

Feuilles n° 1 et n° 3
corrigés

Exercice 9 feuille 1

Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif \mathbb{k} de caractéristique différente de 2.

On considère deux projecteurs p et q de $\mathcal{L}(E)$.

1° Montrons que

$$p + q \text{ est un projecteur} \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = 0$$

On utilisera fréquemment le fait que si p est un projecteur alors $p \circ p = p$.

$p + q$ est un projecteur si et seulement si $(p + q)^2 = p + q \Leftrightarrow p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q \Leftrightarrow p \circ q + q \circ p = 0$.

C.N. Comme $p + q$ est un projecteur, c'est que $p \circ q + q \circ p = 0$ (*)

→ En composant à droite par p , on a $p \circ q \circ p + q \circ p = 0$.

→ En composant à gauche par p , on a $p \circ q + p \circ q \circ p = 0$.

Ce qui prouve que $p \circ q = q \circ p$.

En remplaçant dans (*), on a $2p \circ q = 0$, et comme \mathbb{k} est de caractéristique différente de 2, c'est que $p \circ q = 0$.

C.S. Si $p \circ q = q \circ p = 0$, alors $p \circ q + q \circ p = 0$, et d'après ce qui précède, $p + q$ est un projecteur.

2° a) Montrons que si $p + q$ est un projecteur, on a $\text{Im}(p + q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$

→ Soit $v \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$, alors $\exists a, b \in E$ tels que $v = p(a)$ et $v = q(b)$.

Alors $p(v) = p(a) = v = p \circ q(b) = 0$ d'après le 1° ; d'où $\text{Im } p \cap \text{Im } q = \{0\}$.

On a donc $\text{Im } p + \text{Im } q = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$.

→ Soit $v \in \text{Im}(p + q)$, alors $\exists a \in E$ tel que $v = (p + q)(a) = p(a) + q(a) \in \text{Im } p + \text{Im } q$.

D'où $\text{Im}(p + q) \subset \text{Im } p \oplus \text{Im } q$.

→ Réciproquement. Soit $v \in \text{Im } p \oplus \text{Im } q$; $\exists a, b \in E$ tels que $v = p(a) + q(b)$.

Alors $(p + q)(v) = p(a) + p \circ q(b) + q \circ p(a) + q(b) = p(a) + q(b)$ (car $p \circ q = q \circ p = 0$), d'où $(p + q)(v) = v$.

Ce qui prouve que $v \in \text{Im}(p + q)$, et par suite que $\text{Im } p \oplus \text{Im } q \subset \text{Im}(p + q)$.

b) Montrons que si $p + q$ est un projecteur, on a $\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$.

→ Soit $u \in \ker p \cap \ker q$. $(p + q)(u) = p(u) + q(u) = 0 + 0 = 0$, d'où $\ker p \cap \ker q \subset \ker(p + q)$.

→ Réciproquement. Soit $u \in \ker(p + q)$. $(p + q)(u) = 0 = p(u) + q(u) \Rightarrow p(u) = -q(u)$.

Or $q \circ p = 0$, donc $q \circ p(u) = 0 = q(-q(u)) = -q^2(u) = -q(u) \Rightarrow q(u) = 0 \Rightarrow u \in \ker q$.

De même on a $p(u) = -q(u) = 0 \Rightarrow u \in \ker p$.

D'où $u \in \ker p \cap \ker q$, et par suite, $\ker(p + q) \subset \ker p \cap \ker q$.

On a donc montré que $\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$.

Exercice 11 feuille 3

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

1° Trouvons les droites de \mathbb{R}^3 stables par f .

Soit $D = \mathbb{R}u$ une telle droite ; alors $f(u)$ est colinéaire à u , ie $f(u)$ est un vecteur propre de f .

Réciproquement, si u est vecteur propre de f , il est clair que la droite engendrée par u est stable par f . On a

$$P_{car} = -X(X + 2)^2$$

On trouve que $\ker f = \text{Vect}\{(3, 1, 5)\}$ et que $\ker(f + 2id) = \text{Vect}\{(1, -1, 1)\}$.

Ainsi il n'y a que deux droites de \mathbb{R}^3 stables par f , ce sont $\ker f = D_1$ et $\ker(f + 2id) = D_2$.

2° Soit P un plan de \mathbb{R}^3 stable par f ; montrons que soit $P = \ker(f^2 + 2f)$, soit $P = \ker(f + 2id)^2$.
 Soit Δ telle que $\mathbb{R}^3 = P \oplus \Delta$, et soit β une base adaptée à cette décomposition. La matrice de f dans cette base est triangulaire par blocs, de la forme

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}} & \cdot \\ 0 & 0 & \boxed{\cdot} \end{pmatrix}$$

D'où le polynôme caractéristique Q de la restriction $f|_P$ de f à P divise P_{car} et est de degré 2.

Donc soit $Q = (X + 2)^2$, soit $Q = X(X + 2)$. Or, par le théorème de Cayley-Hamilton, $Q(f|_P) = 0$, ce qui nous donne

$$\forall u \in P, (f + 2id)^2(u) = 0, \text{ ou } \forall u \in P, f \circ (f + 2id)(u) = 0.$$

Donc soit $P \subset \ker(f + 2id)^2$, soit $P \subset \ker(f^2 + 2f)$

→ $\ker(f + 2id)^2$ est le sev caractéristique pour $\lambda = -2$.

Il est de dimension > 1 , et $\leq 3 - 1$ (il faut "laisser la place" à F_0).

D'où $\dim \ker(f + 2id)^2 = 2 = \dim P$, et donc si $P \subset \ker(f + 2id)^2$, alors $P = \ker(f + 2id)^2$.

→ X et $X + 2$ sont premiers entre eux ; par le théorème des noyaux, on a

$$\ker(f \circ (f + 2id)) = \ker f \oplus \ker(f + 2id), \text{ et par suite,}$$

$$\dim \ker(f^2 + 2f) = 2 ; \text{ comme précédemment, on a } P = \ker(f^2 + 2f).$$

On a donc montré que s'il existe un plan stable par f , alors ce ne peut être que $P_1 = \ker(f^2 + 2f)$ ou $P_2 = \ker(f + 2id)^2$.

On rappelle que si deux endomorphismes commutent, alors le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.

Puisque f commute avec $f^2 + 2f$ et avec $(f + 2id)^2$, on a bien que P_1 et P_2 sont stables par f .

Il n'y a que deux plans de \mathbb{R}^3 stables par f ; ce sont P_1 et P_2 .

Exercice 12 feuille 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouvons toutes les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ telles que $M^3 = I_n$.

$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $1^3 = 1, 2^3 = 1, 3^3 = -1, 4^3 = 1, 5^3 = -1, \text{ et } 6^3 = -1$.

Si $M^3 = I_n$, alors $X^3 - 1$ est annulateur de M . Or dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ on a

$$X^3 - 1 = (X - 1)(X - 2)(X - 4).$$

On a un polynôme annulateur de M qui est scindé, donc si M est telle que $M^3 = I_n$, alors M est semblable à une matrice diagonale, de coefficients diagonaux appartenant à $\{1, 2, 4\}$.

Réciproquement, si M est semblable à une matrice diagonale de coefficients diagonaux appartenant à $\{1, 2, 4\}$, alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ tq $M = PDP^{-1}$. On a $M^3 = PD^3P^{-1} = PIP^{-1} = I$ ($1^3 = 1, 2^3 = 1$ et $4^3 = 1$).

Ainsi, les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ telles que $M^3 = I_n$ sont les matrices diagonalisables à valeurs propres dans $\{1, 2, 4\}$.

Exercice 13 feuille 3

Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice r d'un \mathbb{k} espace vectoriel E de dimension finie $n > 0$.

1° Montrons qu'il existe une base de E dans laquelle u est représenté par une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle.

→ X^r est un polynôme annulateur de u , d'où $P_{\min} | X^r$, ie $P_{\min} = X^q$.

Ainsi, u a une seule valeur propre $\lambda = 0$ (on sait déjà ici que $P_{car} = (-1)^n X^n$ puisque les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme minimal).

→ Soit $N_1 = \ker u, N_2 = \ker u^2, \dots, N_q = \ker u^q = E$ (= le sous-espace caractéristique pour $\lambda = 0$).

On a $N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_q$.

→ Prenons une base adaptée à cette inclusion de noyaux.

Comme u permute avec tous les u^k , tous ces noyaux sont stables par u .

Dans cette base, on a donc une matrice de la forme

