INEGALITES ISOPERIMETRIQUES DE FABER-KRAHN ET CONSEQUENCES

0. Introduction

Soit (M,g) une variété riemannienne non compacte de volume infini, complète, connexe, de dimension n. S'il existe une constante $C>0$ et un $p\geq n$, tels que l'on ait l'inégalité isopérimétrique

$$\text{(0.1)} \qquad \operatorname{vol}(\partial\Omega)\geq C(\operatorname{vol}\Omega)^{1-\frac{1}{p}}, \text{ pour tout ouvert borné de } M,$$

la connaissance de la meilleure constante C telle que cette inégalité soit valable (que nous noterons Is_p) donne de nombreuses informations sur les propriétés analytiques de la variété : par exemple on peut en déduire des inégalités de Sobolev, ([F-F], [M], [Ch]), un contrôle du noyau minimal de l'opérateur de la chaleur $e^{-t\Delta}$ (où Δ est le Laplacien associé à la métrique g) ([D], [C-K-S]), une majoration de la fonction de Green positive minimale, ([G1], [G2], [C-F]), une minoration du volume des boules géodésiques, ou un contrôle du spectre des domaines compacts de M pour le problème de Dirichlet ([C-L]). Dans ce dernier cas, l'inégalité isopérimétrique (0.1) implique une version généralisée d'une inégalité prouvée par Faber et Krahn dans le cas euclidien ([F], [K1], [K2]) : nous avons l'existence d'une constante $B>0$ telle que la première valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet dans un ouvert borné Ω de M vérifie :

$$\text{(0.2)} \qquad \lambda_1^D(\Omega)\geq B(\operatorname{vol}\Omega)^{-2/p}.$$

Notons Λ_p la plus grande des constantes B pour laquelle cette inégalité est valable . Dans le cas euclidien, Faber et Krahn démontrent une inégalité du type (0.2) en partant de l'inégalité isopérimétrique (0.1) , pour $p=n$ (l'égalité ayant lieu si et seulement si Ω est une boule euclidienne). En fait la minoration est du type $\Lambda_p\geq J(p)Is_p^2$, où $J(p)$ est une fonction de p. Cependant, un contrôle en sens inverse (i.e. retrouver (0.1) à partir de (0.2)) n'est en général pas possible (voir la proposition 3.4). L'objet de cet article est principalement de retrouver à partir d'une inégalité isopérimétrique de Faber-Krahn du type (0.2) des résultats qui nécessitaient auparavant l'inégalité isopérimétrique (0.1). Etablir une telle inégalité sur des variétés non-compactes est en effet un problème difficile et généralement non résolu.

D'après [F-F] et [M], l'inégalité $Is_p>0$, où $Is_p=\inf\{\operatorname{vol}(\partial\Omega)/(\operatorname{vol}\Omega)^{1-\frac{1}{p}}:$ Ω ouvert borné de $M\}$, est équivalente à l'existence d'une constante $S>0$ telle que l'on ait l'inégalité de Sobolev :

$$\text{(0.3)} \qquad \|u\|_{L^{\frac{p}{p-1}}}\leq S\ \|du\|_{L^1},\ \forall u\in C_0^\infty(M)\ ;$$

de plus la meilleure constante validant l'inégalité ci-dessus vaut Is_p^{-1}. Dans le même esprit, nous montrerons que l'inégalité de Faber-Krahn $\Lambda_p>0$, où $\Lambda_p=\inf\{\lambda_1^D(\Omega)(\operatorname{vol}\Omega)^{\frac{2}{p}},\ \Omega \text{ ouvert borné de } M\}$, est équivalente à l'existence d'une constante μ_p telle que l'on ait l'inégalité de Sobolev :

$$\text{(0.4)} \qquad \mu_p\ \|u\|^2_{L^{\frac{2p}{p-2}}}\leq\|du\|^2_{L^2},\ \forall u\in C_0^\infty(M)\ ;$$

de plus, la meilleure constante $\mu_p(M)$ intervenant dans cette inégalité est contrôlée par Λ_p et réciproquement. Mais, d'après N. Varopoulos ([Va]), l'inégalité (0.4) équivaut à l'existence d'une majoration du noyau minimal de l'opérateur de la chaleur $P(t,x,y)$ du type

$$(0.5) \qquad P(t,x,x) \leq D_p t^{-p/2} \ , \text{ pour tout } t>0 \text{ et tout } x \in M \ ;$$

avec un contrôle mutuel entre les constantes D_p et μ_p.

D'après A. A. Grigor'yan ([G1], [G2]) l'inégalité isopérimétrique $Is_p > 0$ (pour $p > 2$) implique l'existence de fonctions de Green positives, i.e. de solutions positives de l'équation $\Delta u = \delta_x$, pour tout $x \in M$; de plus il existe une constante $C_p < \infty$ telle que, si on note G_x la fonction de Green minimale de pôle x, elle vérifie

$$(0.6) \qquad \mathrm{vol}\{y \in M, G_x(y) > t\} \leq C_p t^{-p/(p-2)}, \ t > 0.$$

Il est facile de démontrer que ces propriétés impliquent que $\Lambda_p > 0$, et que l'hypothèse $\Lambda_p > 0$ ou l'inégalité de Sobolev (0.4) suffit pour obtenir ce résultat. En résumé, le théorème principal est le suivant :

0.7. Théorème principal. — *Si (M,g) est une variété riemannienne de volume infini, complète, connexe, de dimension n, alors pour tout p supérieur où égal à n et différent de 2 les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Nous avons l'inégalité isopérimétrique $\Lambda_p > 0$,

(ii) Nous avons l'inégalité de Sobolev $\mu_p(M) > 0$,
où $\mu_p(M) = \inf_{u \in C_0^\infty(M)} \|du\|^2_{L^2} / \|u\|^2_{L^{2p/(p-2)}}$,

(iii) (M,g) a des fonctions de Green positives et il existe $C_p > 0$ tel que $\mathrm{vol}\{G_{x_0} > t\} \leq C_p / t^{\frac{p}{p-2}}$, pour tout $t > 0$ et tout $x \in M$,

(iv) Il existe une constante D_p telle que le noyau minimal de l'opérateur de la chaleur $P(t,x,y)$ vérifie $P(t,x,x) \leq D_p t^{-p/2}$, pour tout $t > 0$ et tout $x \in M$.

De plus les constantes $\Lambda_p, \ \mu_p, \ C_p, \ D_p$ sont mutuellement contrôlées.

Remarque. — A. Grigor'yan a récement montré l'équivalence entre les propriétés i) et iv) ; ceci de façon directe, il établit en fait cette équivalence pour des inégalités plus générales, voir ([G3]). La première partie sera consacrée à la preuve de ce théorème puis, dans une deuxième partie, nous montrerons quelques propriétés vérifiées par les variétés riemanniennes satisfaisant l'inégalité de Faber-Krahn $\Lambda_p > 0$: à l'aide de Λ_p nous obtiendrons d'abord, pour $r > p/2$, une constante $C = C(r,p,\Lambda_p) > 0$ telle que l'on ait l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg suivante :

$$(0.8) \qquad \|u\|_{L^\infty} \leq C \, \|u\|_{L^r}^{1-\frac{p}{2r}} \, \|\Delta u\|_{L^r}^{\frac{p}{2r}}, \ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

ceci implique notamment que l'espace obtenu en complétant $C_0^\infty(M)$ muni de la norme $\|u\|_{L^r} + \|\Delta u\|_{L^r}$ est constitué de fonctions continues bornées. Toujours à l'aide de Λ_p, nous obtiendrons une minoration du volume des boules géodésiques, ainsi qu'une minoration de chaque valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet dans un domaine compact de M.

Enfin, dans une troisième partie, nous nous intéresserons au lien entre l'inégalité de Faber-Krahn (0.2) et l'inégalité isopérimétrique (0.1) : à l'aide des travaux de P. Buser ([Bu]) et de M. Kanaï ([Ka]) nous montrerons que, si la courbure de Ricci de M est un uniformément minorée, alors l'hypothèse $\Lambda_p > 0$ implique l'inégalité isopérimétrique $Is_{p/2} > 0$ et même $Is_p > 0$ si la courbure de Ricci de M est positive ou nulle. Ceci améliore le résultat de T. Couhlon ([Co1]) qui obtenait la même conclusion en faisant l'hypothèse supplémentaire que le rayon d'injectivité de M était strictement positif. Cependant, nous construirons en toute dimension une variété riemannienne vérifiant $\Lambda_p > 0$ pour tout $p \geq n$ mais $Is_p = 0$ pour tout $p \geq n$, ce qui montre que l'inégalité de Faber-Krahn est, en général, strictement plus faible que l'inégalité isopérimétrique (0.1). Dans la quatrième section, nous montrerons comment adapter ces résultats aux variétés riemanniennes compactes.

1. Preuve du théorème principal

Dans cette partie, (M,g) est une variété riemannienne de volume infini, complète, connexe, de dimension n, p est un réel supérieur ou égal à n et différent de 2, q est alors défini par $q = 2p/(p-2)$.

1.A. Inégalité de Faber-Krahn et de Sobolev. — Soit $H_0^1(M)$ le complété de l'espace préhilbertien $C_0^\infty(M)$ muni de la norme $\|u\|^2_{H_0^1(M)} = \int_M |du|^2(x)dv_g(x)$; si Ω est un ouvert de M, on définit de même $H_0^1(\Omega)$. On aimerait savoir si $H_0^1(M)$ est inclus dans $L^q(M)$, c'est à dire si les fonctions nulles à l'infini dont le gradient est de carré intégrable sont q-intégrables (ceci impose un certain contrôle de la géométrie à l'infini de M). Soit $\mu_p(M)$ la meilleure constante, éventuellement nulle, dans l'inégalité de Sobolev

$$\mu_p \|u\|^2_{L^q(M)} \leq \|u\|^2_{H_0^1(M)} = \|du\|^2_{L^2(M)}, \ \forall u \in C_0^\infty(M), \tag{1.1}$$

on définit de même $\mu_p(\Omega)$ pour un ouvert borné Ω de M. Ces deux définitions impliquent de manière évidente que l'on a

$$\mu_p(M) = \inf_{u \in C_0^\infty(M)} \frac{\|du\|^2_{L^2}}{\|u\|^2_{L^q}} = \inf\{\mu_p(\Omega) : \Omega \text{ un ouvert borné régulier de } M\},$$

et l'inégalité $\mu_p(M) > 0$ équivaut au fait que $H_0^1(M)$ est inclus dans $L^q(M)$.

1.2. Proposition. — *L'inclusion de Sobolev* $H_0^1(M) \longrightarrow L^q(M)$ *est équivalente à l'inégalité isopérimétrique de Faber-Krahn* $\Lambda_p > 0$, *où* $\Lambda_p = \inf\{\lambda_1^D(\Omega)(\mathrm{vol}\,\Omega)^{\frac{2}{p}}, \Omega \text{ ouvert borné de } M\}$, *les constantes* $\mu_p(M)$ *et* Λ_p *sont mutuellement contrôlées de la façon suivante :*

$$\mu_p(M) \leq \Lambda_p \leq C(p)\mu_p(M) ;$$

où $C(p)$ *est défini par* $C(p) = 2^{1+p/4}\left(\frac{q\Gamma(p/2+1)\Gamma(q)}{\Gamma(1+q+p/2)}\right)^{-\frac{2}{p}}$ *et* Γ *est la fonction d'Euler* $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

Cette proposition montre que les énoncés *i)* et *ii)* du théorème principal sont équivalents.

Preuve. — Grâce à l'inégalité de Hölder, on montre facilement que, si Ω est un ouvert borné de M, alors

$$\mu_p(M) \leq \|du\|_{L^2}^2 / \|u\|_{L^q}^2 \leq \lambda_1^D(\Omega)(\operatorname{vol}\Omega)^{2/p},$$

lorsque u est une première fonction propre de Ω pour le problème de Dirichlet. En prenant le minimum par rapport à Ω, on obtient $\mu_p(M) \leq \Lambda_p$.

Montrons alors l'autre inégalité de la proposition, elle découlera de l'établissement de l'inégalité

$$\Lambda_p(\Omega) = \inf\{\lambda_1^D(U)(\operatorname{vol} U)^{\frac{2}{p}},\ U \text{ ouvert de } \Omega\} \leq C(p)\,\mu_p(\Omega), \tag{1.3}$$

pour tout ouvert borné régulier Ω de M. Il suffira alors de prendre l'infimum par rapport à Ω pour avoir la proposition. Nous allons seulement montrer ce résultat pour $p > n$, le cas $p = n$ (lorsque $n > 2$) s'en déduit de la façon suivante : on a $\Lambda_n(\Omega)(\operatorname{vol}\Omega)^{\frac{2}{p}-\frac{2}{n}} \leq \Lambda_p(\Omega)$ et, si $u \in C_0^\infty(\Omega)$, alors

$$\|u\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}} = \lim_{q \to (\frac{2n}{n-2})^-} \|u\|^2_{L^q} \leq \lim_{q \to (\frac{2n}{n-2})^-} C(p)^{-1}\Lambda_p(\Omega)^{-1}\|du\|^2_{L^2},$$

comme $\lim_{p\to n^+} C(p) = C(n)$, nous obtenons $\Lambda_n(\Omega) \leq C(n)\mu_n(\Omega)$. Supposons donc que $p > n$ et minorons $\mu_p(\Omega)$, pour un ouvert borné régulier Ω de M, pour cela on va minorer $\operatorname{vol}\{x \in \Omega : u(x) > \|u\|_{L^\infty} - t\}$, où u est une fonction réalisant $\mu_p(\Omega)$; une telle fonction existe en effet grâce au lemme suivant :

1.4. Lemme [Au]. — *Soit Ω un domaine régulier de M et $2 < q < \frac{2n}{n-2}$ alors : il existe $u \in C^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ telle que :*

i) $u > 0$ *sur* Ω,

ii) $\int_\Omega u^q(x)dv_g = 1$,

iii) $\Delta u = \mu_p(\Omega)u^{q-1}$.

Soit u la fonction donnée par ce lemme, notons $L = \|u\|_{L^\infty}$, nous avons alors la minoration suivante :

1.5. lemme. — *Pour $0 \leq t \leq L$ on a :*

$$\operatorname{vol}\{x : u(x) > L - t\} \geq \left(\frac{\Lambda_p(\Omega)}{2^{\frac{p+4}{4}}}\right)^{p/2} \left(\frac{t}{\mu_p(\Omega)L^{q-1}}\right)^{p/2}$$

A partir de ce lemme nous pouvons déduire le résultat (1.3), en effet nous avons

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^q(x)dv_g(x) = 1 = \int_0^L q \operatorname{vol}(u > t)t^{q-1}dt &= \int_0^L q \operatorname{vol}(u > L-t)(L-t)^{q-1}dt \\ &\geq q\left(\frac{\Lambda_p(\Omega)}{2^{\frac{p+4}{4}}\mu_p(\Omega)L^{q-1}}\right)^{p/2} \int_0^L t^{p/2}(L-t)^{q-1}dt.\end{aligned}$$

Mais $\int_0^L t^{p/2}(L-t)^{q-1}dt = L^{q+p/2}\int_0^1 \theta^{p/2}(1-\theta)^{q-1}d\theta = L^{q+p/2}B(p/2+1,q)$, où $B(x,y)$ est la fonction Eulerienne de seconde espèce : $B(x,y)=\int_0^1\theta^{x-1}(1-\theta)^{y-1}d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$. On obtient donc :

$$1 \geq q\left(\frac{\Lambda_p(\Omega)}{2^{\frac{p+4}{4}}\mu_p(\Omega)}\right)^{p/2} B(p/2+1,q)L^{q+p/2-qp/2+p/2},$$

du fait que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$, on déduit $C(p)\mu_p(\Omega)\geq \Lambda_p(\Omega)$. Ceci achève la preuve de la proposition 1.2, il nous reste à prouver le lemme 1.5.

Preuve du lemme 1.5.— Soit $t\in]0,L]$, posons $\Omega_t = \{x \ : \ u(x) > L-t\}$, c'est un ouvert de Ω, on a donc $\lambda_1^D(\Omega_t)\geq \Lambda_p(\operatorname{vol}\Omega_t)^{-2/p}$, en majorant $\lambda_1^D(\Omega_t)$ par le quotient de Raleigh de la fonction $u-L+t$ nous obtenons

$$\lambda_1^D(\Omega_t) \leq \frac{\int_{\Omega_t}|du|^2}{\int_{\Omega_t}(u-L+t)^2} = \frac{\int_{\Omega_t}\Delta u\,(u-L+t)}{\int_{\Omega_t}(u-L+t)^2},$$

mais $\Delta u = \mu_p(\Omega)u^{q-1}$, donc

$$\frac{\int_{\Omega_t}|du|^2}{\int_{\Omega_t}(u-L+t)^2} \leq \mu_p(\Omega)L^{q-1}\frac{\int_{\Omega_t}(u-L+t)}{\int_{\Omega_t}(u-L+t)^2}.$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous en déduisons

$$\frac{\int_{\Omega_t}|du|^2}{\int_{\Omega_t}(u-L+t)^2} \leq \mu_p(\Omega)L^{q-1}\left(\frac{\operatorname{vol}\Omega_t}{\int_{\Omega_t}(u-L+t)^2}\right)^{1/2}.$$

En utilisant la minoration : $\int_{\Omega_t}(u-L+t)^2 \geq \operatorname{vol}(\Omega_{t/2})(t/2)^2$, nous avons donc

$$\Lambda_p(\Omega)(\operatorname{vol}\Omega_t)^{-2/p} \leq \mu_p(\Omega)\,L^{q-1}\,\frac{2}{t}\left(\frac{\operatorname{vol}\Omega_t}{\operatorname{vol}\Omega_{t/2}}\right)^{1/2},$$

ou encore

$$\operatorname{vol}\Omega_t \geq \left(\frac{\Lambda_p(\Omega)}{\mu_p(\Omega)L^{q-1}}\right)^{\frac{2p}{p+4}} \times \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{2p}{p+4}} \left(\operatorname{vol}\Omega_{t/2}\right)^{\frac{p}{p+4}}. \tag{1.6}$$

Puis, par récurrence immédiate, nous obtenons

$$\operatorname{vol}\Omega_t \geq \left(\frac{\Lambda_p(\Omega)t}{\mu_p(\Omega)L^{q-1}}\right)^{2\sum_{l=1}^m\left(\frac{p}{p+4}\right)^l}\left(4\right)^{-\sum_{l=1}^m l\left(\frac{p}{p+4}\right)^l}\left(\operatorname{vol}\Omega_{t/2^m}\right)^{\left(\frac{p}{p+4}\right)^m}$$

cette inégalité est valable pour tout $m\in\mathbf{N}-\{\mathbf{0}\}$. Soient $C=\|du\|_{L^\infty}$ et $x_0\in\Omega$ tel que $u(x_0)=L$, comme $u(x_0)-u(x)\leq C\,d(x_0,x)$, on a : $B(x_0,\frac{t}{C})\subset\Omega_t\subset\Omega$, où $B(x_0,r)$ est la boule de centre x_0 de rayon r pour la distance d associée à g. Quand m tend vers l'infini, nous en déduisons que

$$C^{te}\left(\frac{t}{2^mC}\right)^n \leq \operatorname{vol}\Omega_{t/2^m}\leq \operatorname{vol}\Omega$$

$$\text{et donc que } \lim_{m\to\infty}\left(\operatorname{vol}(\Omega_{t/2^m})\right)^{\left(\frac{p}{p+4}\right)^m} = 1.$$

En faisant tendre m vers l'infini dans l'inégalité ci-dessus, nous obtenons

$$\operatorname{vol}\Omega_t \geq \left(\frac{\Lambda_p}{2^{\frac{p+4}{4}}}\right)^{p/2}\left(\frac{t}{\mu_p(\Omega)L^{q-1}}\right)^{p/2},$$

car $\sum_{l=1}^\infty\left(\frac{p}{p+4}\right)^l = \frac{p}{4}$ et $\sum_{l=1}^\infty l\left(\frac{p}{p+4}\right)^l = \frac{p(p+4)}{16}$. Ceci achève simultanément la preuve du lemme 1.5 et de la proposition 1.2. ■

1.B. Inégalité de Faber-Krahn et fonctions de Green. —

Le problème de l'existence de fonctions de Green. — Soit x_0 un point de M et Ω un ouvert relativement compact de M contenant x_0 ; nous notons $G_{x_0}^{\Omega}$ la fonction de Green de Ω de pôle x_0 pour les conditions de Dirichlet, c'est la solution de

$$\Delta G_{x_0}^{\Omega} = \delta_{x_0}$$
$$G_{x_0}^{\Omega}\big|_{\partial\Omega} = 0 \ ;$$

on prolonge $G_{x_0}^{\Omega}$ par 0 sur $M - \Omega$. Si $\Omega \subset \Omega'$, alors $G_{x_0}^{\Omega} \leq G_{x_0}^{\Omega'}$ et on a le résultat classique suivant :

1.7. Théorème . — *Si $G_{x_0}(x) = \sup_{\Omega \ni x_0} G_{x_0}^{\Omega}(x)$, alors*

i) Soit G_{x_0} est partout infini

ii) Soit G_{x_0} est partout fini sur $M - \{x_0\}$.

Cette alternative ne dépends pas de x_0. Dans le premier cas, on dit que (M,g) est parabolique ; dans le second cas, G_{x_0} est la solution positive minimale de $\Delta G_{x_0} = \delta_{x_0}$.

Capacité et condition nécessaire et suffisante d'existence de fonctions de Green, d'après A. A. Grigor'yan. —

1.8. Définition. — Pour un ouvert borné Ω de M, on définit la capacité de Ω par

$$\operatorname{cap}\Omega = \inf\{\int_M |du|^2 dv_g\}$$

où l'infimum porte sur les fonctions C^{∞} à support compact dans M et valant 1 sur Ω ; remarquons que cap est une fonction croissante, on définit la capacité d'un ouvert quelconque Ω de M par

$$\operatorname{cap}\Omega = \sup_{U \subset \Omega} \operatorname{cap} U = \lim_{k \longrightarrow \infty} \operatorname{cap} U_k,$$

où U_k est une famille croissante d'ouverts exhaustant Ω.

1.9. proposition (cf. [G1], [G2]). — *La capacité de M est nulle ou infinie , elle est nulle si et seulement si (M,g) est parabolique.*

Preuve. — Nous avons le résultat suivant : si $t > 0$, alors

$$\int_{\Omega} |d(G_{x_0}^{\Omega} \wedge t)|^2 dv_g = t,$$

où nous notons $a \wedge t = \inf\{a, t\}$. En effet

$$\int_{\Omega} |d(G_{x_0}^{\Omega} \wedge t)|^2 dv_g = \int_{G_{x_0}^{\Omega} < t} |dG_{x_0}^{\Omega}|^2 dv_g = \int_{G_{x_0}^{\Omega} < t} \Delta G_{x_0}^{\Omega} G_{x_0}^{\Omega} dv_g - \int_{G_{x_0}^{\Omega} = t} \frac{\partial}{\partial n} G_{x_0}^{\Omega} G_{x_0}^{\Omega},$$

où n est la normale intérieure à$\{G_{x_0}^{\Omega} < t\}$, mais, sur $\Omega - \{x_0\}$, $G_{x_0}^{\Omega}$ est harmonique et

$$\int_{G_{x_0}^{\Omega}=t} \frac{\partial}{\partial n} G_{x_0}^{\Omega} = - \int_{G_{x_0}^{\Omega}>t} \Delta G_{x_0}^{\Omega} = -1,$$

l'expression étant à prendre au sens des distributions ; d'où le résultat.

Si (M,g) est parabolique, pour tout $t>0$, nous avons $M = \cup_{k\in\mathbf{N}} A_{k,t}$, où $A_{k,t} = \{G_{x_0}^{\Omega_k} > t\}$ et $(\Omega_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite croissante d'ouvert exhaustant M. Par définition de la capacité, nous avons

$$\operatorname{cap} A_{k,t} \leq \int_{\Omega_k} |d(G_{x_0}^{\Omega_k} \wedge t)|^2 dv_g / t^2 = \frac{1}{t},$$

ainsi nous obtenons $\operatorname{cap} M = \lim_{k\longrightarrow\infty} \operatorname{cap} A_{k,t} \leq 1/t$; puis en faisant tendre t vers l'infini, nous obtenons $\operatorname{cap} M = 0$. Montrons alors la réciproque : supposons (M,g) non parabolique, alors la fonction $G_{x_0} \wedge t$ appartient à $H_0^1(M)$, en effet si $\{\Omega_k\}_k$ est une suite d'ouverts bornés exhaustant M alors d'après (1.12) , les fonctions $G_{x_0}^{\Omega_k} \wedge t$ forment un ensemble borné dans $H_0^1(M)$, cette suite a donc des sous-suites convergeant faiblement dans $H_0^1(M)$, or les limites faibles sont forcément la fonction $G_{x_0} \wedge t$, ainsi $G_{x_0}^{\Omega_k} \wedge t$ converge H_0^1-faiblement vers $G_{x_0} \wedge t$; de plus un calcul similaire à (1.12) montre que $\int_\Omega < d(G_{x_0}^{\Omega_k} \wedge t), dG_{x_0} > dv_g = t$ donc en faisant tendre k vers l'infini, grâce à la convergence faible, on obtient $\int_\Omega |d(G_{x_0} \wedge t)|^2 dv_g = t$, ceci implique que les normes H_0^1 convergent aussi et donc que la convergence est en fait H_0^1. Si $\Omega_t = \{G_{x_0} > t\}$, il est alors facile de voir que la fonction $(G_{x_0} \wedge t)/t$ réalise la capacité de Ω_t, d'où $\operatorname{cap} \Omega_t = 1/t$, on a donc $\operatorname{cap} M \geq 1/t$, ceci pour tout $t > 0$, en faisant tendre t vers 0, nous obtenons $\operatorname{cap} M = \infty$. ■

Remarques . —

1.10. La capacité mesure si un ensemble est visité par le mouvement Brownien, $\operatorname{cap} M$ mesure si le mouvement Brownien visite l'infini de (M,g).

1.11. Si (M,g) est non parabolique tout les ouverts de M ont une capacité non nulle.

Corollaire : condition nécessaire et condition suffisante. — La condition nécessaire et la condition suffisante énoncées ici ont été établies par A. A. Grigor'yan (cf. [G1], [G2]).

1.12. Condition necessaire . — *Si (M,g) est non parabolique alors*

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{L(t)} < \infty,$$

où $L(t)$ est le volume du bord d'une boule géodésique de rayon t.

Preuve. — Pour cela on majore la capacité de la boule géodésique $B(x_0,1)$, de rayon 1 à l'aide de la fonction $u_R(x) = \int_{d(x_0,x)}^R \frac{dt}{L(t)} \big(\int_1^R \frac{dt}{L(t)}\big)^{-1}$, on obtient

$$0 < \operatorname{cap} B(x_0,1) \leq \Big(\int_1^R \frac{dt}{L(t)}\Big)^{-1},$$

$$\text{soit } \int_1^R \frac{dt}{L(t)} \le \frac{1}{\operatorname{cap} B(x_0,1)} < \infty,$$

ceci pour tout $R > 1$. Le résultat découle du fait que $B(x_0, 1)$ a une capacité non nulle (cf. remarque 1.11). ∎

1.13. CONDITION SUFFISANTE . — *Soit $h(v)$ le profil isopérimétrique de (M, g), défini comme l'infimum des volumes du bord des domaines de volume intérieur fixé égal à v. Si le profil isopérimétrique de (M, g) vérifie*

$$\int_1^\infty \frac{dv}{h^2(v)} < \infty$$

alors (M, g) est non parabolique.

Preuve. — La preuve de ce résultat utilise la symétrisation des fonctions : si u est une fonction C^∞ à support compact, la symétrisée de u est définie par $\tilde{u}(\mathrm{vol}\{|u| > t\}) = t$; d'après la formule de la coaire nous avons ([Ta])

$$\int_M |du|^2 \ge \int_0^\infty \tilde{u}'^2(v)h^2(v)dv.$$

En appliquant ceci aux fonctions C^∞ à support compact valant 1 sur un ouvert Ω relativement compact de M, nous avons

$$\operatorname{cap}\Omega \ge \inf_{\substack{u(\mathrm{vol}\,\Omega)=1 \\ u \text{ à support compact}}} \{\int_{\mathrm{vol}\,\Omega}^\infty u'^2(v)h^2(v)dv\} = \Big(\int_{\mathrm{vol}\,\Omega}^\infty \frac{dv}{h^2(v)}\Big)^{-1} > 0.$$

En effet, les points critiques de la forme quadratique $u \mapsto \int_{\mathrm{vol}\,\Omega}^\infty u'^2(v)h^2(v)dv$ sont de la forme $u(v) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \int_v^\infty \frac{dv}{h^2(v)}$ et ce sont les minima. ∎

Non-parabolicité et inégalité de Faber-Krahn. —

1.14. PROPOSITION . — *(M, g) vérifie l'inégalité isopérimétrique $\Lambda_p > 0$ si et seulement si (M,g) est non-parabolique et s'il existe une constante C_p telle que ses fonctions de Green vérifient*

$$\mathrm{vol}\{y \in M, G_x(y) > t\} \le C_p t^{-p/(p-2)},$$

de plus C_p et Λ_p sont mutuellement contrôlées.

Preuve. — Supposons que $\Lambda_p > 0$ où, de manière équivalente (d'après la proposition 1.2), que $\mu_p > 0$, nous appliquons alors l'inégalité de Sobolev à la fonction $(G_{x_0}^\Omega \wedge t)$, où Ω est un ouvert borné de M, nous obtenons

$$\begin{aligned} t = \int_M |d(G_{x_0}^\Omega \wedge t)|^2 &\ge \mu_p \left(\int_M (G_{x_0}^\Omega \wedge t)^q\right)^{2/q} \\ &\ge \mu_p \,\mathrm{vol}\{G_{x_0}^\Omega > t\}^{\frac{2}{q}}\, t^2, \end{aligned}$$

d'où $\mathrm{vol}\{G_{x_0}^\Omega > t\} \le 1/(\mu_p > t)^{q/2} = 1/(\mu_p t)^{p/(p-2)}$. D'après le théorème 1.7, (M, g) est donc non parabolique et nous avons bien l'inégalité voulue par passage à la limite monotone.

Pour montrer la réciproque supposons que (M,g) est non-parabolique et qu'il existe une constante C_p telle que ses fonctions de Green vérifient $\mathrm{vol}\{y \in M, G_x(y) > t\} \leq C_p t^{-p/(p-2)}$; soit Ω un ouvert relativement compact de M, soit u une fonction propre positive correspondant à la valeur propre $\lambda_1^D(\Omega)$, nous avons alors

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \int_\Omega G^\Omega_{x_0}(x)\,\lambda_1^D(\Omega)\,u(x)dv_g(x) \\ &\leq \lambda_1^D(\Omega)\left(\int_\Omega G^\Omega_{x_0}(x)\,dv_g(x)\right)\sup_{x\in\Omega} u(x). \end{aligned}$$

Nous choisissons alors x_0 dans Ω tel que $u(x_0) = \sup_{x\in\Omega} u(x)$, compte tenu du fait que $G^\Omega_{x_0} \leq G_{x_0}$, nous obtenons

$$1 \leq \lambda_1^D(\Omega)\int_\Omega G_{x_0}(x)\,dv_g(x) = \lambda_1^D(\Omega)\int_0^\infty \mathrm{vol}\{x \in \Omega,\ G_{x_0}(x) \geq t\}\,dt,$$

or, par hypothèse, nous avons la majoration $\mathrm{vol}\{G_{x_0} \geq t\} \leq \inf(\mathrm{vol}\,\Omega, C_p/t^{\frac{p}{p-2}})$, nous en déduisons

$$\int_0^\infty \mathrm{vol}\{x \in \Omega,\ G_{x_0}(x) \geq t\}\,dt \leq \int_0^{t_\Omega} \mathrm{vol}\,\Omega\,dt + \int_{t_\Omega}^\infty C_p/t^{\frac{p}{p-2}}\,dt,$$

où t_Ω est défini par $\mathrm{vol}\,\Omega\; t_\Omega^{\frac{p}{p-2}} = C_p$, d'où

$$\int_0^\infty \mathrm{vol}\{x \in \Omega,\ G_{x_0}(x) \geq t\}\,dt \leq t_\Omega\,\mathrm{vol}\,\Omega + (p/2-1)\,C_p\,t_\Omega^{-2/p-2} = \frac{p}{2}\,t_\Omega\,\mathrm{vol}\,\Omega\ ;$$

et finalement $1 \leq \lambda_1^D(\Omega)\,\dfrac{p}{2}\,C_p^{\frac{p-2}{p}}\,(\mathrm{vol}\,\Omega)^{\frac{2}{p}}$.

Ceci prouve que $\Lambda_p \geq \frac{2}{p} C_p^{\frac{2-p}{p}} > 0$. ■

1.C. Inégalité de Faber-Krahn et contrôle du noyau de la chaleur. Notons $P(t,x,y)$, où $t \in \mathbf{R}_+^*$ et où $x,y \in M$ la solution fondamentale minimale de l'équation de la chaleur. D'après Varopoulos [Va] et la proposition 1.2, nous avons la

1.15. Proposition. — *La variété (M,g) vérifie l'inégalité isopérimétrique $\Lambda_p > 0$ si et seulement s'il existe une constante D_p telle que le noyau minimal de l'opérateur de la chaleur vérifie $P(t,x,x) \leq D_p t^{-p/2}$ pout tout $t > 0$, et tout $x \in M$. De plus les constantes Λ_p et D_p sont mutuellement contrôlées.*

Preuve. — Supposons que $\Lambda_p > 0$ où de manière équivalente que $\mu_p > 0$ et majorons $P(t,x,x)$, une telle majoration signifie exactement que $\forall u \in C_0^\infty(M)$, $\|u(t,.)\|_{L^\infty} \leq D_p\,t^{-p/2}\,\|u\|_{L^1}$, où $u(t,.)$ est défini par

$$u(t,x) = \int_M P(t,x,y)\,u(y)\,dy,$$

$u(t,.)$ vérifie donc $\frac{\partial}{\partial t}u + \Delta u = 0$ et $\lim_{t\to 0^+} u(t,x) = u(x)$. Soit donc $u \in C_0^\infty(M)$, nous avons

$$\frac{d}{dt}\,\|u(t,.)\|^r_{L^r} = -4\,\frac{r-1}{r}\int_M |du^{\frac{r}{2}}(t,x)|^2 dx\,, \tag{1.16}$$

puis, grâce à l'inégalité de Sobolev, nous obtenons

$$\mu_p(M)\,\|u(t,.)\|^r_{L^{rq/2}} \le -\frac{r}{4(r-1)}\,\frac{d}{dt}\|u(t,.)\|^r_{L^r},$$

on intègre cette relation par rapport à t

$$\begin{aligned}\mu_p(M)\int_0^t \|u(s,.)\|^r_{L^{rq/2}}ds &\le \frac{r}{4(r-1)}(\|u(0,.)\|^r_{L^r} - \|u(t,.)\|^r_{L^r})\\ &\le \frac{r}{4(r-1)}\|u(0,.)\|^r_{L^r}.\end{aligned}$$

Or, d'après (1.16), $t \mapsto \|u(t,.)\|^r_{L^{rq/2}}$ est une fonction décroissante, donc

$$\mu_p(M)\,t\,\|u(t,.)\|^r_{L^{rq/2}} \le \frac{r}{4(r-1)}\|u(0,.)\|^r_{L^r},$$

$$\|u(t,.)\|_{L^{rq/2}} \le \left(\frac{r}{4(r-1)\mu_p(M)t}\right)^{\frac{1}{r}}\|u(0,.)\|_{L^r}.$$

Si $t_k = \sum_{l=1}^k \frac{t}{2^l}$ et $r_k = 2(q/2)^k$, la loi de semi-groupe donne

$$\|u(t_k,.)\|_{L^{r_{k+1}}} \le \left(\frac{2^{k-1}}{\mu_p(M)t}\;\frac{r_k}{r_k-1}\right)^{\frac{1}{r_k}}\|u(t_{k-1},.)\|_{L^{r_k}},$$

puis en itérant nous obtenons

$$\|u(t,.)\|_{L^\infty} \le D'_p(\mu_p(M)\,t)^{-p/4}\|u(0,.)\|_{L^2},$$

avec $D'_p = \prod_{k=0}^{+\infty}\big(2^{k-1}\;\frac{r_k}{r_k-1}\big)^{\frac{1}{r_k}}$. De cette dernière inégalité, en prenant $u(0,.) = P(t,x,.)$, on tire

$$\sup_{x\in M}\Big(\int_M P^2(t,x,y)dy\Big)^{1/2} = \sup_{x\in M}\big(P(2t,x,x)\big)^{1/2} \le D'_p(\mu_p(M)\,t)^{-p/4},$$

d'où la majoration voulue.

La réciproque est démontrée en 2.C. ■

2. Propriétés induites par l'inégalité isopérimétrique de Faber-Krahn

2.A. Inégalités de Gagliardo-Nirenberg. —

2.1. Proposition. — *Si (M,g) vérifie l'inégalité isopérimétrique de Faber-Krahn $\Lambda_p > 0$, alors pour tout $r > p/2$, $r > 2$, il existe une constante $C = C(p,r) > 0$ telle que*

$$\|u\|_{L^\infty} \le C\,\Lambda_p^{-\frac{p}{2r}}\,\|u\|^{1-\frac{p}{2r}}_{L^r}\,\|\Delta u\|^{\frac{p}{2r}}_{L^r}\quad \forall u \in C_0^\infty(M).$$

Remarques . —

i) Cette inégalité est une des inégalités établies par E. Gagliardo ([Ga]) et L. Nirenberg ([N]) dans $\mathbf{R}^n$ pour $p = n$.

ii) Il découle des travaux de T. Couhlon ([Co2]) et de cette proposition que nous avons en fait toutes les inégalités de Gagliardo-Nirenberg suivantes : si $\alpha, r > 0$ sont telles que $\alpha r > p$ alors il existe une constante $C = C(p, r, \alpha, \Lambda_p) > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\, \|u\|_{L^r}^{1-\frac{p}{\alpha r}}\, \|\Delta^{\frac{\alpha}{2}} u\|_{L^r}^{\frac{p}{\alpha r}},\ \forall u \in C_0^\infty(M).$$

Preuve. — Soit $u \in C_0^\infty(M)$, posons $L = \|u\|_{L^\infty}$ et $\Omega_t = \{x\ :\ |u(x)| > L - t\}$, nous avons

$$\lambda_1^D(\Omega_t) \leq \frac{\int_{\Omega_t} |d|u||^2}{\int_{\Omega_t} (|u| - L + t)^2},$$

or $\int_{\Omega_t} |d|u||^2 \leq \int_{\Omega_t} |\Delta u|(|u| - L + t)$, et grâce à l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_t} |\Delta u|(|u| - L + t) &\leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega_t)}\, \|\, |u| - L + t\|_{L^2(\Omega_t)}\\ &\leq (\mathrm{vol}\, \Omega_t)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}}\, I_r\, \|\, |u| - L + t\|_{L^2(\Omega_t)},\end{aligned}$$

avec $I_r = \|\Delta u\|_{L^r}$. Procédant comme en (1.6), on obtient

$$\frac{\Lambda_p t}{2 I_r} (\mathrm{vol}\, \Omega_{t/2})^{1/2} \leq (\mathrm{vol}\, \Omega_t)^{\frac{1}{2} + \frac{2}{p} - \frac{1}{r}},$$

et en itérant

$$\mathrm{Const}(p, r) \left(\frac{\Lambda_p t}{I_r}\right)^{(\frac{2}{p} - \frac{1}{r})^{-1}} \leq \mathrm{vol}\, \Omega_t.$$

De cette inégalité, on déduit

$$\|u\|_{L^r}^r = r \int_0^L (L - t)^{r-1}\, \mathrm{vol}\{x; |u(x)| > L - t\} dt \geq C(p, r) \left(\frac{\Lambda_p}{I_r}\right)^{(\frac{2}{p} - \frac{1}{r})^{-1}} L^{r + \frac{rp}{2r - p}},$$

d'où la proposition. ■

2.2. Corollaire. — *Soit $r > p/2$, l'inégalité isopérimétrique de Faber-Krahn $\Lambda_p > 0$ équivaut à l'existence une constante $C > 0$ telle que*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\, \|u\|_{L^r}^{1-\frac{p}{2r}}\, \|\Delta u\|_{L^r}^{\frac{p}{2r}}\ \ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

de plus les constantes C et Λ_p sont mutuellement contrôlées.

Preuve. — Pour cela, il suffit de voir que l'on peut appliquer l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg à la première fonction propre u d'un ouvert borné Ω de M, on obtiendra alors

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\, (\lambda_1^D(\Omega))^{\frac{p}{2r}} \|u\|_{L^r} \leq C\, (\lambda_1^D(\Omega))^{\frac{p}{2r}} (\mathrm{vol}\, \Omega)^{\frac{1}{r}} \|u\|_{L^\infty},$$

d'où une minoration de Λ_p. ■

Nous avons aussi le résultat suivant :

2.3. Proposition. — *Si (M, g) vérifie l'inégalité isopérimétrique de Faber-Krahn $\Lambda_p > 0$, alors pour tout $r > p$, il existe une constante $C = C(p, r) > 0$ telle que*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\, \Lambda_p^{-\frac{p}{2r}}\, \|u\|_{L^r}^{1-\frac{p}{r}}\, \|du\|_{L^r}^{\frac{p}{r}},\ \forall u \in C_0^\infty(M).$$

Preuve. — Soit $u \in C_0^\infty(M)$, posons $L = \|u\|_{L^\infty}$ et $\Omega_t = \{x; |u(x)| > L - t\}$, nous avons

$$\lambda_1^D(\Omega_t) \leq \frac{\int_{\Omega_t} |d|u||^2}{\int_{\Omega_t} (|u| - L + t)^2},$$

or $\int_{\Omega_t} |d|u||^2 = \int_{\Omega_t} |du|^2 \leq \|du\|_{L^r}^2 (\mathrm{vol}\,\Omega_t)^{1-(2/r)}$. On en déduit alors

$$\Lambda_p \,\mathrm{vol}\,\Omega_{t/2}\ t^2/4 \leq \|du\|_{L^r}^2 (\mathrm{vol}\,\Omega_t)^{1+\frac{2}{p}-\frac{2}{r}},$$

on procède alors de même qu'en (1.6) pour obtenir la proposition. ∎

2.B. Minoration du volume des boules géodésiques. —

2.4. Proposition. — *Si (M, g) vérifie l'inégalité isopérimétrique de Faber-Krahn $\Lambda_p > 0$ alors toute boule géodésique $B(x, r)$ vérifie*

$$\mathrm{vol}\big(B(x, r)\big) \geq \left(\frac{\Lambda_p}{2^{p+2}}\right)^{p/2} r^p.$$

2.5. Remarque. — Nous obtenons donc, sous une hypothèse plus faible, un résultat analogue à celui que l'on obtenait avec l'inégalité isopérimétrique $Is_p > 0$, puisque celle-ci implique que $\mathrm{vol}\big(B(x, r)\big) \geq (Is_p \,\frac{r}{p})^p$.

Preuve. — Pour $x \in M$ et $r > 0$, on a

$$\Lambda_p \big(\mathrm{vol}\, B(x, r)\big)^{-2/p} \leq \lambda_1^D\big(B(x, r)\big).$$

En majorant $\lambda_1^D\big(B(x, r)\big)$ par le quotient de Raleigh de la fonction $u(y) = \mathrm{distance}\big(y, \partial B(x, r)\big) = r - d(x, y)$, on obtient

$$\lambda_1^D\big(B(x, r)\big) \leq \frac{\mathrm{vol}\, B(x, r)}{\int_{B(x,r/2)} u^2(x) dv_g(x)} \leq \frac{4\ \mathrm{vol}\, B(x, r)}{r^2\ \mathrm{vol}\, B(x, r/2))},$$

D'où $\mathrm{vol}\, B(x, r) \geq \big(\Lambda_p\, r^2/4\big)^{\frac{p}{p+2}} \big(\mathrm{vol}\, B(x, r/2)\big)^{\frac{p}{p+2}}$, et par récurrence

$$\mathrm{vol}\, B(x, r) \geq \Big(\Lambda_p\, r^2\Big)^{\sum_{l=1}^m \left(\frac{p}{p+2}\right)^l} \Big(4\Big)^{-\sum_{l=1}^m l \left(\frac{p}{p+2}\right)^l} \Big(\mathrm{vol}\, B(x, \frac{r}{2^m})\Big)^{\left(\frac{p}{p+2}\right)^m};$$

Or, on a $\mathrm{vol}\, B(x, r) = \omega_n r^n (1 + o(r)), r \to 0$, donc $\lim_{m\to\infty} \Big(\mathrm{vol}\, B(x, \frac{r}{2^m})\Big)^{\left(\frac{p}{p+2}\right)^m} = 1$. En faisant tendre m vers l'infini et en remarquant que $\sum_{l=1}^\infty \big(\frac{p}{p+2}\big)^l = \frac{p}{2}$ et $\sum_{l=1}^\infty l \big(\frac{p}{p+2}\big)^l = \frac{p(p+2)}{4}$, on obtient la minoration annoncée. ∎

2.C. Estimation du spectre des domaines compacts de M. —

2.6. Proposition. — *Si (M, g) vérifie l'inégalité isopérimétrique de Faber-Krahn $\Lambda_p > 0$ alors il existe une constante $C(p, \Lambda_p) > 0$ telle que, si Ω est un* *ouvert borné de M, la k^{ieme} valeur propre du Laplacien sur Ω (avec les conditions de Dirichlet) vérifie*

$$\lambda_k^D(\Omega) \geq C(p, \Lambda_p) \left(\frac{k}{\operatorname{vol} \Omega} \right)^{2/p}.$$

Preuve. — C'est une conséquence de la proposition 1.15, qui donne une majoration du noyau de l'opérateur de la chaleur de (M, g) : $P(t, x, x) \leq D(p, \Lambda_p) t^{-p/2}$. En effet, si P^Ω est le noyau de l'opérateur de la chaleur sur Ω pour les conditions de Dirichlet, il vérifie $P^\Omega \leq P$ et, pour toute constante D_p telle que $P(t, x, x) \leq D_p t^{-p/2}$, nous avons

$$\sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda_l^D(\Omega)t} = \int_\Omega P^\Omega(t, x, x) dx \leq \int_\Omega P(t, x, x) dx \leq D_p t^{-p/2} \operatorname{vol} \Omega.$$

En prenant $t = (\lambda_k^D(\Omega))^{-1}$, on obtient

$$k/e \leq \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\lambda_l^D(\Omega)/\lambda_k^D(\Omega)} \leq D_p (\lambda_k^D(\Omega))^{p/2} \operatorname{vol} \Omega,$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque. — La preuve suit celle de Cheng-Li ([C-L]). ■

3. L'inégalité de Faber-Krahn et l'inégalité isopérimétrique classique

Nous allons nous intéresser à retrouver une inégalité isopérimétrique classique à partir de l'inégalité $\Lambda_p > 0$. Nous obtenons ainsi la

3.1. PROPOSITION. — *Si le tenseur de courbure de Ricci de (M^n, g) vérifie ricci $\geq (n-1)\, k\, g$, alors*

i) Si $k = 0$, il existe des constantes c_n et $J(n)$ telles que

$$c_n I s_n^2 \geq \Lambda_n \geq J(n) I s_n^2,$$

en particulier on a $\Lambda_n > 0$ si et seulement si $I s_n > 0$.

ii) Si $k < 0$, alors lorsque $p > 2n$, l'inégalité isopérimétrique de Faber-Krahn $\Lambda_p > 0$ implique l'inégalité isopérimétrique classique $I s_{p/2} > 0$.

Preuve. — Prouvons i) : cela repose sur les travaux de P. Buser ([Bu]) à propos de la constante de Cheeger. A Ω un ouvert borné de M, on associe le domaine $\tilde{\Omega}$ obtenu en coupant les r-cheveux de Ω, oú $r > 0$

$$\tilde{\Omega} = \{x \in M,\ \operatorname{vol}(B(x, r)) \geq \frac{1}{2} \operatorname{vol}(B(x, r))\}.$$

P. Buser montre que, si la courbure de Ricci de (M, g) est positive, alors il existe une constante c_n telle que

$$\operatorname{vol}(\tilde{\Omega}) \geq \operatorname{vol}(\Omega) - c(n) r \operatorname{vol}(\partial\Omega),$$

en particulier si $r = \mathrm{vol}(\Omega)/(2c(n)\,\mathrm{vol}(\partial\Omega))$, alors $\mathrm{vol}(\tilde{\Omega}) \geq \mathrm{vol}(\Omega)/2$ et $\tilde{\Omega}$ est non-vide si Ω est non-vide. Choisissons ce r, alors nous avons l'existence d'un $x_0 \in \tilde{\Omega}$, ainsi

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{vol}(B(x_0, r) \leq \mathrm{vol}\,(B(x_0, r) \cap \Omega) \leq \mathrm{vol}\,\Omega,$$

mais d'après (2.4) nous avons la minoration suivante du volume des boules géodésiques

$$\mathrm{vol}\big(B(x_0, r)\big) \geq \left(\frac{\Lambda_n}{2^{n+2}}\right)^{n/2} r^n,$$

donc nous avons l'inégalité

$$\mathrm{vol}\,\Omega \geq \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_n}{2^{n+2}}\right)^{n/2} \left(\frac{\mathrm{vol}(\Omega)}{2c(n)\,\mathrm{vol}(\partial\Omega)}\right)^n,$$

ce qui conclut la preuve de i).

Prouvons alors ii) : cela repose sur les travaux de M. Kanaï ([Ka]). On discrétise M par un graphe $\Gamma = (S, A)$ où les sommets de S sont les points d'un r-réseau de M (r étant un réel positif fixé), les arêtes de Γ sont les $\{x, y\} \in A$ tels que x et y soient deux points du réseau vérifiant $d(x, y) \leq 3r$. Si $u : S \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction à support fini on pose

$$\|u\|_{L^p} = \big(\sum_{x\in S} |u(x)|^p\big)^{1/p}, \text{ et}$$

$$|Du|(x) = \big(\sum_{\substack{y \text{ t.q.}\\ \{x,y\}\in A}} (u(y) - u(x))^2\big)^{1/2}.$$

Les constantes de Sobolev $S_{l,m}(\Gamma)$ ($l \geq 1$, $m \geq 1$) sont définies par

$$S_{l,m}(\Gamma) = \inf\{\|Du\|_{L^l}/\|u\|_{L^m}, u \text{ à support fini}\}.$$

Nous avons alors le résultat suivant

3.2. THÉORÈME [Ka]. — *Si (M, g) est de courbure de Ricci uniformément minorée et s'il existe une fonction $V_- : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ telle que le volume de toute boule géodésique $B(x, r)$ soit minoré par $V_-(r)$ alors pour $m \leq \frac{ln}{n-l}$*

$$S_{l,m}(\Gamma) > 0 \text{ si et seulement si } S_{l,m}(M) > 0,$$

où $S_{l,m}(M) = \inf_{u\in C_0^\infty(M)} \|du\|_{L^l}/\|u\|_{L^m}$.

Supposons que $ricci \geq (n-1)\,k\,g$ et $\Lambda_p > 0$, alors d'après (2.4) nous avons $\mathrm{vol}\,B(x, r) \geq C(p, \Lambda_p) r^p$, et les hypothèses du théorème sont vérifiées. De plus le nombre d'arêtes partant de $x \in S$ est borné par $\nu = V_k(4r)/V_-(r)$, où $V_k(r)$ est le volume d'une boule géodésique de rayon r dans l'espace de courbure constante k. D'après le théorème principal (0.7) nous avons $\sqrt{\mu_p(M)} = S_{2,\frac{2p}{p-2}}(M) > 0$ donc $S_{2,\frac{2p}{p-2}}(\Gamma) > 0$. Or, si u est une fonction positive à support fini, nous avons

$$\begin{aligned}\|Du\|_{L^2}^2 = \sum_{x,y,\{x,y\}\in A} |u(x) - u(y)|^2 &\leq 2 \sum_{x,y,\{x,y\}\in A} |u(x) - u(y)|\, u(x) \\ &\leq \sum_{x,y,\{x,y\}\in A} |u^2(x) - u^2(y)|.\end{aligned}$$

Nous avons aussi $\sum_{y,\{x,y\}\in A} |u^2(x)-u^2(y)| \leq \nu^{1/2}|Du^2|(x)$ donc

$$\|Du\|_{L^2}^2 \leq \nu^{1/2}\|Du^2\|_{L^1}.$$

Si u est une fonction de support fini, ceci donne

$$\nu^{1/2}\frac{\|Du\|_{L^1}}{\|u\|_{L^{\frac{p}{p-2}}}} \geq \nu^{1/2}\frac{\|D|u|\ \|_{L^1}}{\|u\|_{L^{\frac{p}{p-2}}}} \geq \frac{\|D\sqrt{|u|}\ \|_{L^2}^2}{\|\sqrt{|u|}\ \|_{L^{\frac{p}{p-2}}}^2} \geq \left(S_{2,\frac{2p}{p-2}}(\Gamma)\right)^2.$$

Donc $S_{1,\frac{p}{p-2}}(\Gamma) \geq \left(S_{2,\frac{2p}{p-2}}(\Gamma)\right)^2 / \nu^{1/2} > 0$, d'après le théorème (3.2) de M. Kanaï ceci implique que $S_{1,\frac{p}{p-2}}(M) > 0$ ou encore que $Is_{p/2} > 0$. ∎

3.3. Remarque. — T. Couhlon obtenait dans ([Co1]), le même résultat avec l'hypothèse supplémentaire que le rayon d'injectivité de (M,g) était positif, en fait cette hypothèse servait uniquement à minorer le volume des boules géodésiques (grâce au résultat de C.B. Croke [Cr]).

Contre-exemple. —

3.4. PROPOSITION. — *Il existe des variétés riemanniennes (M^n,g) qui vérifient $\Lambda_p > 0$ pour au moins un $p \geq n$, mais telles que $Is_p = 0$ pour tout p.*

Preuve. — En dimension 2, la construction se fait à partir du plan hyperbolique (M,g_0). Celui-ci vérifie $Is_p > 0$ pour tout $p \geq 2$, en effet on a simultanément $\operatorname{vol}\partial\Omega \geq \operatorname{vol}\Omega$ et $\operatorname{vol}\partial\Omega \geq 2\sqrt{\pi}(\operatorname{vol}\Omega)^{\frac{1}{2}}$ pour tout ouvert borné Ω de M. On a donc l'inégalité de Sobolev

$$\left(\int_M |u(x)|^{\frac{2p}{p-2}}dv_{g_0}(x)\right)^{1-\frac{2}{p}} \leq C_p\int_M |du|_{g_0}^2(x)dv_{g_0}(x),\ \forall u \in C_0^\infty(M).$$

On considère la métrique $g = \phi g_0$ où $\phi(x) = \varphi(d(x_0,x))$ (x_0 étant un point fixé de M) et où φ vérifie

i) $0 < \varphi \leq 1$

ii) $\varphi = 1$ sur $\mathbf{R}_+ - \cup_{k>0}]k-\varepsilon_k, k+\varepsilon_k[$

iii) $\varphi(k) = e^{-k}$, pour $k \in \mathbf{N} - \{\mathbf{0}\}$.

Par invariance conforme, on a $\int_M |du|_{g_0}^2(x)dv_{g_0}(x) = \int_M |du|_g^2(x)dv_g(x)$ et, d'après i), on a $\int_M |u(x)|^{\frac{2p}{p-2}}dv_g(x) \leq \int_M |u(x)|^{\frac{2p}{p-2}}dv_{g_0}(x)$, donc l'inégalité de Sobolev est encore valable pour (M,g). Cependant nous avons

$$\operatorname{vol}B(x_0,k) \geq 2\pi(\operatorname{ch}k - 1) - \sum_{l=1}^{k} 2\pi(\operatorname{ch}(l+\varepsilon_l) - \operatorname{ch}(l-\varepsilon_l)),$$

il est donc toujours possible de choisir les ε_l de sorte que $\operatorname{vol}B(x_0,k)$ soit minoré par $2\pi(\operatorname{ch}k-2)$. Comme par ailleurs le volume de $\partial B(x_0,k)$ est majoré par $2\pi e^{-k}\operatorname{sh}k$, nous avons

$$Is_{p'} \leq \frac{\operatorname{vol}\partial B(x_0,k)}{(\operatorname{vol}B(x_0,k))^{1-1/p'}} \leq C^{\mathrm{te}}(\operatorname{ch}k-2)^{\frac{1}{p'}-1},$$

en faisant tendre k vers l'infini on obtient $Is_{p'} = 0$ pour tout $p' > 1$.

En dimension supérieure, on considère le produit riemannien $\mathbf{R}^{n-2} \times M$, où $\mathbf{R}^{n-2}$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et M de la métrique g construite précédemment. Si $P(t, x, y)$ est le noyau de la chaleur de $\mathbf{R}^{n-2} \times M$, on a

$$P(t, x, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n-2}{2}}}\ P^g(t, x', x'),$$

où x' est la projection de x sur M et P^g le noyau de la chaleur de (M, g). Le théorème principal 0.7 implique que, si $p' \geq 2$, alors $P(t, x, x) \leq C^{\mathrm{te}}\ t^{-\frac{n+p'-2}{2}}$ pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$ et tout $x \in \mathbf{R}^{n-2} \times M$, ce qui équivaut à l'inégalité de Faber-Krahn $\Lambda_p > 0$ pour tout $p \geq n$. Cependant les domaines $\Omega_k = B(0, e^k) \times B(x_0, k)$ vérifient $\operatorname{vol}\Omega_k \geq C^{\mathrm{te}} e^{(n-1)k}$ et $\operatorname{vol}\partial\Omega_k \leq C^{\mathrm{te}} e^{(n-2)k}$, ce qui donne

$$Is_{p'} \leq \frac{\operatorname{vol}\partial\Omega_k}{(\operatorname{vol}\Omega_k)^{1-1/p'}} \leq C^{\mathrm{te}} e^{-k(1-\frac{n-1}{p'})}.$$

En faisant tendre k vers l'infini, on obtient $Is_{p'} = 0$ pour tout $p' \geq n$. ■

4. Cas des variétés compactes

Dans cette partie, (M, g) est une variété riemannienne compacte connexe de dimension n. On définit, pour $p \geq n$, la constante isopérimétrique de Faber-Krahn

$$\Lambda_p = \inf\{\lambda_1^D(\Omega) \operatorname{vol}(\Omega)^{\frac{2}{p}},\ \Omega \text{ ouvert de } M \text{ tel que} \operatorname{vol}\Omega \leq \operatorname{vol} M/2\}.$$

Cette constante minore $\Lambda_p(\Omega)$ (défini en (1.3)) pour tout ouvert Ω de M de volume inférieur à $\operatorname{vol} M/2$. Un tel ouvert peut être considéré comme une variété non-compacte, mais non-complète. Les preuves des résultats des sections 1 et 2 y sont aisément transposables, Λ_p permet donc de majorer le noyau de l'opérateur de la chaleur de Ω pour les conditions de Dirichlet, d'obtenir la norme de l'inclusion de Sobolev de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{\frac{2p}{p-2}}(\Omega)$, de minorer le spectre du Laplacien pour le problème de Dirichlet sur Ω, de minorer le volume des boules géodésiques de volume inférieur à $\operatorname{vol} M/2$,...

Compacité de l'ensemble des variétés vérifiant une inégalité de Faber-Krahn. —

4.1. Proposition . — *Soit $\mathcal{M}_{p,v,\Lambda}$ l'ensemble des variétés riemanniennes connexe compactes vérifiant l'inégalité isopérimétrique de Faber-Krahn $\Lambda_p \geq \Lambda$ et telles que $\operatorname{vol} M \leq v$, alors $\mathcal{M}_{p,v,\Lambda}$ est précompacte pour la topologie de Hausdorff-Gromov.*

C'est une conséquence de la proposition suivante montrée dans [G-L-P] (p. 63):

4.2. Théorème . — *Un ensemble $\mathcal{M}$ d'espaces métriques compacts est précompact pour la distance de Hausdorff-Gromov si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}$ tel que, pour chaque élément X de $\mathcal{M}$, le nombre maximal de boules disjointes de rayon ε contenues dans X est majoré par N.*

Preuve. — Soit $V(r) = \inf\{\frac{v}{2}, \big(\frac{\Lambda}{2^{p+2}}\big)^{p/2} r^p\}$. En vertu de la proposition 2.4, sur toute variété $M \in \mathcal{M}_{p,v,\Lambda}$, le volume d'une boule géodésique de rayon ε est minoré par $V(\varepsilon)$. Ceci implique que le nombre maximal de boules disjointes de rayon ε contenues dans M est majoré par $v/V(\varepsilon)$. ■

Inégalité de Sobolev. — Soit $p \geq n$ et $q = 2p/(p-2)$, on note $V = \operatorname{vol} M$ et A_p la meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev

$$\|u\|_{L^q} \leq A_p \|du\|_{L^2} + V^{-1/p}\|u\|_{L^2}, \forall u \in C_0^\infty(M). \tag{4.3}$$

4.4. Proposition . — *A_p et Λ_p sont mutuellement contrôlés, i.e. il existe deux constantes $C_1(p)$ et $C_2(p)$ telle que $C_1(p)\Lambda_p \leq 1/A_p^2 \leq C_2(p)\Lambda_p$.*

Preuve. — Soit $\mu_p(M) = \inf\{\mu_p(\Omega)/\Omega \text{ ouvert tel que} \operatorname{vol}\Omega \leq \operatorname{vol} M/2\}$, d'après le résultat (1.3), on a $\mu_p(M) \leq \Lambda_p \leq C(p)\mu_p(M)$, il suffit donc de montrer que μ_p et A_p sont mutuellement contrôlés. Si Ω est un ouvert de M vérifiant $\operatorname{vol}\Omega \leq \frac{1}{2}\operatorname{vol} M$, et si $u \in H_0^1(\Omega)$, nous avons, grâce à l'inégalité de Hölder, $\int_M u^2 dv_g \leq \big(\int_\Omega u^q\big)^{2/q}(\operatorname{vol}\Omega)^{2/p}$, d'où $\frac{1-(1/2)^{1/p}}{A_p} \leq \frac{\|du\|_{L^2}}{\|u\|_{L^q}}$. Nous obtenons $\sqrt{\mu_p} \geq \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}}{A_p}$.

Inversement, si $u \in C^\infty(M)$, nous avons :

$$\|u\|_{L^q} \leq \|u - \frac{\int u}{V}\|_{L^q} + |\frac{\int u}{V}|V^{1/q}.$$

Si $g = u - \frac{\int u}{V}$, on a $\int g = 0$, donc $\int g^2 \leq \frac{1}{\lambda_1}\int |dg|^2$, où λ_1 est la première valeur propre non nulle de Δ sur M. Un des deux domaines nodaux d'une première fonction propre à un volume inférieur ou égal à $\operatorname{vol} M/2$, donc $\lambda_1 \geq \mu_p(\frac{\operatorname{vol} M}{2})^{-2/p}$. Soit a tel que $\operatorname{vol}\{g > a\} \leq \operatorname{vol}(M)/2$ et $\operatorname{vol}\{g < a\} \leq \operatorname{vol}(M)/2$, quitte à changer u en $-u$ on peut supposer $a \geq 0$; alors $\|g\|_{L^2} \geq \frac{1}{V^{1/2}}\int |g| = \frac{2}{V^{1/2}}\int_{g>0} g \geq aV^{1/2}$. Par ailleurs la définition de μ_p donne $\|g - a\|_{L^q} \leq \frac{1}{\sqrt{\mu_p}}\|dg\|_{L^2}$ et par conséquent

$$\|g\|_{L^q} \leq \|g - a\|_{L^q} + aV^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{\sqrt{\mu_p}}\|dg\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}V^{-1/p},$$

$$\text{c'est à dire :} \ \|u\|_{L^q} \leq \frac{1}{\sqrt{\mu_p}}\|du\|_{L^2} + \|u - \frac{\int u}{V}\|_{L^2}V^{-\frac{1}{p}} + |\frac{\int u}{V}|V^{1/q} \ ;$$

or $\frac{|\int u|}{V} \leq V^{-\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2}$, de plus la minoration de λ_1 donnée ci-dessus implique

$$\|u - \frac{\int u}{V}\|_{L^2} \leq \big(\frac{V}{2}\big)^{1/p}\mu_p^{-1/2}\|du\|_{L^2},$$

nous avons donc

$$\|u\|_{L^q} \leq \frac{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p}}{\sqrt{\mu_p}}\|du\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}V^{-1/p}.$$

Finalement, nous obtenons

$$\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/p}}{A_p} \leq \sqrt{\mu_p} \leq \frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{1/p}}{A_p}.$$

■

Contrôle du noyau de l'opérateur de la chaleur . — Soit $P(t,x,y)$ le noyau de l'opérateur de la chaleur sur M, d'après Varopoulos [Va] l'inégalité de Sobolev (4.3) est équivalente au contrôle suivant de P :

$$P(t,x,x) \leq D(p,A_p)t^{-p/2}, \text{pour } 0 < t \leq (V)^{p/2} \text{ et } x \in M.$$

Il est facile, en procédant comme en 2.6, de voir qu'une telle inégalité permet de minorer Λ_p. Ceci prouve la

4.5. PROPOSITION. — *La constante de Faber-Krahn Λ_p et la meilleure constante D_p dans l'inégalité*

$$P(t,x,x) \leq D_p t^{-p/2}, \text{ valable pour tout } 0 < t \leq (V)^{2/p} \text{ et tout } x \in M,$$

sont mutuellement contrôlées

5 Bibliographie

[Au] T.AUBIN. — *Non-linear analysis on Manifolds, Monge-Ampere Equations*, Springer-Verlag,p.115-119, New-York, 1982.

[Bu] P.BUSER. — *A note on the isoperimetric constant*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **154** (1982), 213–230.

[C-K-S] E.A.CARLEN, S.KUSUOKA, D.W.STROOCK. — *Upper bounds for symetric Markov transtion densities*, Ann. Inst. H. Poincaré, Proba. Statist., **23** (1987), 245–287.

[Ch] I.CHAVEL. — *Eigenvalues in riemannian geometry*, Academic Press, 1984.

[C-F] I.CHAVEL, E.A.FELDMAN. — *Isoperimetric constants, the geometry of ends, and large time heat diffusion in riemannian manifolds*, Proc. London Math. Soc., **(3), 62** (1991), 427–448.

[C-L] S.Y.CHENG P.LI. — *Heat kernel estimates and lower bounds of eigenvalues*, Comment. Math. Helv., **56** (1981), 327–338.

[Co1] T.COUHLON. — *Sobolev inequalities on graphs and on manifolds*, in Harmonic Analysis and Discrete Potential Theory, plenum, 1992.

[Co2] T.COULHON. — *Inégalités de Gagliardo-Nirenberg pour les semigroupes d'opérateurs et applications*, Potential Analysis, **1** (1992), 343–353.

[Cr] C.B.CROKE. — *Some isoperimetric inequalities and eigenvalues estimates*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. , **13** (1980), 419–435.

[D] E.B.DAVIES . — *Explicit constants for Gaussian upper Bound on heat Kernels*, Amer. J. Math., **109** (1987), 319–334.

[F] G. FABER . — *Beweis dass unter allen homogenen Menbranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundtonggibt*, Sitzungsber. Bayer. Akad. der Wiss. Math.-Phys. , p.169-172, Munich, 1923.

[F-F] H.FEDERER, W.H. FLEMING. — *Normal and integral currents*, Ann.of Math., **72** (1960), 458–520.

[Ga] E.GAGLIARDO. — *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ric. Math., **7** (1958), 102–137.

[G1] A.A.Grigor'yan. — *On the existence of a Green's function on a Manifold*, Russian Math. Surveys, **38** (1983), 161–162.

[G2] A.A.Grigor'yan. — *On the existence of positive fundamental solutions of the Laplace equation on Riemannian Manifold*, Math. USSR Sbornik, **56** (1987), $n^o 2$, 349–357.

[G3] A.A. Grigor'yan. — *Heat kernel upper bounds on a complete non-compact manifold*, Rev. Mat. Iberoamericana, **10** (1994), 395–452.

[G-L-P] M.Gromov, J.Lafontaine, P. Pansu. — *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Textes Math. $n^o 1$, Cedic-Nathan, 1981.

[Ka] M.Kanai. — *Analytic inequalities and rough isometries between non-compact riemannian manifolds*, in Curvature and Topology of Riemannian Manifolds, Springer, Lecture Notes n^o 1201, p.122-137, 1986.

[K1] E. Krahn. — *Über eine von Raleigh formulierte Minimaleigenschaft der Kreise*, Math. Ann., **94** (1924), 97–100.

[K2] E. Krahn. — *Über Minimaleigenschaften der Kugel in drei und mehr dimensionen*, Acta Comm. Univ. Tartu (Dorpat), **A9** (1926), 1–44.

[M] V.G. Maz'ya. — *Classes of domains and imbedding theorems for functions spaces*, Soviet Math. Dokl., **2** (1960), 882–885.

[N] L.Nirenberg. — *On elliptic partial differential equations*, Ann. Sc. Norm. Pisa, **13** (1959), 116–162.

[Ta] G.Talenti. — *Best Constant in Sobolev inequalities*, Ann. Math. Pura Appl.(4), **110** (1976), 353–372.

[Va] N.Varopoulos. — *Hardy-Littlewood theory for semigroups*, J. Funct. Anal., **63, n^{o}2** (1985), 240–260.