Master de Recherche première année

Mention : Mathématiques et Applications
Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

RESPONSABLE : XUE PING WANG

Programme de cours 2008-2011

Module M1 : **Analyse fonctionnelle** (9 ECTS, UEF, 1er semestre, Cours 36h, TD 48h (XUE PING WANG))

1. Espaces de Banach
   - Espaces vectoriels normés. Espace de Banach. Applications linéaires continues.
   - Prolongement de formes linéaires continues, théorèmes de Hahn-Banach.
   - Étude de compacité : théorème de Riesz, théorème d'Ascoli.
2. Espaces de Hilbert
   - Projection sur un convexe fermé, projection orthogonale.
   - Représentation de Riesz. Lemme de Lax-Milgram.
   - Convergence faible et l'adjoint d'un opérateur dans les espaces de Hilbert.
   - Bases hilbertiennes. Série de Fourier dans $L^2(0, 2\pi)$. Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$.
3. Lemme de Baire et applications
   - Lemme de Baire.
   - Théorèmes de Banach-Steinhaus, de l'application ouverte et du graphe fermé.
4. Opérateurs linéaires continus
   - Spectre d'un opérateur linéaire continu.
   - Opérateurs compacts. Théorème de Fredholm.
   - Décomposition spectrale des opérateurs compacts auto-adjoints.

Module M2 : **Algèbre** (9 ECTS, UEF, 1er semestre, cours 36h, TD 48h (Vincent Franjou))

1. Modules de type fini sur un anneau principal
   - Module; modules noethériens
   - Suites exactes de modules
   - Structure des modules de type fini sur un anneau principal
   - Cas des Z-modules et des K[X]-modules.
   - Invariants de similitude, matrices réduites de Jordan
2. Extension de corps et théorie de Galois
   - Racines de l'unité, polynômes cyclotomiques
   - Corps de rupture, corps de décomposition. Clôture algébrique
   - Extension galoisienne
   - Groupe de Galois. Application de Galois
   - Théorème de Galois.
   - Corps finis.
   - Résolution par radicaux.

Module M3 : **Analyse numérique** (4 ECTS, UEF, Cours 16h, TD 16h, TP 10h (Rodolphe Turpault))

1. Approximation des fonctions numériques. Meilleure approximation au sens L^2 et L^∞. Bases de polynômes orthogonaux.
2. Intégration numérique avancée. Noyau de Peano. Formules de Gauss.
3. Approximation des équations aux dérivées partielles linéaires (EDP). Nature d'une EDP, exemples. Méthode des différences finies, consistance et stabilité. Application à l'équation de la chaleur et à l'équation des ondes.

Module M4 : **Calcul formel** (4 ECTS, UEF, 1er semestre, Cours 18h, TD 8h, TP 16h (Jean-Pol Guillement))

- Histoire du calcul.
- Présentation d'Unix et des shells.
- Présentation de Maple et du calcul formel.

- Algorithmique: parcours arborescents, traitements par séries génératrices,
- Algorithmique rapide: tris, multiplication polynômiale, transformation de Fourier rapide.
- Projets divers et variés.

Module M5 : **Histoire des Mathématiques** (3 ECTS, UED, 1er semestre, Cours 10h, TD 13h (Evelyne Barbin))

- le modèle axiomatico-déductif : axiomatique euclidienne, construction des géométries non-euclidiennes, axiomatique hilbertienne, fondement ensembliste, théorème de Gödel
- la notion de méthode dans l'histoire de la géométrie : méthode cartésienne, méthodes infinitésimales, méthode projective, méthodes de transformations et géométries de Klein
- le rôle des problèmes dans la construction des connaissances : problèmes arithmétiques et théorie des congruences de Gauss, problèmes analytiques et théorie des fonctions elliptiques
- la rectification des concepts : historique du concept de nombre jusqu'aux constructions des nombres réels (Dedekind et Cantor) et des nombres entiers (Peano)
- l'approche structurelle des mathématiques : structures algébriques (Dyck, Steinitz, Cartan) et topologiques (Fréchet, Hausdorff)
- calculabilité et théorie des graphes : fonctions récursives de Gödel et de Church, machine de Turing et automate de Kleene

Module M6 : **Géométrie différentielle (courbes et surfaces)** (9 ECTS, UEF, 2nd semestre, Cours 36h, TD 48h, (Laurent Guillopé))

1. Changement de variables
   - Inversion locale, fonctions implicites.
   - Courbes et surfaces, paramétrages vs équations, coordonnées
   - Vecteurs tangents, droite et plan tangents.
   - Changement de variables en intégration.
   - Longueur d'une courbe, aire d'une surface.
2. Équations différentielles
   - Champ de vecteurs et équation différentielle, trajectoires.

- Dépendance C^k par rapport aux conditions initiales et aux paramètres.
- Champ complet, flot, compatibilité avec les changements de coordonnées.
- Intégrale première.
- Intégration d'un champ de vecteurs plan et sur une surface, études qualitatives.

3. Étude locale des courbes planes et gauches.

   - Courbure, torsion, repère de Frenet-Serret,
   - Le théorème fondamental.
   - Développée et développante.
   - Enveloppe de droites.

4. Calcul des variations

   - Extrema liés.
   - Équation d'Euler-Lagrange.
   - Géodésiques sur une surface.

5. Étude locale des surfaces

   - Première et seconde formes fondamentales, calculs.
   - Signification géométrique : position par rapport au plan tangent.
   - Opérateur de forme, ombillics.
   - Repère de Darboux le long d'une courbe, courbures et torsions.
   - Courbes remarquables : ligne asymptotique, ligne de courbure, géodésique.
   - Surface de révolution, surface réglée, surface développable.

Module M7 : **Distributions et équations aux dérivées partielles** (8 ECTS, UEC, 2nd semestre, Cours 36h, TD 48h, (Georgi Popov))

1. Espaces des fonctions régulières : rappels et compléments d'intégration, notamment sur les convolutions et les partitions de l'unité dans $\mathbb{R}^n$.

2. Distributions dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Définition et propriétés élémentaires.

3. Opérations sur les distributions. Distributions à support compact. Distributions de simple couche et théorème de sauts. Théorème de la divergence et formule de Green.

4. Produit tensoriel de distributions et convolution. Solutions fondamentales.

5. L'espace de Schwartz et transformation de Fourier.

6. Distributions tempérées et transformation de Fourier. Espaces de Sobolev construits sur L^2 : théorèmes de densité, d'injection et de compacité.

7. Applications à l'équation de Schrödinger, au problème de Cauchy pour l'équation des ondes et à l'équation de la chaleur. Le problème de Dirichlet pour l'opérateur de Laplace.

Module M8 : **Analyse complexe** (8 ECTS, UEC, 2nd semestre, Cours 36h, TD 48h, (Didier Robert))

1. Révisions sur la théorie de Cauchy et le théorème des résidus.

2. Principe du maximum. Principe de Phragmen-Lindelöf.

3. Etude des zéros des fonctions holomorphes. Produits infinis. Théorème de Weierstrass. Formule de Jensen. Produits de Blaschke.

4. Transformations conformes. Théorème de Riemann. Transformations de Schwarz-Christoffel.

5. Equations différentielles linéaires dans le domaine complexe. Points singuliers. Théorème de Fuchs. Exemples : équations de Bessel et de Legendre.

6. Problèmes d'approximation et développements asymptotiques. Méthode de Laplace, phase stationnaire, méthode du col. Etude de séries : nombres et polynomes de Bernoulli. La formule d'Euler Mac-Laurin.

Module M9 : **Topologie algébrique** (8 ECTS, UEC, 2nd semestre, Cours 36h, TD 48h, (Andrei Pajitnov))

1. *Notions de base.* Exemples des espaces topologiques: sphères, espaces euclidiens, tores, surfaces. Topologie quotient, homéomorphisme, homotopie.

2. *Groupe fondamental.* Théorème de Van Kampen. Calculs des groupes fondamentaux: cercle, tores, bouquets de cercles, sphères.

3. *Revêtements.* Relations entre les groupes fondamentaux de l'espace total et de la base d'un revêtement. Revêtements galoisiens. Revêtement universel d'un espace topologique.

4. *Surfaces. Pavages du plan.*

Module M10 : **Géométrie algébrique** (8 ECTS, UEC, 2nd semestre, cours 36h, TD 48h, (Christoph Sorger))

1. Géométrie projective

   - Espace projectif, repère projectif. Morphismes de l'espace projectif. Homographie.
   - Étude de la droite projective : Birapport, division harmonique. Faisceau d'hyperplans projectifs.
   - Plan projectif : dualité. Coniques projectives, birapport de quatre points d'une conique, homographies d'une conique. Classifications.
   - Dualité par rapport à une conique non dégénérée : pôles et polaires, théorèmes de Pascal et de Brianchon.
   - Classification des quadriques projectives et affines en dimension 3.

2. Méthodes algébriques

   - Théorèmes des zéros de Hilbert
   - Lieu des zéros de polynômes, correspondance entre algèbres et ensembles algébriques.
   - Morphismes rationnels.
   - Théorème de Bézout.

Module M11 : **Optimisation** (8 ECTS, UEC, 2nd semestre, Cours 32h, TD 16h, TP 24h (Jean-Pol Guillement))

Ce module est en commun avec le Master première année de Mathématiques et Applications, spécialité : ingénierie mathématique.

1. (Rappels de calcul différentiel) Calcul des extrema, extrema liés, multiplicateurs de Lagrange

2. Programmation linéaire, méthode du Simplexe, dualité.

3. Optimisation en dimension un.

4. Généralités sur l'optimisation des fonctionnelles convexes. Cas des fonctionnelles quadratiques. Moindres-carrés linéaires.

5. Optimisation sans contrainte, algorithmes: Relaxation, Plus Profonde Descente, Newton, Métrique variable, Gradient Conjugué.

6. Optimisation avec contraintes, Kuhn-Tucker, points selles, lagrangien, dualité. Algorithmes: Relaxation, Pénalisation, Uzawa.

Module M12 : Probabilités (8 ECTS, UEC, 2nd semestre, Cours 36h, TD 48h, (Philippe Carmona))

1. Compléments d'intégration
   - Théorème des classes monotones
   - Théorème de Radon Nikodym
   - Uniforme Intégrabilité
2. Lois de Variables Aléatoires
   - Théorème du transport
   - Inégalités classiques
   - Fonctions caractéristiques
   - Fonctions de répartition
   - Transformée de Laplace
   - Le problème des moments
   - Matrice de covariance
   - Lois marginales
   - Indépendance
3. Convergence
   - Modes de convergence
   - Lemme de Borel Cantelli
   - Métrisabilité de la convergence en probabilité
   - Complétude des L^p
   - Convergence en loi : Théorème de Paul Lévy, Théorèmes de Prokhorov et Skorokhod, critères de tension
   - Loi des grands nombres
   - Théorème central limite
4. Conditionnement
   - Conditionnement Discret
   - Conditionnement Général : Définition,Lemme de Doob, caractérisation dans L^2
   - Lois conditionnelles
   - Le cas des vecteurs gaussiens : représentation, indépendance et conditionnement

5. Martingales discrètes

    - Filtrations et temps d'arrêt
    - Théorèmes d'arrêt
    - Inégalités maximales
    - Théorèmes de convergence des sous martingales, des martingales, des martingales inverses
    - Les martingales dans L^2
    - Applications : théorèmes des trois séries, loi des grands nombres, théorème de dichotomie de Kakutani

Module M0 : Travail d'étude et de recherche (TER) (6 ECTS, UEO, 2nd semestre, TP 40h))

Le TER est un stage d'initiation à la recherche encadré par un enseignant-chercheur. Il consiste en la lecture de textes mathématiques, complétée par une recherche bibliographique, qui conduit à la rédaction d'un mémoire et à un exposé oral.