H\left(\frac{w_\varepsilon}{k}\right),$$

avec $\phi \in D(\Omega)$, $\phi \leq 0$. Une première étape consiste à passer à la limite inférieure quand ε tend vers zéro, ensuite la convergence (3.19) permet de passer à la limite quand k tend vers l'infini. Le passage à la limite inférieure sur δ est obtenue de façon semblable au passage à la limite en ε , puisque la solution u_δ est positive et vérifie les estimations (3.15)–(3.21).

3.2. Equation parabolique avec des termes d'ordre un [A11]

On considère une équation parabolique contenant des termes d'ordre zéro et des termes d'ordre un :

$$\begin{cases} \partial_t u - \nabla \cdot (A(t, x) \nabla u) + B(t, x, u, \nabla u) = f & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.22)$$

avec B contenant d'une part des termes linéaires en u et ∇u , et d'autre part un terme non linéaire avec une dépendance sous quadratique par rapport au ∇u , plus précisément

$$B(t, x, u, \nabla u) = b(t, x) \cdot \nabla u + d(t, x)u + g(t, x, u, \nabla u). \quad (3.23)$$

On suppose que A, b et d sont des fonctions bornées et la matrice A est \underline{a} -coercive. Ici, on s'intéresse à des champs d'advection à divergence non nulle :

$$\nabla \cdot b \in L^\infty(Q_T).$$

La fonction $g : Q_T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable en t, x et satisfait la condition de signe et la condition de croissance suivante

$$\lambda g(t, x, \lambda, \xi) \geq 0, \quad (3.24)$$

$$\exists 0 \leq \sigma < 2; \quad |g(t, x, \lambda, \xi)| \leq h(|\lambda|)(\gamma(t, x) + |\xi|^\sigma) \quad (3.25)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^N$, p.p. dans Q_T , avec $\gamma \in L^1(Q_T)$ et h est une fonction croissante sur \mathbb{R}^+ .

Les principales difficultés de ce travail proviennent du fait qu'on s'intéresse à des données dans L^1 :

$$u_0 \in L^1(\Omega), \quad f \in L^1(Q). \quad (3.26)$$

Pour $B = 0$, l'existence des solutions pour de tels problèmes avec des données non régulières (mesure ou L^1) a été établie dans [14], [13], [46], tandis que la question de l'unicité, dans le sens des solutions entropiques ou renormalisées a été considérée dans [72], [12]. L'existence

et l'unicité des solutions renormalisées pour une équation parabolique linéaire contenant un terme d'ordre un avec des coefficients à divergence nulle ont été établies dans [69]. Dans [27], les auteurs considèrent g non linéaire en supposant que g ne s'annule pas pour les grandes valeurs de u , ceci se traduit par un effet régularisant sur l'équation.

On introduit la notion de solution faible pour l'équation (3.22).

Définition 3.1. — On dit que u est solution faible de (3.22), si $u \in L^q(0, T; W_0^{1,q}(\Omega)) \cap C^0(0, T; L^1(\Omega))$ telle que $g(u, \nabla u) \in L^1(Q)$ et vérifie

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u\phi(T, x)dx - \int_{\Omega} u_0\phi(0, x)dx - \int_Q u\partial_t\phi(t, x)dxdt \\ + \int_Q A\nabla u \cdot \nabla\phi dxdt + \int_Q (g(u, \nabla u) + b \cdot \nabla u + du)\phi dxdt = \int_Q f\phi dxdt, \end{aligned} \quad (3.27)$$

pour tout $T > 0$, $\phi \in C^0(0, T; W_0^{1,q'}(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^q(\Omega))$ et pour tout q tel que $1 \leq q < \frac{N+2}{N+1}$ et $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Théorème 3.2. — Il existe une solution faible de l'équation (3.22) au sens de la définition 3.1.

On rappelle la définition de la fonction de troncature : $T_k(z) = \max(-k, \min(z, k))$ et on note $S_k(z) = \int_0^z T_k(\tau)d\tau$.

On donne maintenant le principal résultat concernant l'unicité.

Définition 3.2. — Soit $g = 0$. On dit que u est une solution entropique de (3.22) si $u \in C^0(0, T; L^1(\Omega))$ vérifiant $T_k(u) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ pour tout $k > 0$, $\nabla u \in L^1(Q)$ et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} S_k(u - \psi)(T)dx - \int_{\Omega} S_k(u_0 - \psi(0, \cdot))dx + \int_0^T \langle \partial_t\psi, T_k(u - \psi) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt \\ + \int_Q A\nabla u \cdot \nabla(T_k(u - \psi))dxdt + \int_Q (du + b\nabla u)T_k(u - \psi)dxdt \leq \int_Q fT_k(u - \psi)dxdt \end{aligned} \quad (3.28)$$

pour tout $k > 0$ et $\psi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q) \cap C^0(0, T; L^1(\Omega))$ avec $\partial_t\psi \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

Théorème 3.3. — Soit $g = 0$, alors il existe une unique solution entropique de l'équation (3.22).

La stratégie que nous adoptons ici pour démontrer le théorème 3.2 est inspirée de [14]. Néanmoins, de nouvelles difficultés ont été rencontrées dues à la présence des termes d'advection. On introduit un problème approché où u_0 , f et g sont remplacés par $u_{0,\varepsilon}$, f_ε et g_ε régulières et vérifient $u_{0,\varepsilon} \rightarrow u_0$ dans $L^1(\Omega)$, $f_\varepsilon \rightarrow f$ dans $L^1(Q)$ et $g_\varepsilon(u, \nabla u) = \frac{g(u, \nabla u)}{1 + \varepsilon|g(u, \nabla u)|}$. En considérant $T_k(u_\varepsilon)$ comme fonction test dans le problème approché, on déduit l'estimation $L^\infty(0, T)$, $L^1(\Omega)$ -uniforme suivante

$$\sup_{\varepsilon > 0, t \in (0, T)} \|u_\varepsilon(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq \beta. \quad (3.29)$$

Soit

$$\phi_n(z) = \begin{cases} 1 & \text{if } z \geq n+1, \\ z-k & \text{if } n \leq z < n+1, \\ 0 & \text{if } -n < z < n, \\ z+k & \text{if } -n-1 < z \leq -n, \\ -1 & \text{if } z \leq -n-1. \end{cases} \quad (3.30)$$

En considérant $\phi_n(u_\varepsilon)$ comme fonction test, on déduit le contrôle des gradients des solutions sur les rondelles B_n :

$$\int_{B_n} |\nabla u_\varepsilon|^2 dxdt \leq C_0 + C_1 \int_{E_n} |\nabla u_\varepsilon| dxdt. \quad (3.31)$$

avec $B_n = \{(t, x) \in Q, n \leq |u(t, x)| \leq n+1\}$ et $E_n = \{(t, x) \in Q, |u(t, x)| > n+1\}$.

Dans [14], [46] l'inégalité (3.31) apparaît avec $C_1 = 0$. Ici, ce terme supplémentaire traduit l'influence du terme d'ordre un $b \cdot \nabla u$ dans l'équation. Néanmoins, on exploite le fait que l'intégrale dans le second membre de (3.31) est prise pour de grandes valeurs des solutions et pour la norme L^1 . On établit le résultat de compacité suivant :

Pour tout $1 \leq q < \frac{N+2}{N+1}$, Il existe $C > 0$, dépendant de $\beta, C_0, C_1, |\Omega|, T$, et q tel que

$$\|u\|_{L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))} \leq C. \quad (3.32)$$

Convergence p.p. des gradients. Afin de passer à la limite sur les termes non linéaires, on montre d'abord les estimations uniformes suivantes :

$$\sup_{\varepsilon>0} \|g_\varepsilon(u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)\|_{L^1(Q_T)} \leq C, \quad (3.33)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\varepsilon>0} \int_{|u_\varepsilon|>k} |g_\varepsilon(u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)| dxdt = 0. \quad (3.34)$$

Ensuite, on établit que $(\nabla u_\varepsilon)_\varepsilon$ est une suite de Cauchy en mesure. Ainsi le passage à la limite sur le terme $g_\varepsilon(u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)$ devient aisé en utilisant le théorème de Vitali et parce que la dépendance de g est sous quadratique par rapport aux gradients. Enfin, on montre que la suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est de Cauchy dans $C^0(0, T; L^1(\Omega))$.

L'existence des solutions entropiques est assurée en considérant $T_k(u_\varepsilon - \psi)$ comme fonction test dans le problème approché. On aboutit à une inégalité due au fait que $\nabla T_k(u_\varepsilon)$ converge faiblement vers $\nabla T_k(u)$ dans $L^2(Q_T)$ et en se servant du lemme de Fatou. Pour montrer l'unicité des solutions entropiques, on suit l'idée de A. Prignet [72] en montrant que toute solution entropique est égale à la solution faible obtenue par le procédé d'approximation précédent.

3.3. Sur une équation de Fokker-Planck [A10]

Dans [43], Jager et Segel introduit une équation intégro-différentielle décrivant l'évolution de certaines espèces biologiques. L'opérateur de collision de type Boltzmann modélise la dynamique d'interaction selon différents critères physiques (Bellomo et al. in [6], [10] et en supposant que les rencontres entre organismes induisent des petits changement sur l'état des

individus, l'équation de Fokker-Planck a été présentée dans [43] afin de modéliser l'évolution de la densité des individus

$$\partial_t u = \partial_x (M(u; t, x)u + \partial_x (D(u; t, x)u)) \quad \text{dans } (0, T) \times (0, 1) \quad (3.35)$$

avec des conditions aux limites de type flux nul

$$M(u)u + \partial_x (D(u)u) = 0 \quad \text{pour } x \in \{0, 1\} \quad (3.36)$$

et la condition initiale

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{dans } (0, 1) \quad (3.37)$$

L'équation (3.35) est non linéaire dès que les coefficients M et D dépendent de u comme suit

$$M(u; t, x) = \int_0^1 m(x, y)u(t, y)dy, \quad D(u; t, x) = \int_0^1 d(x, y)u(t, y)dy. \quad (3.38)$$

Les conditions aux limites (3.36) assurent la conservation de la densité totale

$$\int_0^1 u(t, x)dx = \int_0^1 u_0(x)dx. \quad (3.39)$$

La première difficulté de ce problème provient du fait que les non linéarités sont non locales. Ensuite, la donnée initiale est considérée positive et dans L^1 . Cette hypothèse est naturelle en dynamique des populations sans imposer des conditions supplémentaires.

Le résultat principal est l'existence des solutions positives et préservation de la conservation de la masse pour des données initiales positives et intégrables.

On note par $\Omega = (0, 1)$ et $Q_t = (0, t) \times \Omega$. Par la suite, on désigne par $u = u(t, x)$, $M(u) = M(u; t, x)$, $D(u) = D(u; t, x)$ pour alléger les notations.

Théorème 3.4. — *Soit u_0 positive et dans $L^1(\Omega)$. Soient $M(u)$ et $D(u)$ définies par (3.38). On suppose que*

$$\begin{cases} 0 < \underline{\delta} \leq d(x, y) \leq \bar{\delta}, \\ |m(x, y)| + |\partial_x d(x, y)| \leq C_{m,d}. \end{cases} \quad (3.40)$$

Alors, il existe une solution positive $u \in L^q(0, T; W^{1,q}(\Omega))$, $1 \leq q < \frac{4}{3}$, de (3.35)-(3.37), vérifiant

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} u \partial_t \phi dx ds + \int_{\Omega} u_{0(x)} \phi(0, x) dx \\ &= \int_{\Omega} u(t, x) \phi(t, x) dx + \int_0^t \int_{\Omega} \left((M(u) + \partial_x D(u))u + D(u) \partial_x u \right) \partial_x \phi dx ds \end{aligned} \quad (3.41)$$

avec $\phi \in C^0(0, T; W^{1,q'}(\Omega))$, $\partial_t \phi \in C^0(0, T; L^{q'}(\Omega))$. De plus, u satisfait (3.39).

Chaque terme dans la formulation précédente est bien définie lorsque les coefficients $N(u) := M(u) + \partial_x D(u)$ et $D(u)$ sont dans $L^\infty(Q)$ ce qui est le cas dès que u appartient $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$. De plus, on montre la fonction $U : t \mapsto \int_{\Omega} u \phi dx$ est continue sur $(0, T)$.

On montre d'abord l'existence des solutions du problème (3.35)-(3.37), par une méthode de point fixe, pour des données régulières $u_0 \in L^2(\Omega)$. Ensuite, on établit des estimations sur les

solutions dépendants uniquement de la norme L^1 de la donnée initiale. On établit alors le résultat suivant :

Lemme 3.1. — Soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite construite par régularisation. Alors

$$\int_{B_n} |\partial_x u_\varepsilon|^2 dxdt \leq C_0 + C_1 \int_{Q_T} |u_\varepsilon|^2 dxdt \quad (3.42)$$

où C_0, C_1 dépendent de $\|u_0\|_{L^1(\Omega)}$ et $\underline{\delta}$ et le sous ensemble $B_n = \{(t, x) \in Q, n \leq |u(t, x)| \leq n + 1\}$.

Même si l'estimation (3.42) est valable en dimension supérieure, le résultat de compacité suivant est relatif à la dimension un d'espace et permet essentiellement le passage à la limite sur le problème approché.

Lemme 3.2. — Soit $u_\varepsilon \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ satisfaisant (3.42) et on suppose $\sup_{t \in (0, T)} \|u_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^1(\Omega)} \leq \kappa$. Soit $1 \leq q < \frac{4}{3}$ et $\frac{q}{q-1} < s$. Alors, il existe une constante K dépendant de κ, C_0, C_1 tel que

$$\int_{Q_T} |\partial_x v|^q dxdt + \int_{Q_T} |v|^2 dxdt + \|v\|_{L^q(0, T; L^s(\Omega))} \leq K. \quad (3.43)$$

CHAPITRE 4

DYNAMIQUES DES POPULATIONS

4.1. Modèle VIF (Virus d'Immunodéficience Féline) [A2]

Le VIF est un lentivirus conduisant au SIDA des chats, il se transmet par morsures au cours des combats en particulier entre mâles. Il n'y a pas de transmission verticale : les femelles ne transmettent pas le virus à leurs petits. Le déroulement clinique de l'infection à VIF est très similaire à celui du VIH, avec une longue période asymptotique qui dure plusieurs années et durant laquelle le chat peut se reproduire.

Nous reprenons le modèle dans [57], un individu contaminé devient immédiatement infecté, et peut transmettre le virus à un sensible puis à un exposé ensuite à un individu infecté mais ne transmettant pas le virus. La population de chat est donc subdivisée en trois classes sanitaires : les sensibles (u), les exposés (v) et les infectés (w). Les paramètres démographiques et épistémologiques sont notés b et m pour les taux de fertilité et de mortalité naturel, α le taux de mortalité additionnelle due à l'infection et ρ est le taux de sortie du stade exposé. La dynamique de l'épidémie (VIF) est gouvernée par un système de réaction–diffusion–transport anisotropique :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - \operatorname{div}(\mathbf{A}_1(t, x, \nabla u) + u\mathbf{K}_1) + r_1(t, x, u, v, w) = \\ \quad -\sigma(t, x, u, v, w) - m(t, x)u + b(t, x)(u + v + w) + f(t, x), \\ v_t - \operatorname{div}(\mathbf{A}_2(t, x, \nabla v) + v\mathbf{K}_2) + r_2(t, x, u, v, w) = \\ \quad \sigma(t, x, u, v, w) - (m(t, x) + \rho(t, x))v + g, \\ w_t - \operatorname{div}(\mathbf{A}_3(t, x, \nabla w) + w\mathbf{K}_3) + r_3(t, x, u, v, w) = \\ \quad -m(t, x)w + \rho(t, x)v - \alpha(t, x)w + h(t, x); \end{array} \right. \quad (4.1)$$

avec des conditions aux limites de type mixtes

$$(\mathbf{A}_i(t, x, \nabla u_i) + u_i(t, x)\mathbf{K}_i(t, x)) \cdot \eta(x) = 0, \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_1, \quad u_i = u, v, w, \text{ pour } i = 1, 2, 3 \quad (4.2)$$

$$u(t, x) = v(t, x) = w(t, x) = 0 \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_0, \quad (4.3)$$

et des distributions initiales positives ou nulles dans Ω

$$u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x) \quad \text{et} \quad w(0, x) = w_0(x). \quad (4.4)$$

Ici Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) de frontière Lipschitzienne et $T > 0$, Γ_0 et Γ_1 sont tels que $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ et $|\Gamma_0| > 0$, η désigne le vecteur unitaire normal extérieur à Ω . Enfin on note $Q_T = (0, T) \times \Omega$.

Le terme de diffusion \mathbf{A}_i , ($i = 1, 2, 3$) définit un opérateur strictement monotone coercif dans $Q_T \times \mathbb{R}^N$, il a pour composantes $a_{l,i}$ pour $l = 1 \dots N$ qui vérifient pour $i = 1, 2, 3$; $l = 1 \dots N$:

$$\text{Il existe } p_l > 1, \quad a_{l,i}(t, x, \xi) = \beta_{l,i}(t, x) |\xi_l|^{p_l-2} \xi_l, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \quad (4.5)$$

où $\beta_{l,i}$ est une fonction positive et bornée dans Q_T . On suppose qu'il existe une constante positive réelle \underline{a}_i , telle que pour $i = 1, 2, 3$ et quel que soit $\xi \in \mathbb{R}^N$:

$$\mathbf{A}_i(t, x, \xi) \cdot \xi \geq \underline{a}_i \sum_{l=1}^N |\xi_l|^{p_l} \quad \text{p.p. } (t, x) \in Q_T. \quad (4.6)$$

Ensuite, le vecteur de transport \mathbf{K}_i (pour $i = 1, 2, 3$) est borné dans Q_T et vérifie

$$\mathbf{K}_i \in (L^\infty(Q_T))^N \quad \text{et} \quad \text{div}(\mathbf{K}_i) \in L^\infty(Q_T). \quad (4.7)$$

Les fonctions positives α , b , m et ρ vérifient

$$\alpha, b, m, \rho \in L^\infty(Q_T). \quad (4.8)$$

Nous supposons que les taux de mortalité dépendante sont sous la forme suivante :

$$\begin{cases} r_1(t, x, u, v, w) = k_1(t, x) u |u + v + w|^{p_u-1}, \\ r_2(t, x, u, v, w) = k_2(t, x) v |u + v + w|^{p_v-1}, \\ r_3(t, x, u, v, w) = k_3(t, x) w |u + v + w|^{p_w-1}, \end{cases} \quad (4.9)$$

avec p_θ , $\theta = u, v, w$ satisfait

$$p_\theta \geq \max_{1 \leq l \leq N} \left(\frac{p_l}{p_l - 1} \right) > 1, \quad (4.10)$$

et la fonction k_i , $i = 1, 2, 3$, définie sur Q_T satisfait

$$k_i \in L^\infty(Q_T) \quad \text{et} \quad k_i \geq k_0 > 0 \quad \text{p.p. } (t, x) \in Q_T \quad (4.11)$$

Enfin, on suppose que σ est mesurable sur Q_T , continue par rapport aux variables u, v, w et vérifie l'hypothèse de croissance

$$\begin{cases} \text{il existe deux fonctions bornées } L, M : \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \\ \text{et } s, s', s'' \in \mathbb{R}_+ \text{ tels que} \\ 1 \leq s < \max_{1 \leq l \leq N} \left(\frac{p_l}{\bar{p}} \left(\bar{p} - \frac{N}{N+1} \right), p_u, p_v, p_w \right), \text{ et} \\ |\sigma(t, x, u, v, w)| \leq L(t, x) (|u|^{s'} |v|^s + |u|^{s''} |w|^s) + M(t, x), \quad \text{p.p. } (t, x) \in Q_T \end{cases} \quad (4.12)$$

avec $\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \frac{1}{p_l}$, et la condition de positivité

$$\begin{cases} \sigma(t, x, 0, v, w) = 0 & \text{si } v \geq 0 \text{ et } w \geq 0, \\ \sigma(t, x, u, 0, w) \geq 0 & \text{si } u \geq 0 \text{ et } w \geq 0, \\ \sigma(t, x, u, v, 0) \geq 0 & \text{si } u \geq 0 \text{ et } v \geq 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

L'opérateur de diffusion anisotrope \mathbf{A}_i pour $i = 1, 2, 3$ est apparu dans le cas elliptique chez Boccardo *et al* [15] et dans le cas parabolique chez Li Fengquan et Zhao Huixiu [65]. Dans le cas logistique ($p_u = p_v = p_w = 2$), les résultats d'existence sont établis dans [38] avec des données L^∞ et pour des opérateurs isotropes ; voir aussi [39].

Si $\sigma = 0$, $r_i = 0$ pour $i = 1, 2, 3$, sans terme advectif et avec des conditions aux limites de Dirichlet, les résultats l'existence pour des problèmes elliptiques et paraboliques correspondants avec des données non régulières sont établis dans [15], [65], [13], [14]). La question d'unicité de ces solutions au sens entropique ou renormalisé est considérée dans [72], [12].

Notations. Pour $1 < p < +\infty$ et $l = 1 \dots N$, on note

$$W_\Gamma^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid u = 0 \text{ sur } \Gamma\},$$

$$W^{1,p,l}(\Omega) = \{u \mid u \in L^p(\Omega) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x_l} \in L^p(\Omega)\}$$

et

$$W_\Gamma^{1,p,l}(\Omega) = \{u \in W^{1,p,l}(\Omega) \mid u = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

On définit la norme dans $W_\Gamma^{1,p,l}(\Omega)$ par $\|u\|_{W_\Gamma^{1,p,l}(\Omega)} = \|\frac{\partial u}{\partial x_l}\|_{L^p(\Omega)}$.

Résultat principal. Dans cette section nous donnons la définition d'une solution faible pour les systèmes paraboliques non-linéaires de type (4.1)–(4.4) à données L^1 .

On note $\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \frac{1}{p_l}$.

Définition 4.1. — Soit $1 \leq q_l < \frac{p_l}{\bar{p}} \left(\bar{p} - \frac{N}{N+1} \right)$, $l = 1 \dots N$. Une solution faible du système (4.1)–(4.4), est un triplet (u, v, w) de fonctions positives ou nulles dans

$$\bigcap_{l=1}^N L^{q_l}(0, T; W_{\Gamma_0}^{1,q_l,l}(\Omega)) \bigcap_{\theta=u,v,w} L^{p_\theta}(0, T; L^{p_\theta}(\Omega)) \bigcap C([0, T]; L^1(\Omega))$$

tel que $\sigma(\cdot, \cdot, u, v, w)$ et $r_i(\cdot, \cdot, u, v, w)$, pour $i = 1, 2, 3$, sont dans $L^1(Q_T)$ et vérifient :

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} u \varphi_t \, dxdt - \int_{\Omega} \varphi(0, x) u_0(x) \, dx + \int_{Q_T} (\mathbf{A}_1(t, x, \nabla u) + u \mathbf{K}_1(t, x)) \cdot \nabla \varphi \, dxdt \\ & + \int_{Q_T} m(t, x) u \varphi \, dxdt - \int_{Q_T} b(t, x) (u + v + w) \varphi \, dxdt \\ & + \int_{Q_T} \sigma(t, x, u, v, w) \varphi \, dxdt + \int_{Q_T} r_1(t, x, u, v, w) \varphi \, dxdt = \int_{Q_T} f \varphi \, dxdt, \end{aligned}$$

pour tout $\varphi \in C_c^1([0, T] \times \Omega)$; ainsi que des formulations analogues associées aux variables v et w du système (4.1).

Théorème 4.1. — Soit $2 - \frac{1}{N+1} < p_l < \frac{\bar{p}(N+1)}{N}$ ($l = 1 \dots N$). On suppose que $\bar{p} \leq N + \frac{N}{N+1}$ et sous les hypothèses (4.6)–(4.12), pour tout $u_0, v_0, w_0 \in L_+^1(\Omega)$, $f, g, h \in L_+^1(Q_T)$ et sous la condition suivante

$$\mathbf{K}_i(t, x) \cdot \eta(x) \geq 0 \quad p.p. \quad x \in \Gamma_1, \quad t \in (0, T), \quad i = 1, 2, 3,$$

le système (4.1)–(4.4) admet une solution faible positive ou nulle.

Idée de la preuve. La preuve est organisée en plusieurs étapes. Afin d'assurer la positivité des solutions, la première étape consiste à prolonger par continuité la fonction σ dans les variables u, v et w (p.p. dans Q_T). La deuxième étape consiste à travailler avec des données régulières. Pour cela on approche les données u_0, v_0, w_0 et f, g, h par des fonctions régulières positives telles que

$$\|f_\varepsilon\|_{L^1(Q_T)} \leq \|f\|_{L^1(Q_T)}, \quad f_\varepsilon \rightarrow f \text{ dans } L^1(Q_T), \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0; \quad (4.14)$$

$$\|u_{0,\varepsilon}\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^1(\Omega)}, \quad f_{0,\varepsilon} \rightarrow f_0 \text{ dans } L^1(\Omega), \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0; \quad (4.15)$$

de même pour $g_\varepsilon, h_\varepsilon$, et $v_{0,\varepsilon}, w_{0,\varepsilon}$. Ensuite, afin de contrôler les termes d'ordre zéro, on introduit un paramètre $\lambda > 0$ assez grand tel que $\lambda \geq \|b\|_{L^\infty(Q_T)} + \|\operatorname{div}(\mathbf{K}_1)\|_{L^\infty(Q_T)} + \|\operatorname{div}(\mathbf{K}_2)\|_{L^\infty(Q_T)} + \|\operatorname{div}(\mathbf{K}_3)\|_{L^\infty(Q_T)}$. Ensuite, on pose $u_\varepsilon = e^{\lambda t} \tilde{u}_\varepsilon, v_\varepsilon = e^{\lambda t} \tilde{v}_\varepsilon$ et $w_\varepsilon = e^{\lambda t} \tilde{w}_\varepsilon$.

Positivité. La propriété du prolongement de la fonction σ ainsi que la structure triangulaire des termes d'ordre zéro assurent la positivité des solutions en montrant d'abord que la suite $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ est positive, puis $(w_\varepsilon)_\varepsilon \geq 0$ et enfin $(u_\varepsilon)_\varepsilon \geq 0$.

Le point fondamental de ce travail est l'obtention du résultat de compacité suivant

Lemme 4.1. — Soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ dans $\bigcap_{l=1}^N L^{p_l}(0, T; W^{1,p_l,l}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$ satisfaisant : il existe $\beta > 0$ indépendante de ε , tels que

$$\sup_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} |u_\varepsilon(t, x)| dx \leq \beta, \quad (4.16)$$

$$\int_{Q_T} |u_\varepsilon|^{p_l} dx dt \leq \beta, \quad (4.17)$$

$$\sup_{\gamma > 0} \sum_{l=1}^N \int_{B_\gamma} \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_l} \right|^{p_l} dx dt \leq \beta, \quad (4.18)$$

avec $B_\gamma = \{(t, x) \in Q_T, \gamma \leq |u_\varepsilon| \leq \gamma + 1\}$.

Soit $\bar{p} \leq N + \frac{N}{N+1}$, alors pour tout $1 \leq q_l < \frac{p_l}{\bar{p}} \left(\bar{p} - \frac{N}{N+1} \right)$, $l = 1 \dots N$, il existe une constante positive c dépendant seulement de Q_T, N, p_l, q_l, β , telle que

$$\left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_l} \right\|_{L^{q_l}(Q_T)} + \|u_\varepsilon\|_{L^{\bar{q}}(Q_T)} \leq c, \quad (4.19)$$

où \bar{q} vérifie $\frac{1}{\bar{q}} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \frac{1}{q_l}$.

Ce résultat est similaire à celui trouvé dans [65] dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet, Plus précisément dans le cas où l'espace de Sobolev $W^{1,p_l,l}(\Omega)$ est remplacé par

$W_{\partial\Omega}^{1,p_i,l}(\Omega)$ et l'hypothèse (4.18) est remplacée par

$$\sum_{l=1}^N \int_{Q_T} \frac{|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_l}|^{p_l}}{(1 + |u_\varepsilon|)^\gamma} dx dt \leq \beta;$$

dans ce cas (4.17) est vérifiée [81].

On montre ensuite que les suites $(u_\varepsilon)_\varepsilon$, $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(w_\varepsilon)_\varepsilon$ satisfont les estimations (4.16)–(4.18). De plus à partir des estimations sur les termes non linéaires, on a

$$\| r_{i,\lambda}(u_\varepsilon, v_\varepsilon, w_\varepsilon) \|_{L^1(Q_T)} + \| \sigma(e^{\lambda t} u_\varepsilon, e^{\lambda t} v_\varepsilon, e^{\lambda t} w_\varepsilon) \|_{L^1(Q_T)} \leq c, \quad (4.20)$$

on déduit la convergence forte dans $L^1(Q_T)$ (quitte à extraire une sous suite) des suites $(u_\varepsilon)_\varepsilon$, $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(w_\varepsilon)_\varepsilon$. La convergence forte dans $L^1(Q_T)$ des termes non-linéaires σ , r_i , $i = 1, 2, 3$, est obtenue grâce au théorème de Vitali. Enfin, la convergence des termes de diffusion anisotrope est obtenue en montrant que les suites $(a_{l,1}(t, x, \nabla u_\varepsilon))_\varepsilon$ (resp. $(a_{l,2}(t, x, \nabla v_\varepsilon))_\varepsilon$, $(a_{l,3}(t, x, \nabla w_\varepsilon))_\varepsilon$) convergent presque partout dans Q_T et dans $L^1(Q_T)$ vers $a_{l,1}(t, x, \nabla u)$ (resp. $a_{l,2}(t, x, \nabla v)$, $a_{l,3}(t, x, \nabla w)$).

4.2. Solutions entropiques pour un modèle anisotropique [A3]

L'existence et l'unicité des solutions entropiques pour un système d'EDP non linéaire contenant des termes généraux de diffusion anisotropiques et des termes de transport avec des conditions aux limites de type flux nul sont établis. Ce problème est un prototype des systèmes non linéaires modélisant la propagation d'une épidémie (VIF) dans un habitat hétérogène. Dans [A2], nous avons établi l'existence des solutions du problème

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \operatorname{div}(\mathbf{A}_1(t, x, \nabla u(t, x)) + u(t, x)\mathbf{K}_1(t, x)) + r_1(t, x, u, v) = \\ \quad -\sigma(t, x, u, v) + b(t, x)(u(t, x) + v(t, x)) - m(t, x)u(t, x) + f(t, x), \\ \partial_t v(t, x) - \operatorname{div}(\mathbf{A}_2(t, x, \nabla v(t, x)) + v(t, x)\mathbf{K}_2(t, x)) + r_2(t, x, u, v) = \\ \quad \sigma(t, x, u, v) - (m(t, x) + \alpha(t, x))v(t, x) + g(t, x); \end{cases} \quad (4.21)$$

dans $Q_T = (0, T) \times \Omega$, avec les conditions aux limites de flux nuls sur $(0, T) \times \partial\Omega$

$$\begin{cases} (\mathbf{A}_1(t, x, \nabla u(t, x)) + u(t, x)\mathbf{K}_1(t, x)) \cdot \eta(x) = 0, \\ (\mathbf{A}_2(t, x, \nabla v(t, x)) + v(t, x)\mathbf{K}_2(t, x)) \cdot \eta(x) = 0, \\ \mathbf{K}_i(t, x) \cdot \eta(x) \geq 0 \text{ for } i = 1, 2, \end{cases} \quad (4.22)$$

et avec des conditions initiales dans $L^1(\Omega)$

$$u(0, x) = u_0(x) \text{ and } v(0, x) = v_0(x). \quad (4.23)$$

C'est exactement le même système que (4.1) pour $w = 0$.

On dira que le couple (u, v) est une solution entropique du système (4.21)–(4.23) si u et v ont les mêmes régularités que dans la définition 4.1, $T_\gamma(u)$ et $T_\gamma(v)$ appartiennent à

$\bigcap_{l=1}^N L^{p_l}(0, T; W^{1, p_l, l}(\Omega))$, et vérifient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} S_{\gamma}(u - \varphi)(T, x) dx - \int_{\Omega} S_{\gamma}(u_0(x) - \varphi(0, x)) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \langle \partial_t \varphi, T_{\gamma}(u - \varphi) \rangle dx dt \\ & \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{A}_1(t, x, \nabla u) + u \mathbf{K}_1(t, x)) \cdot \nabla T_{\gamma}(u - \varphi) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} r_1(t, x, u, v) T_{\gamma}(u - \varphi) dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \sigma(t, x, u, v) T_{\gamma}(u - \varphi) dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} b(u + v) T_{\gamma}(u - \varphi) dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} m u T_{\gamma}(u - \varphi) dx dt \leq \int_0^T \int_{\Omega} f T_{\gamma}(u - \varphi) dx dt, \quad (4.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} S_{\gamma}(v - \psi)(T, x) dx - \int_{\Omega} S_{\gamma}(v_0(x) - \psi(0, x)) dx + \int_0^T \int_{\Omega} \langle \partial_t \psi, T_{\gamma}(v - \psi) \rangle dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{A}_2(t, x, \nabla v) + v \mathbf{K}_2(t, x)) \cdot \nabla T_{\gamma}(v - \psi) \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} r_2(t, x, u, v) T_{\gamma}(v - \psi) dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \sigma(t, x, u, v) T_{\gamma}(v - \psi) dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} (m + \alpha) v T_{\gamma}(v - \psi) dx dt \leq \int_0^T \int_{\Omega} g T_{\gamma}(v - \psi) dx dt, \quad (4.25) \end{aligned}$$

pour tout $\gamma > 0$ et $\varphi, \psi \in \bigcap_{l=1}^N L^{p_l}(0, T; W^{1, p_l, l}(\Omega)) \cap L^{\infty}(Q_T) \cap C([0, T]; L^1(\Omega))$ tels que

$$\partial_t \varphi, \partial_t \psi \in \sum_{l=1}^N L^{\frac{p_l}{p_l-1}}(0, T; (W^{1, p_l, l}(\Omega))').$$

Existence des solutions entropiques. On construit des solutions approchées de la même manière que dans ([A2]). On montre que les suites

$$(T_{\gamma}(u_{\varepsilon}))_{\varepsilon} \text{ et } (T_{\gamma}(v_{\varepsilon}))_{\varepsilon} \text{ sont uniformément bornées dans } \bigcap_{l=1}^N L^{p_l}(0, T; W^{1, p_l, l}(\Omega)). \quad (4.26)$$

Ensuite, en s'inspirant des travaux de [11], [72], on considère $T_{\gamma}(u_{\varepsilon} - \varphi)$ et $T_{\gamma}(v_{\varepsilon} - \psi)$ comme fonction test puis on passe à la limite sur ε .

Unicité des solutions entropiques. On montre l'unicité dans le cas où le terme d'incidence $\sigma(t, x, u, v)$ et les termes $r_i(t, x, u, v)$ sont des fonctions Lipschitziennes par rapport aux densités u et v . La méthode utilisée a été introduite dans [11], [72]. Néanmoins de nouvelles difficultés apparaissent rattachées aux influences des termes de transport et des termes non linéaires. L'idée de la preuve est de démontrer que toute solution entropique est égale à la limite des solutions obtenues par le procédé d'approximation. Plus précisément, soit (u_2, v_2) une solution entropique définie par (4.24)-(4.25). Soit (u_1, v_1) la limite des approximants $(u_{1, \varepsilon})_{\varepsilon}, (v_{1, \varepsilon})_{\varepsilon}$. Alors $(u_2, v_2) = (u_1, v_1)$ presque partout dans $(0, T) \times \Omega$.

4.3. Modèle VLF (Virus de la Leucémie Féline) [A1]

Le développement clinique de l'infection du VLF commence par une phase d'infection transitoire qui se prolonge en moyenne de trois semaines à quatre mois, Hardy *et al.*, [51]. Dans ce modèle la population est structurée par états sanitaires en trois classes : les individus sensibles u , les infectés v , c'est à dire ceux qui transmettent la maladie aux sensibles, et les immunisés w . Les paramètres démographiques et épidémiologiques sont notés b et m pour le taux de fertilité et de mortalité naturelles, α étant le taux de mortalité additionnelle due à l'infection. En présence du virus, la classe des sensibles est constituée d'individus n'ayant pas la maladie mais qui sont capables de la développer, une proportion π devient continuellement virémique, et une proportion $(1 - \pi)$ devient immunisée.

Soit $\sigma(u, v, w)$ la fonction d'incidence, i.e. le nombre de nouveaux infectés par unité de temps. On considère que les contacts infectieux dépendent du comportement social des individus.

Le modèle (VLF) avec structuration spatiale dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^N s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - \operatorname{div}(\mathbf{A}_1 \nabla u + u \mathbf{K}_1) + r_1(t, x, u, v, w) = \\ \quad b(t, x)(u + w) - m(t, x)u - \sigma(t, x, u, v, w) + f(t, x), \\ v_t - \operatorname{div}(\mathbf{A}_2 \nabla v + v \mathbf{K}_2) + r_2(t, x, u, v, w) = \\ \quad \pi \sigma(t, x, u, v, w) - (m(t, x) + \alpha(t, x))v + g(t, x), \\ w_t - \operatorname{div}(\mathbf{A}_3 \nabla w + w \mathbf{K}_3) + r_3(t, x, u, v, w) = \\ \quad (1 - \pi)\sigma(t, x, u, v, w) - m(t, x)w + h(t, x); \end{array} \right. \quad (4.27)$$

avec des conditions aux limites de type flux nul.

Typiquement le terme de mortalité ou d'auto-régulation r_i est de la forme

$$r_i(t, x, u, v, w) = k_i(t, x) u_i |u + v + w|^{p-1}, \text{ avec } u_i = u, v, w,$$

alors que le terme d'incidence $\sigma(t, x, u, v, w)$ ayant dans les applications l'une des formes suivantes :

$$\sigma(t, x, u, v, w) = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1(t, x) u v, \text{ action a masse} \\ \sigma_2(t, x) \frac{u v}{u + v + w}, \text{ mélange proportionnel} \\ \sigma_3(t, x) \frac{(u + v + w)^\nu}{1 + (u + v + w)^\nu} \frac{u v}{u + v + w}, \quad \nu > 0. \end{array} \right.$$

\mathbf{A}_i vérifie l'hypothèse de coercivité, \mathbf{K}_i et sa divergence sont bornés. Les conditions initiales u_0, v_0, w_0 et les données f, g, h sont positives et intégrales.

Définition 4.2. — Soit $1 \leq q < \frac{N+2}{N+1}$ si $N \geq 2$ et $1 \leq q < \frac{4}{3}$ si $N = 1$. Une solution faible du système (4.27) est un triplet (u, v, w) de fonctions positives ou nulles dans $L^q(0, T; W^{1,q}(\Omega)) \cap L^p(0, T; L^p(\Omega)) \cap C([0, T]; L^1(\Omega))$ tel que $\sigma(\cdot, \cdot, u, v, w)$ et $r_i(\cdot, \cdot, u, v, w)$,

pour $i = 1, 2, 3$ sont dans $L^1(Q_T)$ et satisfont

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} u \varphi_t \, dxdt - \int_{\Omega} \varphi(0, x) u_0(x) dx + \int_{Q_T} (\mathbf{A}_1 \nabla u + u \mathbf{K}_1) \cdot \nabla \varphi \, dxdt \\ & + \int_{Q_T} m(t, x) u \varphi \, dxdt - \int_{Q_T} b(t, x) (u + w) \varphi \, dxdt \\ & \int_{Q_T} \sigma(t, x, u, v, w) \varphi \, dxdt + \int_{Q_T} r_1(t, x, u, v, w) \varphi \, dxdt = \int_{Q_T} f \varphi \, dxdt, \end{aligned}$$

pour tout $\varphi \in C_c^1([0, T[\times \Omega)$; ainsi que des formulations analogues pour les variables v et w du système (4.27).

Théorème 4.2. — Pour tout f, g et $h \in L^1_+(Q_T)$ et $u_0, v_0, w_0 \in L^1_+(\Omega)$, sous l'une des conditions suivantes :

- $\mathbf{K}_i(t, x) \cdot \eta(x) \geq 0$ p.p. $(t, x) \in \Sigma_T, i = 1, 2, 3$;
- $p \geq 2$;
- $N = 1$;

le système (4.27) admet une solution faible positive ou nulle.

La première condition est une condition standard (voir [66]), dans le contexte des systèmes réaction-diffusion. Ensuite, $p = 2$ est une condition naturelle pour le modèle logistique qui se trouve dans [37]-[26]. Les solutions sont plus régulières en dimension 1, et on utilise comme dans [A10] un résultat de compacité relative à la dimension 1 pour conclure avec la troisième condition.

Le système (4.27) est très proche de celui traité dans la section 4.1 pour des équations homogènes et par conséquent la même démarche est utilisée pour établir ce théorème.

4.4. Modèle m -proies et n -prédateurs [A4]

On s'intéresse à un système d'EDP non linéaire modélisant l'interaction entre m -proies et n -prédateurs; $u_j(t, x)$ et $v_i(t, x)$, pour $i = 1, m$ et $j = 1, n$ représentent respectivement les tailles des populations de prédateurs et de proies à la position x et à l'instant t . Les différents paramètres démographiques, liés à la prédation, sont notés a_j et r_i pour les taux de mortalité et de croissance des proies, e_i l'efficacité de conversion, $1/p_i$ le temps de recherche dépensé par un prédateur pour trouver sa proie et p_i/q_i le temps de manipulation des proies capturées. Ce modèle est semblable à ceux dans Alikakos [1] et Chow et al. [24]. On y reprend une hypothèse dans le rapport avec des modèles écologiques de type "food pyramid condition", qui modélise

la compétition entre n prédateurs. Le modèle s'écrit pour $1 \leq j \leq n$ et $1 \leq i \leq m$:

$$\begin{aligned} \partial_t v_i - \operatorname{div}(\mathbf{D}_{v_i}(t, x) \nabla v_i + v_i \mathbf{K}_{v_i}) &= r_i(t, x) v_i \\ &- k_i(t, x) |\vartheta(t, x)|^{\sigma_i - 1} v_i - \sum_{1 \leq j \leq n} h_{i,j}(t, x, u_j, v_i) + f_i(t, x), \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \partial_t u_j - \operatorname{div}(\mathbf{D}_{u_j}(t, x) \nabla u_j + u_j \mathbf{K}_{u_j}) &= -a_j(t, x) u_j \\ &+ \sum_{1 \leq i \leq m} e_i(t, x) h_{i,j}(t, x, u_j, v_i) - \sum_{j+1 \leq k \leq n} C_{k,j}(t, x, u_k, u_j) \\ &+ \sum_{1 \leq k \leq j-1} d_{k,j}(t, x) C_{k,j}(t, x, u_k, u_j) + g_j(t, x) \end{aligned} \quad (4.29)$$

dans $Q_T = (0, T) \times \Omega$, et avec les conditions aux limites sur $\Sigma_T = (0, T) \times \partial\Omega$ de type flux nul :

$$\begin{cases} (\mathbf{D}_{v_i}(t, x) v_i(t, x) + v_i(t, x) \mathbf{K}_{v_i}(t, x)) \cdot \eta(x) = 0, \\ (\mathbf{D}_{u_j}(t, x) u_j(t, x) + u_j(t, x) \mathbf{K}_{u_j}(t, x)) \cdot \eta(x) = 0, \end{cases} \quad (4.30)$$

et les conditions initiales positives ou nulles :

$$v_i(x, 0) = v_i^0(x) \geq 0, \quad u_j(x, 0) = u_j^0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega. \quad (4.31)$$

Ici, $\vartheta(t, x) = \sum_{1 \leq l \leq m} v_l(t, x)$, est la population totale des proies, et $h_{i,j}(t, x, u, v) =$

$\frac{p_{i,j}(t, x)v}{1 + q_{i,j}(t, x)v}u$ fait référence à la réponse fonctionnelle de type Holling II de prédation entre la proie i le prédateur j . L'interaction entre le prédateur k et le prédateur j donnée par $C_{k,j}(t, x, u, v) = c_{k,j}(t, x)uv$. On suppose que les données f_i, g_j sont positives ou nulles et les conditions initiales v_i^0, u_j^0 sont dans L^1 .

Dans le système (4.28)–(4.29), toutes les fonctions sont positives ou nulles et bornées et on suppose de plus

$$0 < r_0 \leq r_i(t, x) \leq r_{max}, \text{ p.p. } (t, x) \in Q_T \quad (4.32)$$

$$0 < k_0 \leq k_i(t, x) \leq k_{max}, \text{ p.p. } (t, x) \in Q_T, \quad (4.33)$$

la matrice de diffusion \mathbf{D}_α , $\alpha = v_i, u_j$ est \underline{a} -coercif

$$\mathbf{D}_\alpha(t, x) \xi \cdot \xi \geq \underline{a} |\xi|^2 \text{ p.p. } (t, x) \in Q_T, \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad (4.34)$$

et le vecteur de diffusion satisfait

$$\mathbf{K}_\alpha \in (L^\infty(Q_T))^N \text{ et } \operatorname{div} \mathbf{K}_\alpha \in L^\infty(Q_T) \quad (4.35)$$

On remarque que si $q_{i,j} = 0$ et $\sigma_i = 2$, le modèle est celui de Lotka-Volterra ; dans ce cas le terme $h_{i,j}$ a les mêmes propriétés que $C_{k,j}$.

Quand l'advection est ignorée et $g_j = 0$, ce modèle est semblable à ceux dans [1] et [24] dans le rapport avec des modèles écologiques. L'hypothèse de base de type "food pyramid condition", comme dans Alikakos [1],

$$B_j(t, x, u_1, \dots, u_n) = - \sum_{j+1 \leq k \leq n} c_{k,j}(t, x) u_k + \sum_{1 \leq k \leq j-1} d_{k,j}(t, x) c_{k,j}(t, x) u_k;$$

est : étant donnés n prédateurs vivants isolés dans une certaine région on peut les ranger dans un ordre arithmétique et de telle façon que le prédateur j puisse se nourrir de n'importe quel prédateur k ($k \leq j - 1$) et ne peut se nourrir du prédateur k ($k \geq j + 1$). Par conséquent, la croissance de l'espèce i doit être limitée par l'alimentation disponible, qui est l'ampleur de l'espèce j .

Définition 4.3. — On suppose que $N \geq 2$; soit $1 \leq q < \frac{N+2}{N+1}$. Une solution faible du problème (4.28)–(4.31), est une fonction positive ou nulle $((u_j)_{1 \leq j \leq n}, (v_i)_{1 \leq i \leq m})$ tel que, pour $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq k \leq j - 1$ ou $j + 1 \leq k \leq n$:

$$u_j \in L^q((0, T); W^{1,q}(\Omega)) \cap C([0, T]; L^1(\Omega)),$$

$$v_i \in L^q((0, T); W^{1,q}(\Omega)) \cap L^{\sigma_i}((0, T); L^{\sigma_i}(\Omega)) \cap C([0, T]; L^1(\Omega)),$$

$$h_{i,j}(\cdot, \cdot, u_j, v_i) \in L^1(Q_T), \quad C_{k,j}(\cdot, \cdot, u_k, u_j) \in L^1(Q_T), \quad k_i(\cdot, \cdot) \vartheta^{\sigma_i-1} v_i \in L^1(Q_T),$$

et satisfaisant

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} v_i \partial_t \varphi_i dx dt - \int_{\Omega} \varphi_i(x, 0) v_i^0(x) dx + \int_{Q_T} (\mathbf{D}_{v_i} \nabla v_i + v_i \mathbf{K}_{v_i}) \cdot \nabla \varphi_i dx dt \\ = & \int_{Q_T} \int_0^T (r_i v_i - k_i \vartheta^{\sigma_i-1} v_i) \varphi_i dx dt - \int_{Q_T} \sum_{1 \leq j \leq n} h_{i,j}(u_j, v_i) \varphi_i dx dt + \int_{Q_T} f_i \varphi_i dx dt, \\ & - \int_{Q_T} u_j \partial_t \psi_j dx dt - \int_{\Omega} \psi_j(x, 0) u_j^0(x) dx + \int_{Q_T} (\mathbf{D}_{u_j} \nabla u_j + u_j \mathbf{K}_{u_j}) \cdot \nabla \psi_j dx dt \\ = & - \int_{Q_T} a_j u_j \psi_j dx dt + \int_{Q_T} \sum_{1 \leq i \leq m} e_i h_{i,j}(u_j, v_i) \psi_j dx dt \\ & - \int_{Q_T} \sum_{j+1 \leq k \leq n} C_{k,j}(u_k, u_j) \psi_j dx dt + \int_{Q_T} \sum_{1 \leq k \leq j-1} d_{k,j} C_{k,j}(u_k, u_j) \psi_j dx dt + \int_{Q_T} g_j \psi_j dx dt, \end{aligned}$$

pour tout $\varphi_i, \psi_j \in C_c^1([0, T] \times \bar{\Omega})$.

Théorème 4.3. — Soit $u_j^0, v_i^0 \in L_+^1(\Omega)$ et $f_i, g_j \in L_+^1(Q_T)$. Alors, sous l'une des conditions suivantes pour $1 \leq j \leq n$ et $1 \leq i \leq m$:

$$\mathbf{K}_{u_j}(t, x) \cdot \eta(x) \geq 0, \quad \mathbf{K}_{v_i}(t, x) \cdot \eta(x) \geq 0 \quad p.p. \quad (t, x) \in \Sigma_T \quad \text{et} \quad \sigma_i > 1, \quad (4.36)$$

$$\mathbf{K}_{u_j}(t, x) \cdot \eta(x) \geq 0 \quad p.p. \quad (t, x) \in \Sigma_T \quad \text{et} \quad \sigma_i \geq 2, \quad (4.37)$$

le système admet une solution faible au sens de la définition 4.3.

La première condition (4.36) est une hypothèse classique dans le contexte des systèmes de réaction-diffusion tandis que la deuxième condition est la condition naturelle dans le cas logistique ($\sigma_i = 2$). La technique utilisée pour prouver ce théorème est celle développée précédemment concernant les systèmes de réaction-diffusion à données L^1 et en se servant de la structure triangulaire des termes de compétition entre prédateurs.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Une difficulté importante de l'analyse des écoulements compressibles en milieu poreux réside souvent dans les dégénérescences des termes dissipatifs en saturation et des termes d'évolutions. Le comportement de la pression capillaire quand une phase est absente conditionne le type de dégénérescence. Notre approche consiste à caractériser les solutions, selon le type de dégénérescence, soit par une solution faible classique soit par une solution faible dégénérée. Cette dernière approche permet de vérifier formellement l'équation de la saturation, multipliée par une fonction également dégénérée, dans le domaine sauf sur un sous-ensemble de mesure arbitrairement petite. Il est clair que c'est un premier pas vers la compréhension des écoulements compressibles dégénérés et une multitude de questions demeurent pour l'instant sans réponse. Néanmoins, la démarche utilisée pour traiter les écoulements eau/gaz évite la notion des solutions faibles dégénérées et s'appuie sur des estimations d'énergie tenant compte du couplage fortement non-linéaire du système. Ainsi, nous pouvons espérer obtenir des nouveaux résultats pour des modèles diphasiques dans un cadre général. Il est également intéressant de regarder la stabilité numérique du schéma proposé pour approcher les écoulements eau/gaz. En effet, l'étude théorique a mis en évidence des instabilités potentielles lorsque certaines perturbations sont introduites dans le système.

Les problèmes académiques de la cavité entraînée et la cavité différentiellement chauffée font toujours couler beaucoup d'encre. D'une part, il y a peu de résultats fiables sur la détermination de la première bifurcation de Hopf. D'autre part, peu de méthodes permettent de calculer des solutions correctes à grand nombre de Reynolds car cela nécessite à la fois une méthode de calcul stable et une approximation précise des termes de convection. L'algorithme proposé permet de capter de façon précise les solutions stationnaires, les solutions périodiques et de donner le comportement qualitatif des solutions pour de grand nombre de Reynolds ou nombre de Rayleigh. Afin de capter les solutions tourbillonnaires, il est nécessaire d'avoir des solutions précises dans la couche limite et donc d'avoir un niveau de raffinement du maillage très élevé au voisinage des parois. Les algorithmes de décomposition de domaines de type Schwartz, avec et sans recouvrement, ne sont pas adaptés aux équations de Navier-Stokes parce qu'ils n'assurent pas la conservation du débit aux interfaces. Il serait alors intéressant de considérer le maillage comme étant un maillage composite et de discrétiser l'opérateur sur

ce type de maillage afin d'assurer la condition d'incompressibilité. D'autre part, la méthode multigrille peut être généralisée sur des maillages composites.

Les données en dynamique des populations, à savoir les termes sources et les densités initiales, sont naturellement des fonctions positives et dans L^1 . On s'est restreint à l'étude dans ce cadre, en s'intéressant à des modèles épidémiologiques tels que les modèles VIF, VLF ou des modèles d'interactions entre populations (proies-prédateurs). Il serait toutefois intéressant de construire des schémas numériques robustes et stables afin de simuler les différents phénomènes. On s'intéresse actuellement à des problèmes simplifiés modélisant la propagation de l'épidémie de la grippe et à un modèle simplifié de chimiotactisme d'un point de vue théorique et numérique.

PUBLICATIONS

Articles publiés

- [A1] M. Bendahmane, M. Langlais, M. Saad, *Existence of solutions for reaction-diffusion systems with L^1 -data*, Differential and Integral Equations, Vol. 7, no 6, 743-768, 2002.
- [A2] M. Bendahmane, M. Langlais, M. Saad, *On some anisotropic reaction-diffusion systems with L^1 -data*, Nonlinear Analysis, 54, 617–636, 2003.
- [A3] M. Bendahmane, M. Saad, *Entropy solution of anisotropic reaction-diffusion-advection systems*, Revista Matematica Complutense, 18, Num. 1, 49–67, 2005.
- [A4] M. Bendahmane, M. Saad, *A predator-prey system with L^1 -data*, J. Math. Anal. Appl. 277 (2003) 272-292.
- [A5] Ch.-H. Bruneau, F. Marpeau, M. Saad, *Numerical simulation of the miscible displacement of radionuclides in an heterogeneous porous medium*, sous presse Int. J. Numer. Meth. Fluids
- [A6] Ch.-H. Bruneau, M. Saad, *From steady to chaotic solutions in a differentially heated cavity of aspect ratio 8*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 40 :1093-1107, 2002.
- [A7] Ch.-H. Bruneau, M. Saad, *The 2D lid-driven cavity problem revisited* sous presse JCP
- [A8] P. Fabrie, M. Saad, *Existence de solutions faibles pour un modèle d'écoulement triphasique en milieu poreux*. Ann. Fac. Sci. Toulouse, 2(3) :p. 337-373, 1993.
- [A9] C. Galusinski, M. Saad, *On a degenerate parabolic system for compressible immiscible two-phase flows in porous media*, Advances in Differential Equations, Volume 9, number 11-12, pages 1235–1278 (2004).
- [A10] T. Goudon, M. Saad, *On a Fokker-Planck equation arising in population dynamics*. Revista Matematica Vol.11, n2 p. 353-372, 1998.
- [A11] T. Goudon, M. Saad, *Parabolic equations involving O^{th} and 1^{st} order terms with L^1 data*. Revista Matematica Iberoamerican, Vol. 17, no 3, pp. 433-469, 2001.
- [A12] M. Saad, *An accurate numerical algorithm for solving three-phase flow in porous media*. Applicable Analysis, Vol. 66, pp. 57-88, 1997.

- [A13] M. Saad, *A unilateral problem for elliptic equations with quadratic growth and L^1 -data*. Nonlinear Analysis TMA, Vol. 44, no 2, 217-238, 2001
- [A14] M. Saad, *Ensembles inertiels pour un modèle de convection naturelle, dissipatif, en milieu poreux*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 316, Série I, p. 1277-1280, 1993.
- [A15] M. Saad, H. Zhang. *Front tracking for two-phase in reservoir simulation by adaptive mesh*. Numerical Methods for Partial differential equations. **13** : 673-697, 1997.

Articles soumis

- [A16] C. Galusinski, M. Saad, *A nonlinear degenerate system modeling water-gas in reservoir flow*.
- [A17] F. Marpeau, M. Saad, *Displacement of radioactive elements in porous media with non-linear adsorption* .
- [A18] Ch.-H. Bruneau, M. Saad, *The behaviour of high Reynolds flows in a driven cavity*.

Proceedings

- [B1] Ch.-H. Bruneau, M. Saad, *New-Bench-mark results for the 2D lid-driven cavity problem*, In Proceedings of the conference : ICCF2, Sydney 2002.
- [B2] Ch.-H. Bruneau, M. Saad, *Computation of natural convection flows in the 8 :1 enclosure by a multigrid method*, In Proceedings of the conference : 1st MIT Conf. on Comp. Fluid and Solid Mech., 2001.
- [B3] C. Galusinski, M. Saad, *Water gas flows in porous media*, fifth AIMS Meeting (Pomona) (2004), et article soumis.
- [B4] M. Saad, *Numerical study for secondary recuperation of hydrocarbons in porous media*. In Proceedings of the conference : mathematical modelling of flow through porous media, World Scientific, Editors Bourgeat, Carasso, Luckhaus, Mikelic. p. 495-505, 22-26 MAY 1995.
- [B5] M.Saad, H. Zhang, *Adaptive mesh for two-phase flow in porous media*. In Proceedings of the conference (May 1996 Maroc) : Recent advances in problems of flow and transport in porous media, p. 179-193. Kluwer Academic Publishers. MAY 1996 Maroc.
- [B6] M. Saad, H. Zhang, *Object oriented programming techniques and FAC method in numerical reservoir simulation*. In 8th Copper mountain conference on multigrid methods. April 1997, colorado, USA

Rapport interne non publié

- [R] M. Saad, *Modelling of compressible two-phase flows in porous media* Rapport MAB, UMR 5466, U-04-12

Thèse.

- [T] M. Saad, *Propriétés de quelques modèles d'écoulements en milieu poreux*. Thèse de l'Université Bordeaux 1. Soutenue le 20 décembre 1993.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. D. Alikakos, *An application of the invariance principle to reaction-diffusion equations*, J. Differential Equations 33 (1979), no. 2, 201–225.
- [2] H.-W. Alt, S. Luckhaus, *Quasilinear elliptic-parabolic differential equations*, Math. Zeitschrift **183** (1983) 311–341.
- [3] Y. Amirat, K. Hamdache, A. Ziani, *Homogenization of a model of compressible miscible flow in porous media*, Boll. Unione Mat. Ital., VII. Ser., B (1991), 463–487.
- [4] Y. Amirat, K. Hamdache, A. Ziani, *Mathematical analysis for compressible miscible displacement models in porous media*, Math. Models Methods Appl. Sci., 6, no. 6 (1996), 729–747.
- [5] Y. Amirat, A. Ziani, *Global weak solutions for a parabolic system modeling a one-dimensional miscible flow in porous media*, J. Math. Anal. Appl, 220(2) (1998), 697–718.
- [6] L. Arlotti, N. Bellomo, *Solution of a new class of nonlinear kinetic models of population dynamics*, Appl. Math. Lett., 9, 65-70 (1996).
- [7] P.J. Aston, M. Dellnitz, *The computation of Lyapunov exponents via spatial integration with application to blowout bifurcations. Computational methods and bifurcation theory with applications*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **170** n° 3-4, 1999.
- [8] F. Auteri, N. Parolini, L. Quartapelle, *Numerical investigation on the stability of singular driven cavity flow*, J. Comput. Phys. **183** n° 1, 2002.
- [9] K. Aziz , A. Settari, *Petroleum reservoir simulation*, Applied Science Publisher LTD, London, (1979).
- [10] N. Bellomo, M. Lachowicz, *Mathematical biology and kinetic theory*, Nonlinear kinetic theory and mathematical aspects of hyperbolic systems, Boffi et al. Eds., pp. 11-20 (World Sci., 1992).
- [11] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, J. L. Vazquez, *An L^1 -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **22** (1995) no.2, 241-273.
- [12] D. Blanchard, F. Murat, *Renormalized solutions of non-linear parabolic problems with L^1 data : Existence and uniqueness*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **127** (1997), no.6, 1137-1152.
- [13] L. Boccardo, A. Dall’Aglia, T. Gallouët, L. Orsina, *Non-linear parabolic equations with measure data*, J. Funct. Anal., **147**, 237-258, 1997.
- [14] L. Boccardo, T. Gallouët, *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data*, J. Funct. Anal. **87** (1989) 149-169.

- [15] L. Boccardo, T. Gallouët, P. Marcellini, *Anisotropic equations in L^1* , Differential Integral Equations 9 (1) (1996) 209–212.
- [16] L. Boccardo, F. Murat, J.P. Puel. *Existence de solutions non bornées pour certaines équations quasi-linéaires*, Portugaliae Mathematica, 41(1-4) :p. 507–534, 1982.
- [17] L. Boccardo, F. Murat, J.P. Puel. *Existence de solutions faibles pour des équations quasilineaires à croissance quadratique*, Nonlinear partial differential equations and their applications, Collège de France Seminar. ed. by H. Brézis and J.L. Lions, vol 4. p. 19-73, Research Notes in Mathematics, 84, Pitmann, London, 1983.
- [18] L. Boccardo, F. Murat, J.P. Puel, *Existence of bounded solutions for nonlinear elliptic unilateral problems*, Ann. Mat. Pura Appl., 152 :p. 183–196, 1988.
- [19] O. Botella, R. Peyret, *Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow*, Comput. Fluids **27** n° 4, 1998.
- [20] Ch.-H. Bruneau, P. Fabrie, P. Rasetarinera, *Accurate finite differences schemes to solve convection - dominated diffusion equations*, Int. J. Numer. Methods Fluids **24** n° 2, 1997.
- [21] Ch.-H. Bruneau, C. Jouron, *An efficient scheme for solving steady incompressible Navier-Stokes equations*, J. Comput. Phys. **89**, No.2, 389-413, 1990.
- [22] Y. Caillaud, P. Fabrie, P. Landereau, B. Noetinger, M. Quintard, *Implementation of a finite-volume method for the determination of effective parameters in fissured porous media*, Numer. Methods Partial Differential Equations, **16**, 2000, 2, 237–263,
- [23] G. Chavent, J. Jaffre, *Mathematical models and finite elements for reservoir simulation. Single phase, multiphase and multicomponent flows through porous media*, Studies in Mathematics and its Applications ; 17, North-Holland Publishing Comp., 1986.
- [24] P.L. Chow, S. Williams , *Nonlinear reaction-diffusion models*, J. Math. Anal. Appl. 62 (1978), 157-169.
- [25] M.A Christon, P.M. Gresho, S.M. Sutton, *Computational predictability of natural convection in enclosures*, 1st MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, 2001.
- [26] F. Courchamp, D. Pontier, M. Langlais, M. Artois, *Population dynamics of Feline Immunodeficiency Virus within cat population*, J. Theoret. Biol. 175 (1995) 553-560.
- [27] A. Dall’aglio, L. Orsina. *Nonlinear parabolic equations with natural growth conditions and L^1 data*, Nonlinear analysis T.M.A., 27(1), 59-73, 1996.
- [28] T. Del Vecchio. *Strongly nonlinear problems with gradient dependent lower order nonlinearity*, Nonlinear Analysis, Methods and Applications, 11(1) :p. 5–15, 1987.
- [29] J.Jr. Douglas, J.E. Roberts, *Numerical methods for a model for compressible displacement in porous media*, Math. Comp., 41 (1983), 441–459.
- [30] P. Fabrie, T. Gallouët, *Modeling wells in porous media flow*, Math. Models Methods Appl., 10, no 5 (2000), 673–709.
- [31] P. Fabrie, P. Le Thiez, P. Tardy, *On a system of nonlinear elliptic and degenerate parabolic equations describing compositional water-oil flows in porous media*, Nonlinear Anal., 28, no 9 (1997), 1565–1600.
- [32] P. Fabrie, M. Langlais, *Mathematical analysis of miscible displacement in porous medium*, SIAM J. Math. Anal., 23, no 6 (1992), 1375–1392.
- [33] X. Feng, *Strong solutions to a nonlinear parabolic system modeling compressible miscible displacement in porous media*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., 23(12) (1994), 1515–1531.

- [34] X. Feng, *On existence and uniqueness results for a coupled systems modelling miscible displacement in porous media*, J. Math. Anal. Appl., 194(3) (1995), 883–910.
- [35] P.A. Forsyth : *Adaptive implicit criteria for two-phase flow with gravity and capillary pressure*, SIAM, J. Sci. Stat. Comput.vol 10, No 2, pp. 227-252, March (1989).
- [36] A. Fortin, M. Jardak, J.J. Gervais, R. Pierre, *Localization of Hopf bifurcations in fluid flow problems*, Int. J. Numer. Methods Fluids **24** n° 11, 1997.
- [37] E. Fromont, M. Artois, M. Langlais, F. Courchamp, D. Pontier, *Modelling the feline leukemia virus FeLV in natural populations of cats (felis catus)*, Theoret. Pop. Biol. 52 (1997) 60.
- [38] W. E. Fitzgibbon, M. Langlais, J. J. Morgan, *Diffusive SEIR models with logistic population control*, Commun. Appl. Nonlinear Anal. 4, No.3, (1997). 1-16.
- [39] W. E. Fitzgibbon, M. Langlais, J. J. Morgan, *Eventually uniform bounds for a class of quasipositive reaction diffusion systems*, Japan I. Indust. Appl. Math. 16 (1999), No.2, 225-241.
- [40] W. E. Fitzgibbon, M. Langlais, J. J. Morgan, *A mathematical model of the spread of Feline Leukemia Virus (FeLV) through a highly heterogeneous spatial domain*, SIAM J. Math. Analysis, 33 (3), 2001, 570-588.
- [41] W.E. Fitzgibbon, M. Langlais et J.-J. Morgan, *Modeling the Spread of Feline Leukemia Virus in Heterogeneous Habitats*, Fields Institute Communications, 29, 2001, 133-146.
- [42] A. Huser, S. Biringen, *Calculation of two-dimensional shear-driven cavity flows at high Reynolds numbers*, Int. J. Numer. Methods Fluids **14** n° 9, 1992.
- [43] E. Jager, L. Segel, *On the distribution of dominance in populations of social organisms*, SIAM Appl. Math., 52, 1442-1468 (1992).
- [44] G. Gagneux, M. Madaune-Tort, *Analyse mathématique de modèles non linéaires de l'ingénierie pétrolière*, Mathématiques and Applications, 22, Springer Verlag, 1995.
- [45] T. Gallouët. *Equations elliptiques semilinéaires avec, pour la non linéarité, une condition de signe et une dépendance sous quadratique par rapport au gradient*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, IX(2) :p. 161–169, 1988.
- [46] T. Gallouët, R. Herbin, *Existence of a solution to a coupled elliptic system*, Appl. Math. Lett., 7, no. 2, 49–55, 1994
- [47] U. Ghia, K.N. Ghia, C.T. Shin, *High-Re solutions for incompressible flows using Navier-Stokes equations and a multigrid method*, J. Comput. Phys. **48**, 1982.
- [48] U. Goodrich, *An unsteady time-asymptotic flow in the square driven cavity*, IMACS 1st Int. Conf. Comp. Physics Boulder, 1990.
- [49] O. Grange and F. Mignot, *Sur la Résolution d'une équation et d'une inéquation Paraboliques non Linéaires*, Journal of Functional Analysis, **11** (1972) 77–92.
- [50] W. Hackbush, *Multigrid methods and applications*, Springer-Verlag, 1985.
- [51] W. D. Jr. Hardy, A. J. McClelland, E. E. Zuckermann, P. W. Hess, M. Essex, S. M. Cotter, E. G. McEwen and A. A. Hayes, *Prevention of the contagious spread of feline Leukemia Virus and the development of leukemia in pet cats*, Nature 263 (1976), 326-328.
- [52] T. Hermitte : *Maillage adaptatif en espcce dans le simulations de gisements pétroliers*, Thèse de l'universite de provence Aix-Marseille 1.(1993).
- [53] J.L. Kadzan, R.J. Kramer, *Invariant criteria for existence of solutions of second order quasilinear elliptic equations*, Comm. Pure. Appl. Math., 31 :p. 619–645, 1978.

- [54] T. Kawamura, H. Takami, K. Kuwahara, *New Higher-order upwind scheme for incompressible Navier-Stokes equations*, Lect. Notes Phys. **218**, 1985.
- [55] J. Kim, P. Moin, *Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equation*, J. Comput. Phys. **59**, 1985.
- [56] R. Kupperman, *A central-difference scheme for a pure stream function formulation of incompressible viscous flow*, SIAM J. Sci. Comp. **23** n° 1, 2001.
- [57] M. Langlais et Ch. Suppo, *A Remark on a Generic SEIRS Model and Application to Cat Retroviruses and Fox Rabies*, Mathematical and Computer Modelling, 31 (2000), 117-124.
- [58] D. Lanser, J.G.Verwer, *Analysis of operator splitting for advection-diffusion-reaction problems from air pollution modelling* Modelling, Analysis and Simulation (MAS), R9805, May 1998 ;
- [59] B.P. Leonard, *The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection* , Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **88** n° 1, 1991.
- [60] X. Le Tallec, P. Fabrie, M. Quintard, *Equations de transport hyperboliques et processus discontinus : déplacement diphasique en milieu poreux hétérogène*, C. R. A. S. Paris Sér. II Méc. Phys. Chim. Sci. Univers Sci. Terre, 312,1991, 1, 13–18.
- [61] J. Leray, J.L. Lions *Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder*. Bull. Soc. Math. France, 93 :p. 97–107, 1965.
- [62] A. Harten, *High resolution schemes for hyperbolic conservation laws*. J. Comp. Phys., 49, 357-393, (1983).
- [63] A. Harten, *On the symmetric form of systems of conservation laws with entropy*, J. Comp. Phys., 49, 151-164, (1983).
- [64] R. Lewandowski, *The mathematical analysis of the coupling of a turbulent kinetic energy equation to the Navier-Stokes equation with an eddy-viscosity*, Nonlinear Anal. TMA, vol. 28, n. 2, 393-417, 1997.
- [65] Li Fengquan, Z. Huixiu, *Anisotropic parabolic equations with measure data*, J. Partial Differ. Equations 14 (1) (2001), 21-30.
- [66] R. H. Martin, M. Pierre, *Non-linear reaction-diffusion systems*, Nonlinear equations in the applied sciences, Math. Sci. Engrg., 185, Academic Press, Boston, MA, (1992). 363-398.
- [67] J. Murray, *Mathematical Biology*, Springer Verlag, Berlin, 1989.
- [68] J.L. Lions *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, 1969.
- [69] P.-L. Lions *Mathematical topics in fluid mechanics, Incompressible models*, Oxford Lecture Series in Math. and its Appl., vol. 3, Clarendon Press, 1996.
- [70] T.W. Pan, R. Glowinski, *A projection/wave-like equation method for the numerical simulation of incompressible viscous fluid flow modeled by the Navier-Stokes equations*, Comp. Fluid Dyn. J. **9** n° 2, 2000.
- [71] Y-F. Peng, Y-H. Shiau, R. R. Hwang, *Transition in a 2-D lid-driven cavity flow*, Computers & Fluids **32**, 2002.
- [72] A. Prignet, *Existence and uniqueness of "entropy" solutions of parabolic problems with L^1 data*, Nonlinear Anal. T.M.A., 28, 1943-1954, 1997.
- [73] P. Le Quéré, M. Behnia, *From onset of unsteadiness to chaos in a differentially heated square cavity*, J. Fluid Mech. **359**, 1998.
- [74] J.M. Rakotoson, *A compactness lemma for quasilinear problems : application to parabolic equations*, J. Functional Analysis, 106 (1992) 358-374.

- [75] J.L. Randall, *Numerical methods for conservation laws*, in lectures in Mathematics, Birkhauser, 1990.
- [76] P.L Roe, *Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes*, J. Comp. Phys., 43, 357-372, (1981).
- [77] M. Sahin, R.G. Owens, *A novel fully-implicit finite volume method applied to the lid-driven cavity problem. Part I and II*, Int. J. Numer. Methods Fluids **42** n° 1, 2003.
- [78] R. Schreiber, H.B. Keller, *Driven cavity flows by efficient numerical techniques*, J. Comput. Phys. **49**, 1983.
- [79] G. Strang, *On the construction and comparison of difference schemes*, SIAM J. Numer. Anal., 1968, 5 :506-517.
- [80] PK. Sweby, *High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws*, SIAM J. Numer. Anal. 1984, **21** :995-1011.
- [81] M. Troisi, *Theoremi di Inclusione per Spazi di Sobolev nonisotropi*, Ricerche. Mat., 18 (1969) 3-24.
- [82] S.P. Vanka, *Block-implicit multigrid solution of Navier-Stokes equations in primitive variables*, J. Comput. Phys. **65**, 1986.
- [83] B. Van Leer : *Towards the ultimate conservative scheme IV, a new approach to the numerical conservation laws*. J. Comp. Phys. 23, 276-299, (1977)
- [84] B. Van Leer : *Towards the ultimate conservative scheme III, upstream-centered finite difference schemes for ideal compressible flow*. J. Comp. Phys. 23, 263-275, (1977)
- [85] J.A. Vila, *High order schemes and entropy condition for non linear hyperbolic systems of conservations laws*, Mathematics of Computation, 50, 181, 53-73, (1988).
- [86] J.A. Vila, *Construction of Roe type matrix, a new approach. Application to real gas dynamics*. Third international conference on hyperbolic problems, vol. I, II, pp. 913-922, (UPPSALO, 1990).
- [87] E. Weinan, J-G. Liu, *Finite difference schemes for incompressible flows in the velocity-impulse density formulation*, J. Comput. Phys. **130** n° 1, 1997.