

Théorie des Graphes : Le Jeu de Nim

Olivier BATARD

24 janvier 2012

Première partie

Définitions

1 Exemple

De manière intuitive, on peut résumer un graphe à un ensemble de sommets reliés entre eux par des arêtes.

Deux exemples :

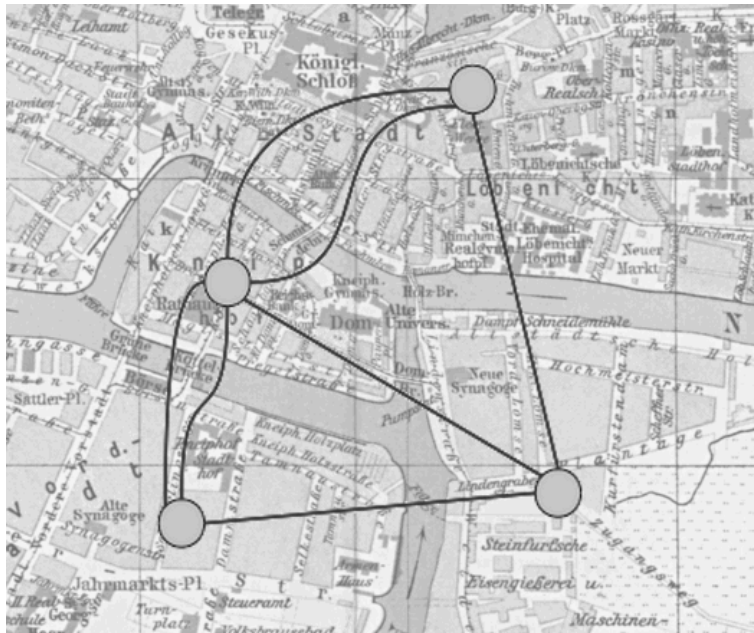


FIGURE 1 – Le problème de ponts de Königsberg : la question est de savoir si on peut passer une unique fois par chaque pont et revenir au même endroit. On peut représenter le problème en un graphe où chaque sommet correspond à un rivage. Deux sommets sont reliés entre eux autant de fois qu'il y a de ponts.

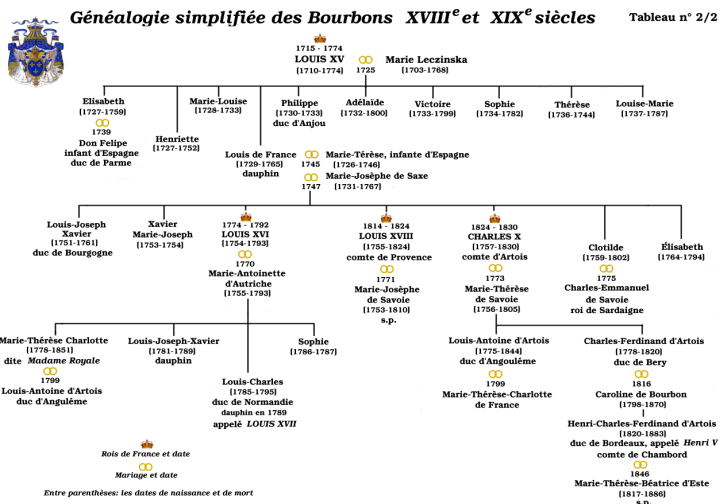


FIGURE 2 – Ici, chaque sommet correspond à une personne (ou un couple), les arêtes correspondent aux filiations. Il s'agit ici d'un graphe "orienté" : les arêtes sont à sens unique. Louis XVI est le petit-fils de Louis XV, et non l'inverse. (image issue de wikipédia).

2 Graphe non-orienté

Un graphe non-orienté est un graphe où les arêtes n'ont pas de "sens" (comme dans le premier exemple). On le définit avec un ensemble de sommets X et un ensemble d'arêtes U de la forme a,b , où a et b appartiennent à X .

a,b est équivalent à b,a : les arêtes ne sont pas orientées.

Un couple a,b peut exister plusieurs fois dans U . Deux sommets sont alors reliés par plusieurs arêtes. Cf problème des ponts de Königsberg.

Le couple aa peut également exister. (on parle alors de boucle).

3 Graphe orienté

Dans le cas des graphes orientés, les éléments de U sont de la forme (a,b) , avec (a,b) différent de (b,a) . On parle alors d'arc et non plus d'arêtes. S'il existe un arête allant de a vers b , on dira que b est un "enfant" (ou fils) de a . Inversement, a est un "parent" (ou père) de b .

Dans la suite, sauf mention contraire, nous étudierons des graphes orientés.

Deuxième partie

Jeu de Nim

Le jeu de Nim se joue ainsi : on dispose quatre tas d'une, trois, cinq et sept allumettes. Chaque joueur retire à son tour une, deux ou trois allumettes d'un seul tas. Le joueur qui retire la dernière allumette a perdu.

Nous en proposerons ici une étude. D'autre manière de faire existe.

4 Modélisation

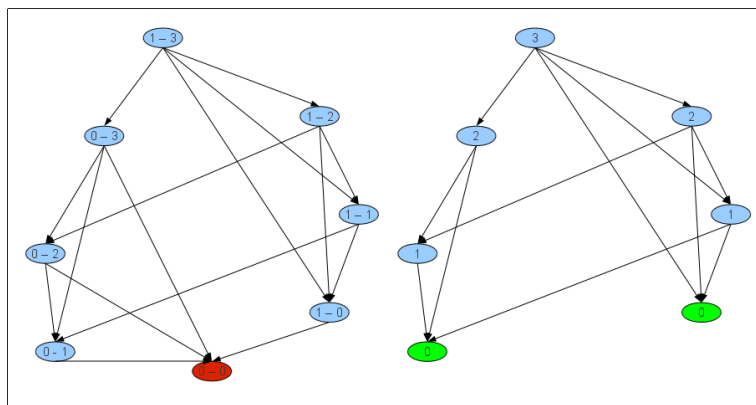
Nous allons représenter chaque situation possible par un sommet. Nous placerons ensuite les arcs représentant les changements possible. Par exemple, la situation 1-3-0-0 (il reste un arête dans le premier tas, trois dans le second, les deux autres sont vides) aura pour enfant : 0-3-0-0, 1-2-0-0, 1-1-0-0, 1-0-0-0 (on peut soit retirer une arête du premier tas, soit en retirer une, deux ou trois du second). Jouer un coup revient donc à choisir un des enfants parmi ceux de la situation actuelle.

Nous ne ferons pas le graphe du Jeu de Nim (il aurait 383 sommets), mais d'une version simplifiée avec deux tas de une et trois allumettes.

Pour des raisons que nous verrons plus tard, on ne représente pas la position finale où il n'y a plus d'allumette. Ainsi, si un joueur choisit un sommet n'ayant pas d'enfant, il gagne (le seul enfant possible serait la position 0-0-0-0, mais nous l'avons retiré du sommet).

On peut en fait étudier de la même manière tout jeu répondant à ces trois conditions :

- Le jeu comporte deux joueurs.
- Chaque joueur joue tour à tour. Ils ne peuvent pas passer leur tour.
- Chaque joueur connaît l'intégralité du jeu. Le jeu ne dépend pas du hasard.



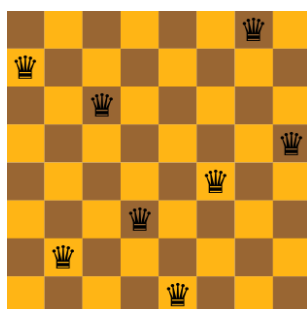
Par exemple des jeux comme les échecs ou le jeu de go peuvent théoriquement être ainsi être étudiés. En pratique, ils ont trop de sommets pour l'être.

5 Quelques notions : Sous ensemble de sommets extérieurement stable

Un sous ensemble de sommets S est dit extérieurement stable si de tout sommet n n'appartenant pas à S , on peut aller dans S .

En terme d'ensemble, si pour tout sommet t n'appartenant pas à S , l'intersection de S et des enfants de t est non vide. Notons qu'un sommet qui n'a pas d'enfant appartient forcément au noyau.

Exemple : Le problème des 5 dames On cherche le nombre de dames minimum nécessaire pour contrôler l'intégralité d'un échiquier : On associe à chaque case un sommet, et on relie deux cases si elles sont sur la même diagonale ou la même ligne. Le problème revient à trouver un ensemble extérieurement stable. (Ici, le graphe n'est pas vraiment orienté : les parents et les enfants d'un sommet sont les mêmes.)

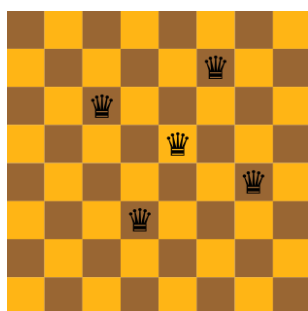


6 Quelques notions : sous-graphe intérieurement stable

Un sous-graphe S est dit intérieurement stable si aucun arc ne relie deux de ses sommets entre eux.

En terme d'ensemble, si pour tout sommet de S , l'intersection de ses enfants et de S est vide.

Exemple : Le problème des 8 dames. On cherche ici à placer huit dames de manière à ce qu'elle ne puisse pas se manger entre elle. Sur le même graphe que le problème des 5 dames, cela revient à trouver un ensemble intérieurement stable : les sommets de S ne communiquent pas entre eux.



7 Résolution : Le noyau

Un noyau est un ensemble intérieurement et extérieurement stable. En d'autre terme : si on se trouve sur un sommet hors du noyau, on sait qu'il existe au moins un enfant de ce sommet dans le noyau. En revanche, si un sommet est dans le noyau, on est sûr que tous ses enfants seront hors du noyau.

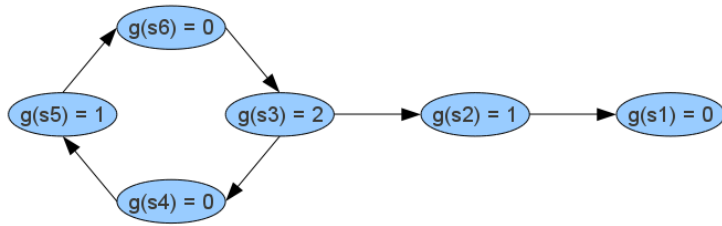
Intérêt du noyau sur le jeu de Nim : Remarquons tout d'abord qu'un sommet gagnant n'a pas d'enfant. Il doit nécessairement appartenir au noyau pour respecter la stabilité externe. Si un joueur choisit un sommet de noyau, son adversaire ne pourra en faire de même : en effet, aucun des enfants de ce sommet n'est dans le noyau. Il choisira donc un sommet hors du noyau. Hors ce second sommet a forcément des éléments du noyau parmi ces enfants. Le premier joueur peut donc à nouveau choisir un sommet dans le noyau. Comme les positions gagnantes sont dans le noyau, il s'assure donc de la victoire.

8 Trouver le noyau : Fonction de Grundy

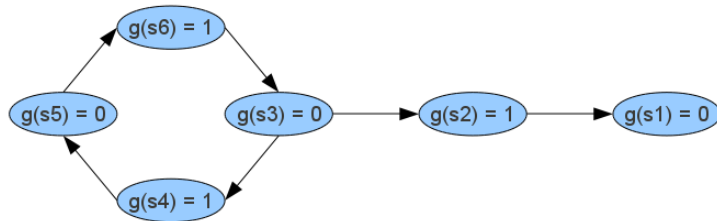
Une fonction de Grundy est une fonction qui à chaque sommet s , associe $g(s)$, le plus petit entier positif ou nul qui n'est associé à aucun de ses enfants.

Exemple : s_1 n'ayant pas d'enfant, $g(s_1) = 0$. s_3 a deux enfants : s_4 et s_2 avec $g(s_2) = 1$ et $g(s_4) = 0$. Le plus petit entier positif différent de 0 et 1 est 2. Dans le cas de s_6 , son seul enfant est s_3 et $g(s_3) = 2$. 0 est plus petit que 2, mais il n'apparaît pas parmi ses enfants.

A noter qu'un graphe peut ne pas admettre de fonction de Grundy (par exemple quand un arc relie un sommet à lui-même), ou en admettre plusieurs.



Pour s'en convaincre, voici une seconde fonction de Grundy pour le graphe précédent.



Dans le cas de graphe tel que ceux modélisant le jeu de Nim, qui ne vont que dans un sens (on ne peut pas remettre d'allumette), une fonction de Grundy est assez facile à obtenir en partant du bas pour remonter peu à peu. Celle du jeu de Nim avec trois tas d'allumettes (respectivement de un, trois et cinq allumettes) se trouve à la fin de ce de ce document.

Le noyau correspond en fait exactement au zéro de la fonction de Grundy ($g(s) = 0$). En effet, si un sommet est un zéro de Grundy, cela veut dire qu'aucun de ses enfants n'est un zéro pour la fonction de Grundy : on a la stabilité interne. De plus, si un sommet n'est pas un zéro de Grundy, c'est que parmi ses enfants se trouve un zéro de Grundy : on a la stabilité interne.

Le noyau sur le graphe suivant est donné par la couleur turquoise : ce sont les positions gagnantes.

Nim 1-3-5

