

Unicité de la solution faible entropique pour des lois de conservation stochastiques du premier ordre

Yueyuan Gao
Université de Tohoku, Japon

Journées Multiphasiques et Incertitudes
13–14 Novembre 2017, Ecole Centrale Nantes



Nous considérons des lois de conservation stochastiques du 1er ordre qui faisant intervenir un processus Q -Wiener.

$$\begin{cases} du + \operatorname{div}(\mathbf{v}f(u))dt = g(u)dW(x, t) & \text{dans } \Omega \times \mathbb{T}^d \times (0, T), \\ u(\omega, x, 0) = u_0(x) & \text{pour tout } \omega \in \Omega, x \in \mathbb{T}^d. \end{cases} \quad (1)$$

Dans cette présentation, nous allons

- 1 Rappel de la convergence d'une solution numérique approchée.
- 2 Démontrer l'unicité de la solution faible entropique.
- 3 Présenter des simulations numériques pour l'équation de Burgers stochastique.

- 1 C. Bauzet, J. Charrier et T. Gallouët, Convergence of flux-splitting finite volume schemes for hyperbolic scalar conservation laws with a multiplicative stochastic perturbation, *Mathematics of Computation*, **85**, 2016, 2777–2813.
- 2 C. Bauzet, J. Charrier et T. Gallouët, Convergence of monotone finite volume schemes for hyperbolic scalar conservation laws with multiplicative noise, *Stochastic Partial Differential Equations: Analysis et Computations*, **4**(1), 2016, 150–223.
- 3 C. Bauzet, J. Charrier et T. Gallouët, Numerical approximation of stochastic conservation laws on bounded domains, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **51**(1), 2017, 225–278.

Soient (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité et $\{\beta_m(t)\}_{\{m \geq 1\}}$ une suite de mouvements browniens indépendants définis sur (Ω, \mathcal{F}, P) . Soit $\{e_m\}_{\{m \geq 1\}}$ une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T}^d)$ qui diagonalise l'opérateur Q , Q est nonnegative et de classe trace. Soit $\{\lambda_m\}_{\{m \geq 1\}}$ les valeurs propres, alors il existe une constante Λ_0 ,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \leq \Lambda_0. \quad (2)$$

Le processus Q -Wiener correspondant est défini par

$$W(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m(t) Q^{\frac{1}{2}} e_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_m} \beta_m(t) e_m(x) \quad (3)$$

Nous présentons le problème parabolique associé,

$$(\mathcal{P}^\epsilon) \begin{cases} du_\epsilon - \epsilon \Delta u_\epsilon dt + \operatorname{div}(\mathbf{v} f(u_\epsilon)) dt = g(u_\epsilon) dW(x, t) & \text{dans } \Omega \times \mathbb{T}^d \times (0, T) \\ u_\epsilon(x, 0) = u_0(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{T}^d \end{cases}$$

avec une condition initiale $u_0(x)$ déterministe.

Ce problème sert à donner une justification formelle de la définition de la solution faible entropique du Problème (1) et à la démonstration de l'inégalité de Kato.

Convergence d'un schéma de volumes finis pour la discrétisation d'une loi de conservation stochastique

Tadahisa Funaki, Y. Gao et Danielle Hilhorst

L'article est soumis et en cours de révision.

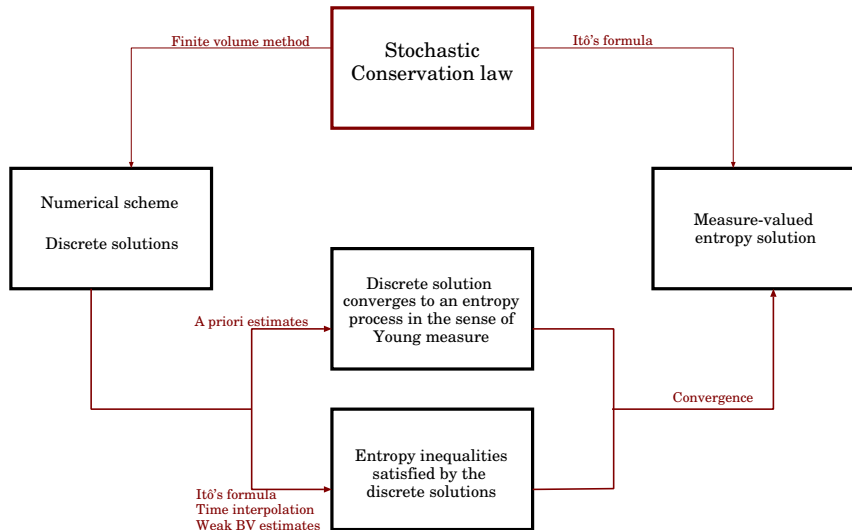
Nous étudions le problème avec les hypothèses (H) suivantes:

- $u_0 \in L^2(\mathbb{T}^d)$ où \mathbb{T}^d est un tore de dimension d ,
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction Lipschitzienne de constante C_f telle que $f(0) = 0$,
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée telle que $|g(u)| \leq M_g$,
- Le vecteur $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, t) \in C([0, T] \times \mathbb{T}^d)$ tel que $|\mathbf{v}(x, t)| \leq V$.

Supposons qu'il existe une constante Λ_1 , telle que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \|e_m\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}^2 \leq \Lambda_1.$$

Schéma de la démonstration



Solution faible entropique

Soit $\mathcal{N}_\omega^2(0, T, L^2(\mathbb{T}^d))$ est l'espace des processus prédictibles de $L^2(\Omega \times \mathbb{T}^d \times (0, T))$ à valeur dans $L^2(\mathbb{T}^d)$.

Définition 1

Une fonction $u \in \mathcal{N}_\omega^2(0, T; L^2(\mathbb{T}^d)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega \times \mathbb{T}^d))$ est une solution faible entropique du Problème (1), si P-presque sûrement

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}^d} \eta(u_0(x))\varphi(x, 0)dx + \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \{\eta(u)\partial_t\varphi(x, t) + F^\eta(u)\mathbf{v} \cdot \nabla_x\varphi(x, t)\}dxdt \\ & + \int_{\mathbb{T}^d} \int_0^T \eta'(u)g(u)\varphi(x, t)dW(x, t)dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \eta''(u)g^2(u)\varphi(x, t) \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m e_m^2(x) dxdt \\ & \geq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Définition 2

Une fonction $\mathbf{u} \in \mathcal{N}_\omega^2(0, T; L^2(\mathbb{T}^d \times (0, 1))) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega \times \mathbb{T}^d \times (0, 1)))$ est une solution entropique à valeur mesure de la loi du Problème (1), si P-presque sûrement

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}^d} \eta(u_0) \varphi(x, 0) dx + \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \int_0^1 \eta(\mathbf{u}(x, t, \alpha)) \partial_t \varphi(x, t) d\alpha dx dt \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \int_0^1 F^\eta(\mathbf{u}(x, t, \alpha)) \mathbf{v} \cdot \nabla_x \varphi(x, t) d\alpha dx dt \\ & + \int_{\mathbb{T}^d} \int_0^T \int_0^1 \eta'(\mathbf{u}(x, t, \alpha)) g(\mathbf{u}(x, t, \alpha)) \varphi(x, t) d\alpha dW(x, t) dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \int_0^1 \eta''(\mathbf{u}(x, t, \alpha)) g^2(\mathbf{u}(x, t, \alpha)) \varphi(x, t) \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m e_m^2(x) d\alpha dx dt \\ & \geq 0. \end{aligned}$$

avec

$$F^\eta(\tau) = \int_0^\tau \eta'(\sigma) f'(\sigma) d\sigma$$

pour tout $\eta \in \mathcal{A}$ où \mathcal{A} est l'ensemble de fonctions convexes de $C^2(\mathbb{R})$ telles que le support de η'' est compact et pour tout $\varphi \in \mathcal{C} := \{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{T}^d \times (0, T)), \varphi \geq 0, \varphi(T) = 0\}$.

R. DiPerna, Measure-valued solutions to conservation laws, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **88**(3), 1985, 223-270.

Étant donné $|K|$ la mesure de la volume K et k le pas de temps, nous proposons le schéma suivant,

$$u_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K u_0(x) dx \quad \text{pour tout } K \in \mathcal{T}.$$

$$\begin{aligned} \frac{|K|}{k} (u_K^{n+1} - u_K^n) + \sum_{L \in \mathcal{N}(K)} |\sigma_{K,L}| \{v_{K,L}^n F(u_K^n, u_L^n) - v_{L,K}^n F(u_L^n, u_K^n)\} \\ = \frac{|K|}{k} g(u_K^n) (W_K^{n+1} - W_K^n), \end{aligned} \quad (5)$$

pour tout $K \in \mathcal{T}$ et pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$, où F est le schéma de Godunov et,

$$W_K^n = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_m} \beta_m(t^n) \frac{1}{|K|} \int_K e_m(x) dx. \quad (6)$$

On note $u_{\mathcal{T},k}(x, t) = u_K^n$ pour $x \in K$ et $t \in [nk, (n+1)k)$.

Théorème 1

Supposons que les hypothèses (H) et en λ_m sont vérifiées. Soient $k = \frac{T}{N}$ et $h = \max_{K \in \mathcal{T}} |K|$ satisfaisant

$$\frac{k}{h} \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

Alors, il existe une fonction $\mathbf{u} \in \mathcal{N}_{\omega}^2(0, T, L^2(\mathbb{T}^d \times (0, 1))) \cap L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega \times \mathbb{T}^d \times (0, 1)))$ et une sous-suite de $\{u_{\mathcal{T}, k}\}$ que l'on note encore $\{u_{\mathcal{T}, k}\}$ telle que $\{u_{\mathcal{T}, k}\}$ converge vers \mathbf{u} au sens des mesures de Young. De plus \mathbf{u} est une solution entropique à valeur mesure du Problème (1) par Définition 2.

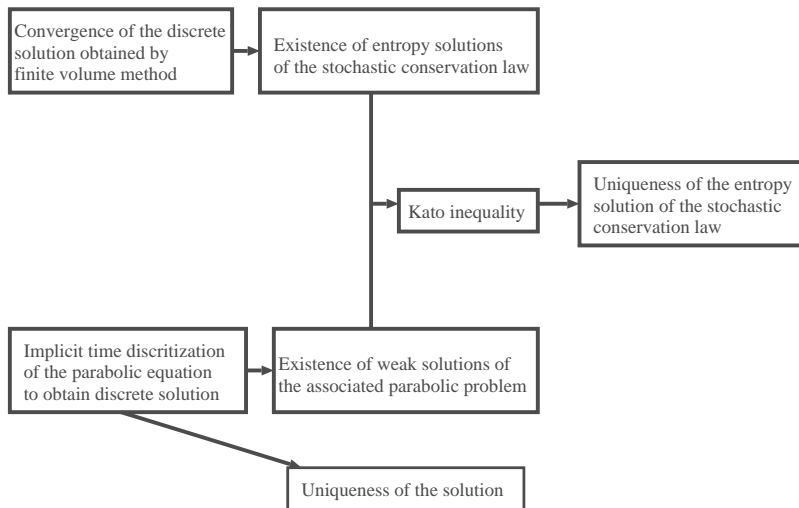
Unicité de la solution entropique de la loi de conservation faisant intervenir un processus Q -Wiener

Tadahisa Funaki, Y. Gao et Danielle Hilhorst

L'article va bientôt être soumis.

- 1 C. Bauzet, G. Vallet and P. Wittbold, The Cauchy problem for a conservation law with a multiplicative stochastic perturbation, *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, (4)9, 2012, 661–709.
- 2 C. Bauzet, G. Vallet and P. Wittbold, The Dirichlet problem for a conservation law with a multiplicative stochastic perturbation, *Journal of Functional Analysis*, (4)266, 2014, 2503–2545.
- 3 A. Debussche and J. Vovelle, Scalar conservation laws with stochastic forcing, *Journal of Functional Analysis*, (4)259, 2010, 1014–1042.

Le plan de la démonstration



Lemme 1 (Inégalité de Kato)

Soient \mathbf{u} , $\hat{\mathbf{u}}$ deux solutions entropiques à valeur mesure de (1) avec les conditions initiales $u_0, \hat{u}_0 \in L^2(\mathbb{T}^d)$. Alors pour toute fonction $\varphi \in H^1(\mathbb{T}^d \times (0, T))$ qui est positive ou nulle avec support compact,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{T}^d} |u_0 - \hat{u}_0| \varphi(0) dx \\ &+ \mathbf{E} \left[\int_{Q_T} \int_0^1 \int_0^1 |\mathbf{u}(x, t, \alpha) - \hat{\mathbf{u}}(x, t, \beta)| \partial_t \varphi dx dt d\alpha d\beta \right] \\ &+ \mathbf{E} \left[\int_{Q_T} \int_0^1 \int_0^1 F(\mathbf{u}(x, t, \alpha), \hat{\mathbf{u}}(x, t, \beta)) \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi dx dt d\alpha d\beta \right] \end{aligned} \quad (7)$$

où $F(a, b) = \operatorname{sgn}(a - b)[f(a) - f(b)]$ avec $\operatorname{sgn}(a) = \frac{a}{|a|}$.

Théorème 2 (Unicité de la solution faible entropique)

La solution faible entropique à valeur mesure est unique. De plus, elle coïncide avec la solution faible entropique unique.

Les étapes de la démonstration:

- Dans (7), choisir $\varphi(x, t) = \psi(|x| - tVC_f)\gamma(t)$ avec ψ régulière, noncroissante telle que $\mathbf{1}_{]-\infty, K]} \leq \psi(\cdot) \leq \mathbf{1}_{]-\infty, K+1]}$ et $K = |\mathbb{T}^d| - tVC_f$, $\gamma(t) = \frac{T-t}{T}$.
- Pour obtenir finalement

$$\mathbb{E} \left[\int_{Q_T} \int_0^1 \int_0^1 |\mathbf{u}(x, t, \beta) - \hat{\mathbf{u}}(x, t, \alpha)| dx dt d\alpha d\beta \right] = 0.$$

- Soit $\alpha = \beta$, on déduit que $\mathbf{u}(x, t, \alpha) = \hat{\mathbf{u}}(x, t, \alpha)$ pour tout (x, t, α) , l'unicité de la solution faible à valeur mesure;
- puis soit $\alpha \neq \beta$, on déduit que $\mathbf{u}(x, t, \alpha) = \mathbf{u}(x, t, \beta)$, ce qui signifie que \mathbf{u} ne dépend pas du 3ème paramètre, donc

$$\mathbb{E} \left[\int_{Q_T} |u(x, t) - \hat{u}(x, t)| dx dt \right] = 0.$$

Pour pouvoir démontrer l'inégalité de Kato en appliquant cette technique, nous utilisons

- L'inégalité entropique pour $\mathbf{u}(x, t, \alpha)$ et une inégalité de $u_\epsilon(y, s)$ basée sur Itô's formula
- Convolutions avec 3 suites régularisantes
 - ρ_n en temps avec $\text{supp } \rho_n = [-2/n, 0]$
 - ρ_m en espace avec $\text{supp } \rho_m = [-2/m, 0]^d$
 - ρ_l en \mathbb{R} de u_ϵ ou de \mathbf{u} avec $\text{supp } \rho_l = [-1/l, 1/l]$
- η_δ , une approximation de $|\cdot|$
- Propriétés de fonctions Carathéodory (quand $\epsilon \rightarrow 0$).

Et nous faisons la somme des 2 inégalités et passons aux limites $n \rightarrow \infty$, $l \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$, puis $m \rightarrow \infty$.

Nous rappelons le problème parabolique associé,

$$(\mathcal{P}^\epsilon) \begin{cases} du_\epsilon - \epsilon \Delta u_\epsilon dt + \operatorname{div}(\mathbf{v}f(u_\epsilon))dt = g(u_\epsilon)dW & \text{dans } \Omega \times \mathbb{T}^d \times (0, T), \\ u_\epsilon(x, 0) = u_0(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{T}^d \end{cases}$$

avec $u_0(x) \in H^1(\mathbb{T}^d)$.

Pour étudier ce problème, nous supposons que les hypothèses (H) et l'inégalité concernant Λ_1 soient validées et qu'en plus il existe une constante positive Λ_2 telle que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \|\nabla e_m\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)^d}^2 \leq \Lambda_2.$$

Définition 3

u_ϵ est une solution faible du problème \mathcal{P}^ϵ si

- 1 $u_\epsilon \in L^2(\Omega; C([0, T]; L^2(\mathbb{T}^d))) \cap L^2((0, T) \times \Omega, H^1(\mathbb{T}^d))$ est un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$;
- 2 $\Delta u_\epsilon \in L^2((0, T) \times \Omega; L^2(\mathbb{T}^d))$
- 3 pour tout $t \in [0, T]$ et P -presque sûrement

$$u_\epsilon(\cdot, t) = u_0(\cdot) + \epsilon \int_0^t \Delta u_\epsilon ds - \int_0^t \operatorname{div}(\mathbf{v} f(u_\epsilon)) ds + \int_0^t g(u_\epsilon) dW(s) \quad (8)$$

dans $L^2(\mathbb{T}^d)$.

Théorème 3 (Existence et Unicité)

Il existe une solution unique du problème (\mathcal{P}^ϵ) .

Quelques simulations numériques de l'équation de Burgers

Publication associée:

E. Audusse, S. Boyaval, Y. Gao and D. Hilhorst, Numerical simulations of the inviscid Burgers equation with periodic boundary conditions and stochastic forcing, *ESAIM: Proceedings and surveys*, **48**, 2014, 308–320.

Nous présentons des simulations numériques pour l'équation de Burgers stochastique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = g \quad (9)$$

sur l'intervalle $(0, 1) \in \mathbb{R}^1$ avec la condition aux limites périodique dans l'intervalle du temps $[0, T]$. La condition initiale $u_0(x)$ est déterministe.

Nous appliquons la méthode de volumes finis, après la discrétisation en espace et en temps, on calcule $\{u_i^{n+1}\}_i$ par le schéma

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left(F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n \right) = \alpha \sqrt{\frac{1}{\Delta x \Delta t}} G_i^n \quad (10)$$

pour tout $i = 1, 2, \dots, I$, I est le nombre de volumes en espace, et pour tout $n \in \{0, 1, 2, \dots, N - 1\}$.

La discrétisation du terme source est

$$\alpha \sqrt{\frac{1}{\Delta x \Delta t}} G_i^n = \alpha \sqrt{\frac{1}{\Delta x \Delta t}} \left(\sqrt{\frac{2}{I}} \sum_{m=1}^{\frac{I-1}{2}} \left(\frac{C_m^n}{m^\beta} \cos(2\pi m x_i) - \frac{S_m^n}{m^\beta} \sin(2\pi m x_i) \right) \right)$$

où

- $\{C_m^n\}_m$ et $\{S_m^n\}_m$ sont des variables aléatoires qui sont indépendantes et identiquement distribuées selon la loi Gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$ que l'ordinateur engendre à chaque pas de temps n .
- α est l'amplitude du bruit; β est la régularité en espace.

Weinan E, K. Khanin, A. Mazel and Y. Sinai, Probability Distribution Functions for the Random Forced Burgers Equation, *Physical review letters*, **78**(10), 1997, 1904-1907.

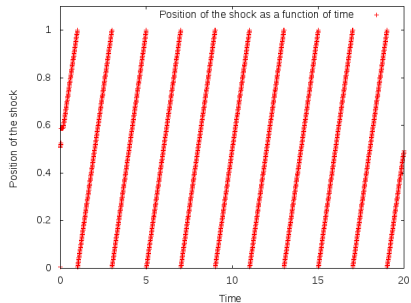
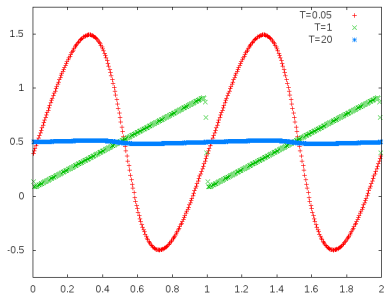
Remarque: le terme source coïncide avec le processus Q -Wiener où

$$Q = (-\Delta)^{-\beta} \text{ et } \{e_m\} = \{\sin(2\pi m x), \cos(2\pi m x)\}.$$

Les données numériques sont les suivantes:

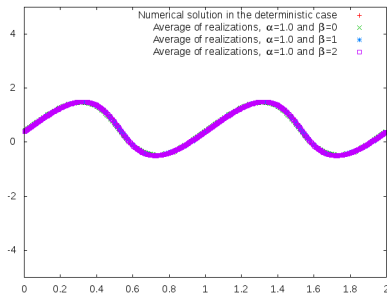
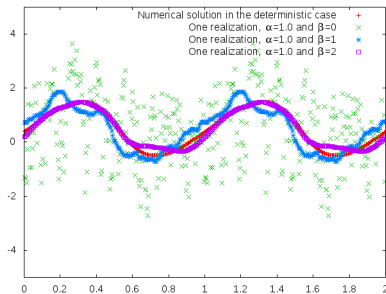
- Condition initiale: $u_0(x) = \sin(2\pi x) + 1/2$ où $x \in [0, 1]$;
- $I = 201$ et donc $\Delta x = 1/201$;
- $\Delta t = 1/10 \cdot \Delta x$ (Une sorte de condition CFL);
- Schéma de Godunov pour des flux numériques;
- Méthode de Monte-Carlo, nous fixons $\alpha = 1$;
- Nous considérons 3 valeurs de β , soient $\{0, 1, 2\}$;
- 16 384 pour tous les choix de (α, β) .

Résultats numériques



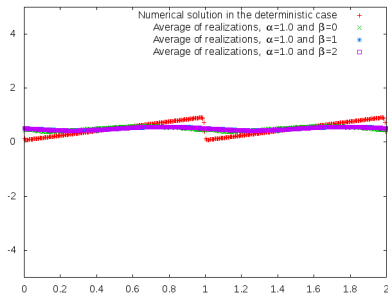
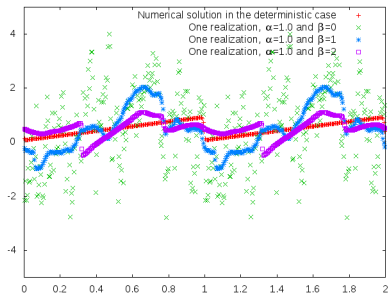
Solution dans le cas déterministe et localisation du choc.

Résultats numériques



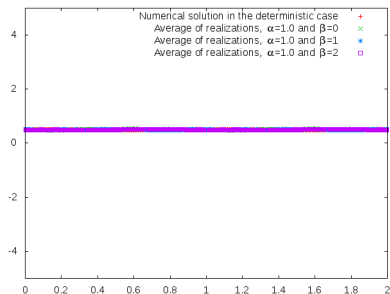
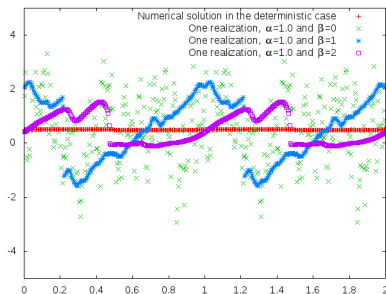
Une seule réalisation (à gauche) et la moyenne des réalisations $\{U(\omega_m)(\cdot, t)\}_{m \in \{1, 2, \dots, 16384\}}$ (à droite); $t = 1/20$.

Résultats numériques



Une seule réalisation (à gauche) et la moyenne des réalisations $\{U(\omega_m)(\cdot, t)\}_{m \in \{1, 2, \dots, 16384\}}$ (à droite); $t = 1$.

Résultats numériques



Une seule réalisation (à gauche) et la moyenne des réalisations $\{U(\omega_m)(\cdot, t)\}_{m \in \{1, 2, \dots, 16384\}}$ (à droite); $t = 20$.

La moyenne empirique a quasiment convergé vers la moyenne en espace de la condition initiale.



La cérémonie d'ouverture du MathAM-OIL a eu lieu le 30 juin 2016. C'est une combinaison du calcul scientifique (AIST) et de l'analyse des matériaux basée sur les méthodes des mathématiques et de la physique (AIMR).

Directeur: Dr. Takeshi NAKANISHI (AIST);
Responsable: Prof. Motoko KOTANI (AIMR);
Responsable: Prof. Yasumasa NISHIURA (AIMR).

Pour plus d'information, aller sur

https://unit.aist.go.jp/matham-oil/index_en.htm

Je vous remercie pour votre attention.

Inégalité pour la solution entropique à valeur mesure

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[\int_{Q_T} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{T}^d} \eta_\delta(u_0^\varepsilon(y) - k) \varphi(y, 0) \rho_n(t) \rho_m(x - y) dy \int_0^1 \mathcal{A}_k^l dpdk \right] \\
 & + \mathbb{E} \left[\int_{Q_T} \int_{\mathbb{R}} \int_{Q_T} \eta_\delta(u_\varepsilon(y, s) - k) \rho_n(t - s) \partial_s \varphi(y, s) \rho_m(x - y) dy ds \int_0^1 \mathcal{A}_k^l dpdk \right] \\
 & + \mathbb{E} \left[\int_{Q_T} \int_{\mathbb{R}} \int_{Q_T} \eta_\delta(u_\varepsilon(y, s) - k) \partial_s \rho_n(t - s) \varphi(y, s) \rho_m(x - y) dy ds \int_0^1 \mathcal{A}_k^l dpdk \right] \\
 & + \mathbb{E} \left[\int_{Q_T} \int_{\mathbb{R}} \int_{Q_T} F^{\eta_\delta}(u_\varepsilon(y, s), k) \mathbf{v} \cdot \rho_m(x - y) \nabla_y \varphi(y, s) \rho_n(t - s) dy ds \int_0^1 \mathcal{A}_k^l dpdk \right] \\
 & + \mathbb{E} \left[\int_{Q_T} \int_{\mathbb{R}} \int_{Q_T} F^{\eta_\delta}(u_\varepsilon(y, s), k) \mathbf{v} \cdot \nabla_y \rho_m(x - y) \varphi(y, s) \rho_n(t - s) dy ds \int_0^1 \mathcal{A}_k^l dpdk \right] \\
 & + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\int_{Q_T} \int_{\mathbb{R}} \int_{Q_T} g^2(u_\varepsilon(y, s)) \eta_\delta''(u_\varepsilon(y, s) - k) \rho_m(x - y) \rho_n(t - s) \varphi(y, s) Q(y, y) dy ds \int_0^1 \mathcal{A}_k^l dpdk \right] \\
 & + \mathbb{E} \left[\int_{Q_T} \int_{\mathbb{R}} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} g(u_\varepsilon(y, s)) \eta_\delta'(u_\varepsilon(y, s) - k) \varphi(y, s) \rho_m(x - y) \rho_n(t - s) dW(y, s) dy \int_0^1 \mathcal{A}_k^l dpdk \right] \\
 & - \varepsilon \mathbb{E} \left[\int_{Q_T} \int_{\mathbb{R}} \int_{Q_T} \eta_\delta'(u_\varepsilon(y, s) - k) \rho_m(x - y) \nabla_y u_\varepsilon(y, s) \nabla_y \varphi(y, s) \rho_n(t - s) dy ds \int_0^1 \mathcal{A}_k^l dpdk \right] \\
 & - \varepsilon \mathbb{E} \left[\int_{Q_T} \int_{\mathbb{R}} \int_{Q_T} \eta_\delta'(u_\varepsilon(y, s) - k) \nabla_y \rho_m(x - y) \nabla_y u_\varepsilon(y, s) \varphi(y, s) \rho_n(t - s) dy ds \int_0^1 \mathcal{A}_k^l dpdk \right] \\
 & := \underline{J}_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 + \underline{J}_7 + J_8 + J_9 \geq 0
 \end{aligned}$$

Inégalité pour la solution faible du \mathcal{P}^ϵ

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[\int_{Q_T} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{T}^d} \eta_\delta(\hat{u}_0(x) - k) \varphi(y, s) \rho_n(-s) \rho_m(x - y) dx \mathcal{B}_k^l dk dy ds \right] \\
 & + \mathbb{E} \left[\int_{Q_T} \int_{\mathbb{R}} \int_{Q_T} \int_0^1 \eta_\delta(\hat{u}(p) - k) \rho_n(t - s) \partial_t \varphi(y, s) \rho_m(x - y) dp \mathcal{B}_k^l dk dy ds \right] \\
 & + \mathbb{E} \left[\int_{Q_T} \int_{\mathbb{R}} \int_{Q_T} \int_0^1 \eta_\delta(\hat{u}(p) - k) \varphi(y, s) \partial_t \rho_n(t - s) \rho_m(x - y) dp \mathcal{B}_k^l dk dy ds \right] \\
 & + \mathbb{E} \left[\int_{Q_T} \int_{\mathbb{R}} \int_{Q_T} \int_0^1 F^{\eta_\delta}(\hat{u}(p), k) \mathbf{v} \cdot \rho_m(x - y) \nabla_x \varphi(y, s) \rho_n(t - s) dp \mathcal{B}_k^l dk dy ds \right] \\
 & + \mathbb{E} \left[\int_{Q_T} \int_{\mathbb{R}} \int_{Q_T} \int_0^1 F^{\eta_\delta}(\hat{u}(p), k) \mathbf{v} \cdot \nabla_x \rho_m(x - y) \rho_n(t - s) \varphi(y - s) dp \mathcal{B}_k^l dk dy ds \right] \\
 & + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\int_{Q_T} \int_{\mathbb{R}} \int_{Q_T} \int_0^1 g^2(\hat{u}(p)) \eta_\delta''(\hat{u}(p) - k) \rho_m(x - y) \rho_n(t - s) \varphi(y, s) Q(x, x) dp \mathcal{B}_k^l dk dy ds \right] \\
 & + \mathbb{E} \left[\int_{Q_T} \int_{\mathbb{R}} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \int_0^1 g(\hat{u}(p)) \eta_\delta'(\hat{u}(p) - k) d\alpha \varphi(y, s) \rho_m(x - y) \rho_n(t - s) dx dW(x, t) \mathcal{B}_k^l dk dy ds \right] \\
 & := I_1 + \underline{I_2} + I_3 + \underline{I_4} + I_5 + I_6 + I_7 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Nous passons les limites par l'ordre: 1. $n \rightarrow \infty$; 2. $l \rightarrow \infty$; 3. $\eta_\delta \rightarrow |\cdot|$; 4. $\epsilon \rightarrow 0$; 5. $m \rightarrow \infty$ pour obtenir

$$\underline{J_1} + I_1 \rightarrow \mathbf{E} \left[\int_{\mathbb{T}^d} |\hat{u}_0(x) - u_0(x)| \varphi(x, 0) dx \right]$$

$$J_2 + \underline{I_2} \rightarrow \mathbf{E} \left[\int_{Q_T} \int_0^1 \int_0^1 |\mathbf{u}(x, t, \beta) - \hat{\mathbf{u}}(x, t, \alpha)| \partial_t \varphi(x, t) dx dt d\alpha d\beta \right]$$

$$J_3 + I_3 = 0$$

$$J_4 + \underline{I_4} \rightarrow -\mathbf{E} \left[\int_{Q_T} \int_0^1 \int_0^1 F(\mathbf{u}(x, t, \beta), \hat{\mathbf{u}}(x, t, \alpha)) \mathbf{v} \cdot \nabla_x \varphi(x, t) dx dt d\alpha d\beta \right]$$

$$J_5 + I_5 \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad J_8 + J_9 \rightarrow 0$$

$$J_6 + I_6 + I_7 + \underline{J_7} \rightarrow 0.$$