Groupe Fondamental
Jordan Brand

Introduction - *Le groupe fondamental d'un espace topologique (X,p) est l'ensemble des classes d'homotopie de lacets de X basés en p. C'est un groupe dont la loi de composition interne est induite par la concaténation des arcs.*

I) Espace Topologique

Définition - *Un* ***espace topologique*** *est un couple (E,T), où E est un ensemble et T un ensemble de parties de E que l'on définit comme les ouverts de (E,T), vérifiant les propriétés suivantes:*

1. *L'ensemble vide et E appartiennent à T.*
   $\emptyset \in T, E \in T$
2. *Un intersection finie d'ouverts est ouverte. Soit $O_1, \dots, O_n$ éléments de T,*
   $O_1 \cap \dots \cap O_n \in T$
3. *Une union quelconque d'ouverts est ouverte.*
   $(O_i)_{i \in I}$ *famille (fini ou non) d'éléments de* T, $\cup_{i \in I} O_i \in T$

L'ensemble T, qui est un ensemble de parties de E, est alors appelé une ***topologie*** *sur E.*

Par définition, une partie A de E est fermée si E\A est ouvert.

Exemple - *IR muni de sa topologie usuelle.*

II) Lacet

a) Vocabulaire

Soit X un espace topologique.

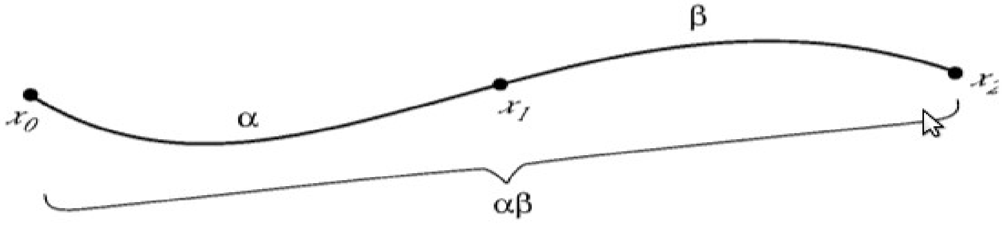
Définition - *Une application $f:E \rightarrow F$ entre deux espaces topologiques est dite* **continue** *si l'image réciproque $f^{-1}(U)$ de tout ouvert U de F est un ouvert de E.*

Définition - *On appelle* **chemin** *de X une application continue $\gamma:[0;1] \rightarrow X$. On dit que $\gamma(0)$ est l'origine et $\gamma(1)$ est son extrémité.*

Définition - *On appelle* **lacet** *(d'extrémité p) sur X un chemin de X tel que $\gamma(0) = \gamma(1) = p$, p étant appelé origine.*

Définition - *Soient α et β deux chemins de X avec $\alpha(1) = \beta(0)$ (les deux chemins sont dit composables). On appelle* **composé** *de α et de β noté αβ le chemin γ de X défini par :*

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{pour } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2t-1) & \text{pour } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



Remarque - *Se dessiner une composé de lacets.*

b) Classe d'équivalence

Définition - *Soit X un espace topologique.*
Soient deux chemins α et β on dit que α et β sont **homotopes** *s'il existe une* **homotopie** *de l'un vers l'autre, c'est à dire une application continue H : [0;1]x[0;1]→X telle que :*

1. $\forall t \in [0;1], H(t,0) = \alpha(t)$
2. $\forall t \in [0;1], H(t,1) = \beta(t)$
3. $\forall x \in [0;1], H(0,x) = \alpha(0) = \beta(0)$
4. $\forall x \in [0;1], H(1,x) = \alpha(1) = \beta(1)$

Le fait d'être homotopes est une **relation d'équivalence** *entre deux chemin, on l'a note α~β.*
Plus vulgairement on parle de déformation continue (on ne déchire pas le lacet).
On note [α] la classe d'équivalence de α pour cette relation. C'est l'ensemble des chemins équivalent à α.

Remarque - *Se dessiner une homotopie de lacets.*

Exemple - *Le tore et ses lacets.*

III) Groupe Fondamental

a) Notion de Groupe

Définition - *Soit G un ensemble non vide. On dit que G est un groupe s'il existe une opération dans G, noté *, ayant les propriétés suivantes :*

1. *Associativité :* $\forall x, y, z \in G, (x * y) * z = x * (y * z)$
2. *Élément neutre :* $\exists! e \in G, e * x = x * e = x, \forall x \in G$
3. *Symétrie :* $\forall x \in G, \exists! x' \in G, x * x' = x' * x = e$

Exemple - *Soit IR muni de la loi de multiplication.*

b) Groupe Fondamental

Théorème/Définition – *On note $\pi_1(X;p)$ l'ensemble des classes d'homotopie (d'équivalence) des lacets de X en p. L'application* $\pi_1(X;p) x \pi_1(X;p) \rightarrow \pi_1(X;p)$ *induite par la composition des lacets, est une loi de groupe.*

Le groupe ainsi obtenu est appelé **groupe fondamental** *(ou* **groupe de Poincaré***) de X basé en p, et est noté $\pi_1(X;p)$.*

Démonstration - *On obtient une structure de groupe car :*

1. *Associativité : (fg)h et f(gh) sont homotopes* $\forall f, g, h \in \pi_1(X;p)$.
2. *Élément neutre : La classe d'homotopie [γ] du lacet γ défini par* $\gamma(t) = p, \forall t$.
3. *Symétrie : L'inverse d'un lacet f est lui même mais parcouru dans l'autre sens.*

IV) Exemple et applications

a) Groupe fondamental du cercle

Définition - *Soit S^1={* $z \in \mathbb{C}$ *| |z|=1}. On définit donc chacun de ses lacets par la fonction* $e_m : [0;1] \rightarrow S^1 ; e_m(t) = e^{2i\pi mt}$ *, avec* $m \in \mathbb{Z}$ *le nombre de tours de cercle que fait le lacet.*
On définit donc $\pi_1(S^1;1)$ = {[e_m], $m \in \mathbb{Z}$ *} le groupe fondamental du cercle S^1 basé en 1.*

Remarque - *Le groupe fondamental du cercle est isomorphe à* $\mathbb{Z}$.
On prend l'isomorphisme $\mu : \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(X;p)$ *qui à un m associe [e_m]*

b) Théorèmes

Le groupe fondamental est à l'origine de démonstrations. L'une des plus célèbres est celle du théorème du point fixe de Brouwer en dimension deux.

Énoncé - *Dans le plan, toute application f continue d'un disque fermé dans lui-même admet au moins un point fixe.*

Démonstration –

Il n'existe pas de rétraction continue du disque dans le cercle.

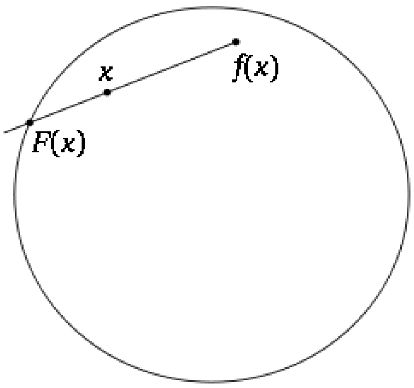
On raisonne par l'absurde et l'on supposant qu'il existe une telle rétraction F. On considère la fonction H(t,x) de [0;1]² dans le cercle, définie par :

$$\forall t, x \in [0;1], H(t,x) = F\left(x.e^{(2\pi it)}\right)$$

Si x est égal à 1, on obtient un lacet d'extrémités le point 1 et qui fait le tour du disque, si t varie. Si x est égal à 0, on obtient un lacet constant de valeur F(0). Le lacet initial serait donc homotope à un point, comme cette propriété est fausse dans le cercle, la proposition est démontrée.

On montre maintenant que :

Si une fonction f du disque dans lui même est sans point fixe et continue, il existe une rétraction continue de F du disque dans le cercle



La fonction F est définie comme indiqué précédemment. Il faut encore montrer qu'elle est continue. On cherche le point appartenant au cercle unité et à la demi-droite d'origine x et dirigée par le vecteur x - f(x). Ce point est l'image d'une valeur positive (ou nulle) de t par la fonction qui à t, associe x + t(x - f(x)). Plus exactement, t est l'unique racine positive du polynôme P(t), défini par (||.|| désigne la norme euclidienne) :

$$Pt(t)=||x+t(x-f(x))||^2-1$$

Ce polynôme est du second degré et s'écrit encore $a(x)t^2 + b(x)t + c(x)$, ici a(x), b(x) et c(x) désignent trois fonctions continues définies sur le disque et à valeurs dans ***R****. On remarque que le coefficient du monôme dominant a(x) est toujours strictement positif (car x est différent de f(x) d'après les hypothèses retenues) et les images du polynôme en 0 et en -1 sont négatives. Un tel polynôme admet toujours une unique racine positive et elle s'écrit comme une fonction, notée λ, continue des trois coefficients a(x), b(x) et c(x). On en déduit que λ est une fonction continue de x et la rétraction F(x), qui s'écrit :*

$$F(x) = x + \lambda(x)(x-f(x)),$$

est aussi continue.

Sources - *Topologie Algébrique de François Laudenbach (Éd. École Polytechnique, 2000);*
Groupe fondamental de Jean Lannes (Éd. École Polytechnique, 2006);
Wikipedia.