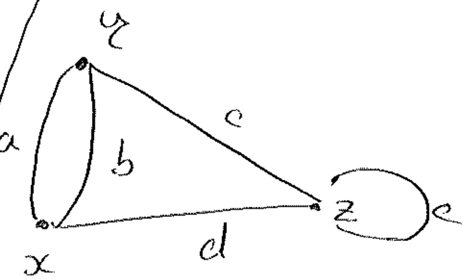
Généralités sur les graphes
- Quelques définitions -

- Un graphe G est défini par deux ensembles
  - → L'ensemble $X \neq \emptyset$ des sommets
  - → L'ensemble E des arêtes, qui sont des paires de sommets

NB : Dans cette définition, on considère un graphe où les arêtes n'ont pas d'orientation (pas de différence entre l'arête xy et l'arête yx)

Ex 1



$X = \{x, y, z\}$

$E = \{a, b, c, d, e\}$

- Le degré d'un sommet $x \in X$ est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet, ie qui ont x pour extrémité. On le note $d(x)$.

$d(x) = 3 = d(y)$

$d(z) = 4$

NB : les boucles comptent double

On note Δ le degré maximal du graphe

- Une chaîne dans un graphe G est une séquence

$$(x_0, e_1, x_1, \dots e_k, x_k)$$

où $x_i \in X$, $e_i \in E$ et e_i a pour extrémités x_{i-1} et x_i

Un cycle est une chaîne telle que, avec les mêmes notations,

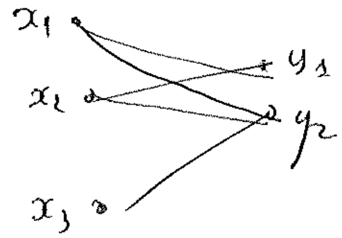
$$x_k = x_0$$

(On revient au point de départ)

La longueur d'une chaîne ou d'un cycle est le nombre d'arêtes (avec ces notations : k).

- Un graphe est <u>connexe</u> si pour tous sommets x, y dans X, il existe une chaîne qui les relie.
- Un graphe est dit <u>biparti</u> si l'ensemble des sommets peut être scindé en deux parties disjointes, X et Y, telles que toute arête a une ~~sommet~~ extrémité dans X et une dans Y.

<u>Ex</u>



<u>Lemme</u> (Caractérisation des graphes bipartis)

Un graphe est biparti ssi il ne comporte pas de cycles impairs.

<u>Preuve</u>

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons, par l'absurde, qu'il existe un cycle de longueur impaire

$$(x_0, e_1, x_1 \dots x_{2k}, e_{2k+1}, x_0)$$

Chaque e_i a une extrémité dans X (disons x_{i-1}) et une dans Y (x_i)

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x_0, x_2 \dots x_{2k} \in X \\ \Rightarrow x_1 \dots x_{2k-1} \in Y \\ \quad \text{ainsi que } x_0 \end{array}\right\} \quad x_0 \in X \cap Y : \text{contradiction.}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ On construit une "bipartition" : on note 0 un des sommets, disons x_0 du graphe, on note 1 ses voisins, puis 0 les voisins non encore marqués des voisins de x_0, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les sommets soient marqués (au besoin, on fait de même pour chaque composante connexe).

Supposons que deux sommets voisins x, x' aient la même étiquette (disons 0) ($\Longleftrightarrow$ le graphe n'est pas biparti) alors on construit un cycle impair en concaténant

$$\left.\begin{array}{l} \text{la chaîne allant de } x_0 \text{ à } x \\ \text{la chaîne allant de } x_0 \text{ à } x' \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{induites par la construction} \\ \text{de la bipartition} \end{array}$$

et l'arête reliant x à x' $\square$

Colorations et emplois du temps

- Le premier problème de ce type a été posé au XIX^{e} siècle par Guthrie, qui a conjecturé que toute carte du plan pouvait être coloriée avec seulement 4 couleurs de manière à ce que deux pays frontaliers ne soient pas de même couleur.

→ On peut modéliser ceci en plaçant un sommet dans chaque pays, et en reliant deux pays s'ils sont frontaliers.

- Ici, on s'intéressera à une coloration des arêtes, et non des sommets, plus propice à la modélisation de l'emploi du temps.

- Notions préliminaires

→ On considèrera des graphes finis et sans boucles

→ Étant donné un graphe G et un entier k, on appelle <u>k-coloration des arêtes</u> une application de l'ensemble E des arêtes dans un ensemble à k éléments (couleurs), telle que 2 arêtes voisines (ie partageant une extrémité) aient une couleur différentes

→ <u>L'indice chromatique</u> $q(G)$ de G est le plus petit entier k tel qu'il existe une k-coloration de G. C'est souvent "l'inconnue" des problèmes d'optimisation.

- Résultats de base

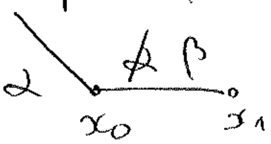
→ On obtient facilement, pour Δ degré maximal et m = card (E) nombre d'arêtes

$$\boxed{\Delta \leq q(G) \leq m}$$

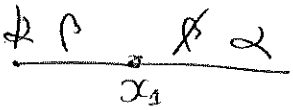
mais c'est un encadrement trop grossier.

Théorème Si G est un graphe biparti, $\boxed{q(G) = \Delta}$

- Plutôt qu'une preuve formelle, on va donner un aperçu de construction d'une telle coloration optimale.
- Pour ce faire, on considère une Δ-pseudocoloration de G, ie une application de E dans un ensemble à Δ éléments, sans condition sur les arêtes voisines (trivialement, on peut assigner à chaque arête la même couleur).
- Soit x_0 un sommet de G ayant 2 arêtes incidentes de même couleur (disons α). Comme il y a Δ couleurs, cela signifie qu'il y en a (au moins) une, disons β, qui n'apparaît sur aucune arête incidente à x_0.
- On "améliore" la pseudocoloration en remplaçant un des doublons α par β. Ceci a des conséquences sur le sommet x_1



1) Si, avant intervention, x_1 avait exactem^t une arête α et une arête β (x_1 est "valide"), on se retrouve avec **2** β. On remplace alors le second β par α et on passe au suivant $\Rightarrow$ <u>le sommet reste valide</u>



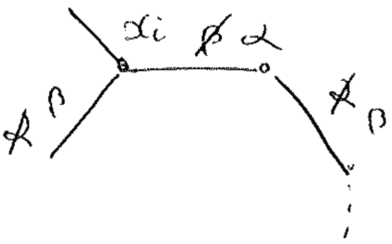
2) Si avant, il y avait 1 ou plus α autour de x_1 et au moins un β, on remplace un des β par α et on passe au suivant $\Rightarrow$ <u>le nombre de doublons reste le même</u>

3) S'il n'y avait aucun β autour de x_1, on ne peut plus restaurer α et on arrête là l'algorithme. On a ainsi supprimé un doublon α autour de x_0 <u>sans en ajouter ailleurs</u>

- Comme G est un graphe fini, soit on va arriver à la 3^ème situation, soit on va retomber sur un sommet déjà visité en ayant parcouru un cycle.

Deux cas possibles:

a) Le cycle est de longueur paire : les modifications (échange α et β) le long du cycle mènent à cette configuration et le nombre de doublons α en x_i n'a pas été augmenté

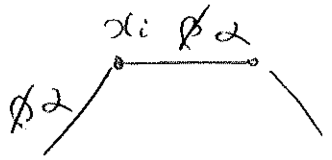


$\rightarrow$ On arrête l'algorithme

Rq si $x_i = x_0$, l'algorithme ne fonctionne pas car alors on a ôté un doublon α, puis on l'a rajouté : pas d'amélioration

Mais comme par hypothèse, β n'apparaissait pas au départ parmi les arêtes incidentes à x_0, ceci ne peut se produire.

b) le cycle est impair : la configuration est comme suit :



on a éventuellement ajouté un doublon α à x_i $\rightarrow$ on tombe sur un cas.

Mais G est biparti et ne comporte aucun cycle impair.

$\Longrightarrow$ Lorsqu'on arrête les échanges α / β, on a amélioré la coloration en x_0 en supprimant un doublon α sans détériorer les autres sommets

En répétant ce procédé pour chaque sommet et chaque couleur, on finit donc par obtenir la Δ-coloration souhaitée. $\square$

Application au problème de l'emploi du temps

Le problème se présente de la façon suivante : des professeurs donnent chaque ~~semaine~~ semaine des cours à des classes, les semaines étant divisées en tranches horaires

→ Quel est le nombre minimal de tranches horaires requis ?

Comme ni les professeurs ni les classes ne se donnent des cours entre eux, on peut représenter l'emploi du temps par un graphe biparti

$G(X, Y, E)$

X : professeurs E : cours à donner.

Y : classes

De plus, comme un même professeur ne donne pas cours à plusieurs classes au même moment, et comme une classe ne reçoit pas cours de 2 professeurs en même temps, chaque ~~couleur~~ tranche horaire peut être associée à une couleur

→ On obtient une coloration de G, optimale avec Δ couleurs.

Remarque Lien avec les couplages.

En théorie des graphes, on appelle couplage un sous ensemble E' de E tel que 2 arêtes e, f de E' n'aient pas d'extrémité commune

Une k-coloration des arêtes correspond donc à une partition de E en k couplages.

Contrainte de salles

Pour compliquer le problème, on peut supposer qu'on n'a qu'un certain nombre s de salles disponibles.

Si m est le nombre total de cours, le nombre k de tranches horaires optimales est tel que $k \geq \max(\Delta, \lceil \frac{m}{s} \rceil)$

($\lceil \; \rceil$ partie entière supérieure)

Pour résoudre ce nouveau problème, on utilise le lemme suivant :

Lemme

$G(X, Y, E)$ graphe biparti, $k \geq \Delta$

Il existe une partition de E en k couplages (ie une k-coloration) ayant, à 1 près, le même nombre d'éléments.

Preuve

Soit une k-coloration quelconque de G, par exemple une Δ-coloration avec $k-\Delta$ couleurs inutilisées.

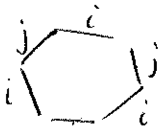
On a donc une partition de G en k couplages $C_1 \dots C_k$, que l'on va "rééquilibrer".

Soient donc C_i et C_j tels que $\text{card}(C_j) > \text{Card}(C_i)+1$.

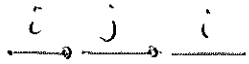
On considère le sous-graphe de G défini en gardant tous les sommets et en ôtant toutes les arêtes n'appartenant pas à $C_i \cup C_j$ (cela revient à ignorer temporairement les autres couplages)

Ce sous graphe a trois types de composantes connexes possibles :

- Sommet isolé
- Cycle élémentaire (c'est-à-dire n'utilisant pas 2 fois le même sommet) aux arêtes alternées, donc pair



- Chaîne élémentaire alternée



Les cycles étant pairs, la différence de cardinal est due aux chaînes élémentaires, c'est-à-dire à une chaîne commençant et finissant par une arête de C_j

$\rightarrow$ On échange les arêtes C_i et C_j le long d'une telle chaîne. Ainsi, il y a un élément de plus dans C_i et un de moins dans C_j

En itérant ce procédé, on finit par obtenir égalité à un près.

On applique ceci aux autres couplages pour obtenir la partition équitable souhaitée $\square$

Rq Le nombre d'arêtes dans chaque couplage est $\lceil \frac{k}{m} \rceil$ ou $\lfloor \frac{k}{m} \rfloor$

Application au problème des emplois du temps

En appliquant le lemme pour $k = \max(\Delta, \lceil \frac{m}{s} \rceil)$, on obtient k couplages comportant au plus $\lceil \frac{m}{k} \rceil$ éléments

Or, par définition de k, $\lceil \frac{m}{s} \rceil \leq k$ donc $\lceil \frac{m}{k} \rceil \leq s$

Ainsi, dans une telle coloration, il n'y a jamais plus de s cours simultanément.

Rq Le lemme permet de construire une emploi du temps viable pour tout $k \geq \Delta$ ce qui permet d'introduire d'autres contraintes.

$\longrightarrow$ cf illustrations pour l'exemple

Références

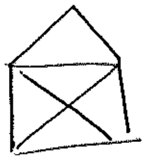
- Jean-Claude Fournier, "Théorie des graphes et applications"
- natureofmathematics.wordpress.com, "Four, five and six colours theorem"

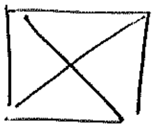
Cycles eulériens

→ Étant donné un graphe, à quelle condition admettra-t-il une chaîne ou un cycle utilisant chaque arête exactement une fois ?
(On dira alors que le graphe est eulérien)

→ Ce problème a un lien avec les célèbres casses-tête suivants

• Pourquoi le schéma (a) peut il être tracé d'un seul trait de crayon, et non (b) ?


(a)


(b)

• Promenade dans Königsberg (cf illustration) : peut-on trouver un chemin dans Königsberg passant une fois sur chaque pont avant de revenir au point de départ ?

Théorème

Un graphe G admet une chaîne ou un cycle eulérien ssi il est connexe et si le nombre de ses sommets de degré impair est 0 ou 2.

Preuve

$\boxed{\Rightarrow}$ S'il existe une chaîne eulérienne, il est clair que le graphe est connexe.
De plus, on vérifie assez facilement que les deux seuls sommets impairs sont les extrémités distinctes de la chaîne
On peut se ramener au cas du cycle en reliant ces 2 extrémités (on n'a alors aucun sommet de degré impair).

$\boxed{\Leftarrow}$ On va démontrer que s'il existe 2 sommets impairs a et b, il existe une chaîne eulérienne commençant en a et finissant en b, et que s'il n'y en a aucun, on a un cycle eulérien.

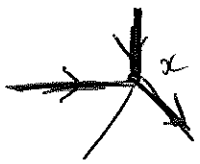
On procède par récurrence sur le nombre m d'arêtes.

* Si $m=1$, c'est clair
* On suppose l'énoncé vrai pour tout graphe de moins de m ~~sommets~~ arêtes et on montre qu'il est vrai pour un graphe à m arêtes.

Pour fixer les idées, on suppose qu'il y a 2 sommets impairs a et b

On part de a en suivant une arête incidente quelconque, et on "voyage" dans le graphe sans jamais passer 2 fois par la même arête. On définit ainsi une chaîne μ. Montrons qu'elle s'arrête nécessairement en b.

Si on arrive à un sommet $x \neq b$, on a "utilisé" un nombre impair d'arêtes incidentes à x : comme x est de degré pair, on peut nécessairement "repartir" par une arête vierge (le cas particulier $x=a$ se traite similairement).



En conséquence, quant on ne peut plus repartir, on est en b.

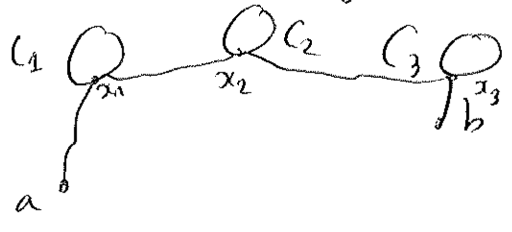
Toutefois, il est possible que toutes les arêtes n'aient pas été visitées.

Lorsqu'on ôte la chaîne μ, il reste un sous-graphe dont tous les sommets sont de degré pair. Soient $C_1 \dots C_n$ les composantes connexes de ce sous graphe.

$\forall i$, C_i est connexe et son nombre d'arêtes est $< m$. Par HDR, ~~elles~~ C_i admet un cycle eulérien μ_i

De plus, G étant connexe, μ rencontre successivement tous les C_i, disons en x_i (dans l'ordre croissant : x_1 puis x_2 ... quitte à réorganiser).

Alors, la chaîne $\mu[a, x_1] + \mu_1 + \mu[x_1, x_2] + \dots + \mu[x_n, b]$ est eulérienne.



□