Club de Maths de l'Université de Nantes

Activités 2018-2019
premier semestre

Séance du 26 septembre 2018

La saison 2018-19 est inaugurée par un discours d'Éric Paturel qui présente le projet *Math-o-LU* en partenariat avec la maison des mathématiques à Nantes et avec le Lieu Unique : il s'agit de proposer à un grand public des activités mathématiques en lien avec la vie de tous les jours ; ces activités seront animées par des lycéens et des étudiants en mathématiques, ce projet étant porté par François Sauvageot (du lycée Clemenceau) et Éric Paturel (de chez nous). Il y aura trois réunions d'organisation au LU au cours du premier semestre (la première le 17 octobre à 12h30), et les activités seront proposées au grand public à partir de janvier 2019.

À cette présentation, Éric ajoute que la fête de la Science aura lieu les 11, 12 et 13 octobre dans le jardin du Museum ; les intéressés peuvent participer ici aussi à l'animation.

Puis on nous propose les problèmes suivants.

> **Problème 2018-19(1).** *Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux familles d'ensembles (parties d'un même ensemble, pour fixer les idées). Démontrer que*
> $$\cup_{i\in I}(A_i\cap B_i) \;=\; \cap_{X\subset I}\big((\cup_{i\in X}A_i)\cup(\cup_{i\in I\setminus X}B_i)\big).$$
>
> **Problème 2018-19(2).** *Dans un repère affine $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ on se donne les trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA}=n\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{OB}=n\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{OC}=n\overrightarrow{k}$ pour un entier n fixé. Déterminer en fonction de n le nombre de points à coordonnées entières et situés à l'intérieur du tétraèdre $(OABC)$ (on ne compte pas les points situés sur le bord).*

La séance se poursuit ensuite avec un exposé sur les courbes planes : on y présente la notion de courbe plane paramétrée, puis de courbe de classe C^1 avec ses tangentes, puis de courbe de classe C^2 avec les notions de convexité, de courbure, de courbe fermée et de courbe simple. Après avoir explicité les cas de l'ellipse et de la cardioïde, pour lesquels on calcule explicitement la fonction courbure, on définit les *sommets* d'une courbe convexe fermée comme les points de la courbe où la fonction (continue) courbure atteint un extremum local. Enfin, après avoir remarqué que le nombre de sommets est infini ou pair, on énonce le *théorème des quatre sommets* qui affirme qu'une courbe simple de classe C^2 convexe et fermée possède au moins quatre sommets. La preuve n'en sera donné qu'à la séance suivante.

Séance du 3 octobre 2018

On discute un peu collectivement du problème **(2)** du 26 septembre : en notant (x,y,z) les points à dénombrer, il s'agit de compter les triplets d'entiers vérifiant $x>0$, $y>0$, $z>0$ et $x+y+z<n$; après découpage en tranches, on voit qu'il s'agit de calculer une somme du type $\sum_{i=1}^{n-3}\big(\sum_{k=1}^{i}k\big)$. Travail à poursuivre pour la prochaine fois.

Concernant le problème **(1)** du 26 septembre, on donne comme indication (?) de "raconter avec des phrases" le développement du produit :

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n).$$

Puis on propose un nouveau problème.

Problème 2018-19(3). *Par combien de* 0 *se termine le nombre* $1\,000\,000\,!$ *?*

Mais aussitôt on généralise ce problème en

Problème 2018-19(3^{bis}). *En notant* $Z(N)$ *le nombre de zéros figurant à la fin du nombre* N *écrit en base* 10*, calculer* $\lim_{n\to\infty} Z(n!)/n$*. Et en base* b *?*

La fin de la séance est occupée par une démonstration (d'après Osserman) du théorème des quatre sommets dont il a été question la semaine dernière. On commence par une définition : *si* $\mathscr{C}$ *est une figure bornée du plan, on dit que le cercle* Γ *est* circonscrit *à la figure* $\mathscr{C}$ *si* $\mathscr{C}$ *est contenue dans le disque de bord* Γ *mais dans aucun disque de rayon strictement plus petit.* On montre alors que toute courbe fermée du plan possède un unique cercle circonscrit, et que l'intersection de la courbe et de son cercle circonscrit contient soit deux points diamétralement opposés, soit au moins trois points ; et on termine en montrant qu'entre deux tels points consécutifs, il y a au moins un point de courbure localement minimale sur la courbe, et que le nombre de sommets est donc au moins égal au double du nombre de points communs à la courbe et à son cercle circonscrit. D'où le théorème. ∎

Séance du 10 octobre 2018

On commence par une solution du problème **(3)** du 3 octobre. Soit P l'ensemble des nombres premiers. Comme $10 = 2 \times 5$, on a

$$Z(n!) = Z(\textstyle\prod_{p\in P} p^{\alpha_p}) = Z(2^{\alpha_2}5^{\alpha_5}) = \min\{\alpha_2, \alpha_5\}$$

où $n! = \prod_{p\in P} p^{\alpha_p}$ est la décomposition de $n!$ en facteurs premiers. Posons $V_p(N) =$ nombre de facteurs p dans la décomposition de N en facteurs premiers, en sorte que $V_p(n!) = \alpha_p = \alpha_p(n)$ avec la notation précédente. On a alors

$$\alpha_p(n) = V_p(n!) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} V_p(k) = \sum_{k\leq n\,,\,p|k} V_p(k) = \sum_{k=1}^{E(n/p)} V_p(kp),$$

ce qui permet de justifier par récurrence sur k que

$$\alpha_p(n) = \textstyle\sum_{i=1}^{k} E(n/p^i) + \alpha_p(E(n/p^k)).$$

Pour $k > (\ln n)/(\ln p)$ le reste est nul, et donc $\alpha_p(n) = \sum_{i=1}^{E(\ln n/\ln p)} E(n/p^i)$.

On montre ensuite que $\alpha_5(n) \leq \alpha_2(n)$; cela vient d'une part de ce que $\ln 5 > \ln 2$, et d'autre part de ce que chaque terme de la somme $\alpha_5(n)$ est plus petit que le terme correspondant dans la somme $\alpha_2(n)$. Le nombre cherché est donc $\alpha_5(10^6)$ dont on a donné une expression plus haut ($\alpha_p(n) = \ldots$), et on trouve donc

$$200\,000 + 40\,000 + 8\,000 + 1\,600 + 320 + 64 + 12 + 2 = 249\,998. \ \blacksquare$$

Quelqu'un conjecture que la limite cherchée au problème **(3^{bis})** du 3 octobre vaut 1/4.

On revient ensuite sur le problème **(2)** du 26 septembre. Reprenant le calcul là où on l'avait laissé, on trouve que $\sum_{k=1}^{i} k = \frac{1}{2}i(i+1)$, et donc que le nombre de points cherché vaut

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n-3} \frac{1}{2}i(i+1) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-3} i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-3} i =$$
$$= \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{1}{6}(n-3)(n-2)(2n-5) + \tfrac{3}{6}(n-3)(n-2)\big) = \tfrac{1}{6}(n-3)(n-2)(n-1).$$

(on avait commencé par de petits cafouillages sur la borne $n-3$ qu'on avait d'abord prise pour $n-2$, mais le résultat correct est bien celui qui précède, ce que l'on vérifie en prenant $n = 3$ pour lequel il y a 0 solution). ∎

On propose une variante qui utilise le théorème de Pick : *Soit un polygone du plan dont les sommets sont à coordonnées entières ; désignons par i (resp. par b) le nombre de points à coordonnées entières situés à l'intérieur du polygone (resp. sur le bord), et par a l'aire du polygone ; alors* $2a + 2 = 2i + b$. En découpant notre tétraèdre en tranches $z = n - k$, on a ainsi $a_k = \frac{1}{2}k^2$ et $b_k = 3k$, ce qui donne $i_k = \frac{1}{2}(k^2 - 3k + 2) = \frac{1}{2}(k-1)(k-2)$, et le nombre cherché vaut alors $\sum_{k=1}^{n-1} i_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)(k-2)$, ce qui redonne le résultat trouvé par la méthode précédente, soit $\frac{1}{6}(n-3)(n-2)(n-1)$. ∎

Puis on nous propose une série de calculs à effectuer.

Problème 2018-19(4). *Calculer les quantités suivantes :*
(a) *Une primitive de* $\frac{1}{x}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \tan^2(2^{-k}x)\right)$.
(b) *L'intégrale* $\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\,dx$.
(c) *L'intégrale* $\int_0^{\pi/4} x\prod_{k=1}^{\infty}\cos(2^{-k}x)\,dx$.
(d) *La limite* $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=10}^{n+9}\frac{2^{11(k-9)/n}}{\log_2(e^{n/11})} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{58}{\pi\sqrt{n^2-k^2}}\right)$.

Séance du 17 octobre 2018

Pas de séance en ce jour, en raison de la réunion d'organisation de Math-o-LU.

Séance du 24 octobre 2018

On commence par l'énoncé d'un nouveau problème.

Problème 2018-19(5). *On se donne trois boîtes contenant chacune des jetons (au moins un dans chaque boîte, mais un nombre fini). On décrit l'opération élémentaire suivante : ayant choisi deux de ces trois boîtes, on transfère des jetons de la boîte en contenant le plus vers la boîte en contenant le moins jusqu'à doubler le nombre de jetons de la boîte qui en contenait le moins. En répétant cette opération élémentaire autant de fois que l'on veut, peut-on toujours parvenir à vider entièrement l'une des trois boîtes ?*

On revient ensuite sur le problème **(1)** du 26 septembre : pour montrer l'égalité des deux ensembles, on va montrer l'inclusion dans chacun des deux sens, et on nous propose la preuve d'un sens.

Si $y \in \cup_{i\in I}(A_i \cap B_i)$, alors il existe un $j \in I$, $y \in A_j$ et $y \in B_j$; si maintenant $X \subset I$, alors on a $j \in X$ (auquel cas $y \in \cup_{i\in X}A_i$) ou $j \in I \setminus X$ (auquel cas $y \in \cup_{i\in I\setminus X}B_i$), et donc $y \in (\cup_{i\in X}A_i) \cup (\cup_{i\in I\setminus X}B_i)$ dans tous les cas ; et comme ceci est vrai pour tout $X \subset I$, y appartient donc à l'intersection sur tous les $X \subset I$ des réunions précédentes. Reste à prouver l'inclusion inverse. ∎

Puis voici encore un nouveau problème, issu de la remarque suivante : un nombre entier écrit en base 10 est divisible par 3 (resp. par 9) si et seulement si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3 (resp. par 9). Si l'on change de base, on a le problème suivant :

Problème 2018-19(6). *Soit* $b > 1$ *un entier. La notation* $\overline{d_k d_{k-1}\ldots d_0}$ *désignera l'entier qui s'écrit avec les chiffres* $d_k, \ldots, d_0$ *dans la base b, c'est-à-dire l'entier* $\sum_{j=0}^{k} d_j b^j$. *On dit alors que l'entier n a la propriété* P_b *si on a :* $n|\overline{d_k\ldots d_0} \;\Leftrightarrow\; n|(d_0 + \ldots + d_k)$. *Question : pour quel(s)* $b \in [\![2, 100]\!]$ *y a-t-il le maximum de n ayant la propriété* P_b *?*

Comme personne n'a d'autre problème ni d'autre solution à proposer, nous cherchons collectivement une solution au problème **(4)**(c) du 10 octobre en partant de la formule de trigonométrie $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$; on suggère que par récurrence cela donnerait

$$\prod_{k=1}^{n} \cos(2^{-k}x) = 2^{1-k} \sum_{j=1}^{2^{k-1}} \cos(2^{-k}(2j-1)x),$$

et que cette dernière expression, considérée comme une somme de Riemann, tendrait vers $\int_0^1 \cos(tx)\, dt = \frac{\sin x}{x}$ quand n tend vers l'infini. Cela donnerait $\int_0^{\pi/4} \sin x \, dx = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ pour le problème **(4)**(c), mais permettrait aussi d'aborder le problème **(4)**(a) puisque

$$1 - \tan^2(2^{-k}x) = \frac{\cos^2(2^{-k}x) - \sin^2(2^{-k}x)}{\cos^2(2^{-k}x)} = \frac{\cos(2^{1-k}x)}{\cos^2(2^{-k}x)}.$$

On s'arrête faute de temps, mais on reprendra à la prochaine séance.

Séance du 7 novembre 2018

On commence par reprendre l'étude du problème **(4)**(c) entreprise à la dernière séance. Une façon plus simple d'obtenir que $\prod_{k=1}^{\infty} \cos(2^{-k}x) = \frac{\sin x}{x}$ consiste à montrer par récurrence sur n que

$$\prod_{k=1}^{n} \cos(2^{-k}x) = \frac{\sin x}{2^n \sin(2^{-n}x)},$$

d'où le résultat puisque $\lim_{n\to\infty} 2^n \sin(2^{-n}x) = x$. Pour justifier la récurrence, on initialise à $n = 1$, ce qui s'écrit : $\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2)$, ce qui est vrai ; et pour l'hérédité, on utilise que $\sin(2^{-n}x) = 2\sin(2^{-n-1}x)\cos(2^{-n-1}x)$. ∎

On en déduit le calcul d'intégrale (c), soit $\int_0^{\pi/4} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi/4} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ comme on l'avait déjà plus ou moins calculé le 24 octobre. ∎

Et pour le calcul de primitive (a), on écrit alors que $1-\tan^2 y = \frac{\cos^2 y - \sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{\cos(2y)}{\cos^2 y}$, et donc que

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \tan^2(2^{-k}x)\right) = \frac{\prod_{k=0}^{\infty} \cos(2^{-k}x)}{\left(\prod_{k=1}^{\infty} \cos(2^{-k}x)\right)^2} = \frac{\cos x(\sin x/x)}{(\sin x/x)^2} = \frac{x\cos x}{\sin x}.$$

Il s'agit donc de trouver une primitive de la fonction $1/\tan x$, et c'est $\ln(\sin x)$ sur $]0,\pi[$ par exemple. ∎

Des calculs demandés au problème **(4)** du 10 octobre, il ne reste donc plus que l'intégrale (b) et la limite (d).

On donne ensuite la fin de la solution du problème **(1)** du 26 septembre. Une inclusion ayant été démontrée le 24 octobre, il reste l'autre. Si donc on prend y dans l'intersection $\cap_{X\subset I}\big((\cup_{i\in X} A_i) \cup (\cup_{i\in I\setminus X} B_i)\big)$, on commence par poser $Z = \{\, i \in I \,;\, y \in B_i \,\}$; alors $y \notin \cup_{i\in I\setminus Z} B_i$ par définition de Z, et donc $y \in \cup_{i\in Z} A_i$, c'est-à-dire qu'il existe un $j \in Z$ tel que $y \in A_j$, et dire que $j \in Z$, c'est dire que $y \in B_j$; on a donc prouvé qu'il existe un $j \in I$ tel que $y \in A_j \cap B_j$, c'est-à-dire que $y \in \cup_{i\in I}(A_i \cap B_i)$. ∎

On revient ensuite sur le problème **(3$^{\text{bis}}$)** du 3 octobre. On avait montré le 10 octobre que $Z(n!) = \sum_{i=1}^{E(\ln n/\ln p)} E(n/p^i)$ avec $p = 5$; il en résulte que

$$\left|\frac{Z(n!)}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{E(\ln n/\ln 5)} \frac{n}{5^i}\right| \leq \frac{1}{n} \times \frac{\ln n}{\ln 5}.$$

Comme le majorant tend vers 0, le nombre $Z(n!)/n$ a même limite que la somme géométrique écrite ci-dessus, qui vaut $\frac{1}{5}\big(\frac{1 - 5^{-E(\ln n/\ln 5)}}{1 - 5^{-1}}\big)$, et ce rapport tend vers $\frac{1}{5}.\frac{5}{4} = \frac{1}{4}$ quand n tend vers l'infini. Dans une base b, si l'on désigne par p le plus grand facteur premier de b, on trouvera de même que $Z(n!)/n$ tend vers $1/(p-1)$. ■

Puis on résout aussi le problème **(6)** du 25 octobre. Pour que n ait la propriété P_b, il faut et suffit que $b \equiv 1[n]$, et il faut donc chercher les b tels que $b - 1$ ait beaucoup de diviseurs. Le maximum, pour $b - 1 \in [\![1, 99]\!]$, c'est douze diviseurs ; c'est le cas de $b - 1 = 60$, de $b - 1 = 72$, de $b - 1 = 84$, de $b - 1 = 90$ et de $b - 1 = 96$; les solutions sont donc : 61, 73, 85, 91 et 97. ■

On termine la séance avec quelques énoncés de nouveaux problèmes.

Problème 2018-19(7). *Calculer $P(\frac{7}{2})$ où le polynôme P vérifie l'identité $(x-1)P(x+1) = (x+2)P(x)$.*

Problème 2018-19(8). *Calculer les deux intégrales :*

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{x^2+2}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty g\Big(\frac{1}{y^2}\Big)\,dy$ *où $g = f^{-1}$ est la réciproque de la fonction $f(x) = x\,e^x$.*

Et enfin, on propose une généralisation du problème **(1)** du 26 septembre : en notant $E_{i1} = A_i$ et $E_{i2} = B_i$, on voit que le problème **(1)** cherchait à établir une autre expression de la réunion $\cup_{i\in I}\big(\cap_{j\in\{1,2\}} E_{ij}\big)$ sous la forme d'une intersection de réunions. C'était donc un cas particulier du problème suivant :

Problème 2018-19(1$^{\text{bis}}$). *Étant donnée une famille $(E_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ à deux indices de parties d'un ensemble, exprimer $\cup_{i\in I}\big(\cap_{j\in J} E_{ij}\big)$ sous la forme d'une intersection de réunions.*

Séance du 14 novembre 2018

Pas de séance en ce jour, en raison de la réunion d'organisation de Math-o-LU.

Séance du 21 novembre 2018

On nous propose une solution du problème **(7)** du 7 novembre. En prenant $x = 1$ puis $x = -2$ dans la relation vérifiée par le polynôme P, on voit que P s'annule en ± 1 et qu'il est donc divisible par $x^2 - 1$. En réutilisant une troisième fois la relation, on trouve qu'il est encore divisible par x, et en posant $P(x) = (x^3 - x)\,R(x)$ à nouveau dans la relation donnée, on trouve cette fois $(x+2)(x^3-x)\,R(x+1) = (x+2)(x^3-x)\,R(x)$, si bien que R doit être un polynôme constant. Mais réciproquement, tout polynôme $P(x) = a\,(x^3 - x)$ vérifie la relation, si bien que les polynômes vérifiant cette relation sont exactement les polynômes $P(x) = a\,(x^3 - x)$; on ne peut donc pas calculer $P(\frac{7}{2})$. Si l'on impose en plus que P est unitaire, on peut alors calculer $P(\frac{7}{2}) = \frac{315}{8}$. ■

Autre solution pour le même problème **(7)** du 7 novembre. En commence par poser $P(x) = a\,x^n + b\,x^{n-1} +$ reste de degré $< n-1$, ce qui permet de calculer que $(x-1)P(x+1) = a\,x^{n+1} + (na+b-a)\,x^n +$ reste, et que $(x+2)P(x) = a\,x^{n+1} + (2a+b)\,x^n +$ reste, si bien que l'identité vérifiée par P entraîne que $na+b-a = 2a+b$ (avec $a \neq 0$), et donc que P est de degré $n=3$. En récrivant alors $P(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$, on obtient que cette même identité donne que P est un multiple de $P_1(x) = x^3 - x$, ce qui permet de conclure comme dans la solution ci-dessus. ∎

On reprend ensuite les deux derniers calculs du problème **(4)** du 10 octobre.

Pour le calcul d'intégrale (b), on commence par utiliser la formule d'Euler pour écrire que $\cos(\sin x) = \frac{1}{2}(e^{i\sin x} + e^{-i\sin x})$, d'où

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big(\exp(e^{ix}) + \exp(e^{-ix})\big)\,dx = \int_0^{2\pi} \exp(e^{ix})\,dx$$

car $\int_0^{2\pi} \exp(e^{-ix})\,dx = \int_{-2\pi}^{0} \exp(e^{-ix})\,dx = \int_0^{2\pi} \exp(e^{ix})\,dx$ par périodicité puis changement de variable $x \mapsto -x$. Comme $\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$, on a

$$\Big|\int_0^{2\pi} \exp(e^{ix})\,dx - 2\pi\Big| \;=\; \Big|\int_0^{2\pi} \exp(e^{ix})\,dx - \sum_{k=0}^{n}\int_0^{2\pi} \frac{e^{ikx}}{k!}\,dx\Big| \;\leq$$

$$\leq\; \int_0^{2\pi} \Big|\exp(e^{ix}) - \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ikx}}{k!}\Big|\,dx \;\leq\; 2\pi \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

et comme le dernier terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on en déduit que l'intégrale cherchée vaut 2π. ∎

Et pour la limite (d), on écrit

$$\sum_{k=10}^{n+9} \frac{2^{11(k-9)/n}}{\log_2(e^{n/11})} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{11k/n}}{\log_2(e^{n/11})} = \frac{11\,\ln 2}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{k(11\ln 2/n)} = a\,e^a\,\frac{e^{na}-1}{e^a-1}$$

en notant $a = (11\ln 2/n)$. Quand a tend vers 0, c'est équivalent à $e^{na} - 1 = 2^{11} - 1 = 2\,047$, et donc la limite de ce premier terme vaut $2\,047$. En mettant $1/n$ en facteur dans le deuxième terme, celui-ci devient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{58}{\pi\sqrt{1-(k/n)^2}}$$

où l'on reconnaît une somme de Riemann qui tend, lorsque n tend vers l'infini, vers l'intégrale $\int_0^1 \frac{58}{\pi\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{58\cos x}{\pi\cos x}\,dx = 29$ par changement de variable $t = \sin x$. Pour finir, la limite demandée valait $2\,047 - 29 = 2\,018$. ∎

On termine ensuite la séance en posant quatre nouveaux problèmes.

Problème 2018-19(2$^{\text{bis}}$). *Généralisant le problème* **(2)** *du 26 septembre, on demande de calculer le cardinal S_n^d de $\{\,(x_1,\dots,x_d) \in (\mathbb{N}^*)^d\,;\ \sum_{i=1}^d x_i < n\,\}$.*

Problème 2018-19(9). *On considère les matrices $d \times d$ qui sont des carrés latins, autrement dit les matrices $A = (a_{jk})$ telles que $\sum_j a_{jk} = \sum_k a_{jk} = s$ pour tout k et tout j. Peut-on dire quelque chose sur la diagonalisabilité de A ?*

Problème 2018-19(10). *Pour une suite réelle (a_n) bornée, on considère la série entière $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,a_k\,x^k$ qui est de rayon de convergence infini. Montrer que si $\lim_{x\to+\infty} e^x f(x) = c \in \mathbb{R}$, alors $a_k = (-1)^k c$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Problème 2018-19(11). *On dit que la série numérique* $\sum a_k$ *est* Abel-sommable *si la série* $s(x) = \sum a_k\, x^k$ *converge pour* $x \in [0, 1[$ *et si* $\lim_{x\to 1^-} s(x)$ *existe dans* $\mathbb{R}$*. On veut déterminer les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telles que pour toute série* $\sum a_k$ *Abel-sommable, la série* $\sum f(a_k)$ *soit aussi Abel-sommable.*

Séance du 28 novembre 2018

On commence par discuter du problème **(5)** du 24 octobre afin de mentionner quelques situations où l'on sait conclure. Supposons par exemple qu'une boîte contient a jetons, et une autre $a(2^n - 1)$ jetons. Alors en choisissant toujours ces deux boîtes, on aura successivement $a\,2^k$ et $a\,(2^n - 2^k)$ jetons dans ces boîtes pour $k \leq n$, et quand $k = n$, on aura vidé la deuxième boîte. Une autre situation favorable, c'est lorsque les contenus des boîtes sont $(a, a\,2^n, c)$ avec $c > a\,2^n$; en effet, en choisissant la première et la troisième boîtes, celles-ci auront $a\,2^k$ et $c - a\,2^k$ jetons pour $k \leq n$, et quand $k = n$, on aura donc les deux premières boîtes avec le même contenu de $a\,2^n$ jetons, ce qui permet de vider une boîte. Et si on a des contenus de départ égaux à $(\ a\ ,\ b\ ,\ a\,(2^n - 1) + b\,(2^m - 1)\ )$, on choisit les boîtes 1 et 3 jusqu'à avoir les contenus $(\ a\,2^n\ ,\ b\ ,\ b\,(2^m - 1)\ )$, puis on choisit les boîtes 2 et 3 jusqu'à vider l'une de ces deux boîtes. L'idée est alors de s'inspirer de ces cas particuliers pour tâcher de traiter le cas général !

On donne ensuite des solutions au problème **(9)** du 21 novembre. Bien entendu, toutes les matrices symétriques sont diagonalisables, et donc les matrices avec des 1 partout le sont. La question, c'est : en existe-t-il qui ne soient pas diagonalisable ? La réponse est oui ; en voici trois :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Les deux premières ne sont pas diagonalisables sur $\mathbb{R}$, mais elles le sont sur $\mathbb{C}$; la troisième n'est même pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$, car ses valeurs propres sont 6, 2 (simples) et 1 (valeur propre double) avec $\dim \mathrm{Ker}(A - I) = 1$ puisque $\mathrm{Ker}(A - I) = \mathrm{Vect}(1, -1, 0, 0)$. ∎

Nous discutons ensuite de quelques-uns des problèmes du concours smf-juniors. Plus précisément du problème 2 : *pour tout triplet* (p, q, r) *de nombre premiers distincts, montrer que* $x^p + y^q = z^r$ *a une solution en entiers* (x, y, z) *strictement positifs* ; du problème 4 (jeu de points et de droites dans un disque) ; et du problème 10 : *existe-t-il une configuration de points blancs et noirs avec les contraintes : strictement plus de blancs que de noirs, et exactement dix noirs à distance* 1 *de chaque blanc ?*

Et voici deux nouveaux problèmes.

Problème 2018-19(12). *Des soldats numérotés de* 1 *à* n *se disposent en cercle comme les numéros d'une horloge à aiguilles. En tournant dans le sens des aiguilles, le numéro* 1 *supprime le suivant (le* 2*), puis le suivant (le* 3*) supprime celui d'après (le* 4*) et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un. Trouver une formule donnant le numéro du survivant en fonction de* n*.*

Problème 2018-19(13). *Calculer* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\cos x)^n \sin(nx)$*.*

Séance du 5 décembre 2018

On commence par présenter un nouveau problème.

Problème 2018-19(14). *Deux urnes contiennent chacune n jetons. On sort les jetons de l'urne numéro 1 pour former des tas de 23 jetons, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un nombre $r < 23$; on rajoute ces derniers au contenu de l'urne numéro 2, puis on ressort les jetons de cette urne numéro 2 pour former des tas de 37 jetons, et cela tombe juste, c'est-à-dire que l'on a vidé entièrement l'urne numéro 2 de cette façon. Le nombre total de tas (de 23 ou 37 jetons) est égal à 72. Combien de jetons y avait-il ?*

Après quoi, nous reparlons du problème **(12)** du 28 novembre : après quelques expériences pour les petites valeurs de n (pour $n \leq 10$), on est capable de former la conjecture suivante : si le nombre n s'écrit $n = 2^k + j$ avec $0 \leq j < 2^k$, le dernier survivant sera le soldat numéro $1 + 2j$. Mais malgré beaucoup de discussions, nous n'avons pas trouvé de preuve pour le moment.

Nous réfléchissons collectivement au problème **(14)** introduit ci-dessus, et formulons le problème par les équations suivantes :

$$\begin{cases} n = 23\,q + r \quad \text{avec } r < 23\,, \\ n + r = 37\,q'\,, \\ q + q' = 72\,. \end{cases}$$

De ce système on tire que $23\,q = n - r$ et $37\,q' = n + r$, puis multipliant la première équation par 37 et la seconde par 23 additionnant les deux équations ainsi obtenues, on trouve $23 \times 37 \times (q+q') = 60\,n - 14\,r$, et avec $q + q' = 72$ on en déduit que $r = \frac{6}{7}\,(5n - 5106)$. Comme 6 est premier avec 7, on voit que $5n - 5106$ doit être divisible par 7, et que le reste r est donc un multiple de 6 ; et comme ce reste est aussi < 23, on a $r = 6k$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, puis $5n = 5106 + 7k$. Enfin, pour que $5106 + 7k$ soit divisible par 5, il faut prendre $k = 2$, ce qui donne un reste $r = 12$ et un nombre initial $n = 1024$. ∎

Séance du 12 décembre 2018

On commence par présenter un nouveau problème.

Problème 2018-19(15). *Cinq pirates hiérarchisés, le chef portant le numéro 5, le sous-chef le numéro 4, le sous-sous-chef le numéro 3 et ainsi de suite, veulent se partager mille pièces d'or. Le chef fait une proposition de répartition, et les pirates (le chef compris) votent : s'ils acceptent avec une majorité stricte (au moins 3 "pour"), on répartit les pièces comme proposé et le jeu s'arrête là, tandis que s'ils refusent, le chef est mis à mort, et on recommence le jeu avec les pirates restant, le sous-chef ayant pris la place du chef. On demande quelle devrait être la stratégie de chacun des pirates, sachant que leurs priorités sont : 1) de rester en vie ; 2) de gagner le plus de pièces possible ; 3) d'assassiner le plus de co-pirates possible.*

Puis on revient au problème **(12)** du 28 novembre que nous avions presque résolu la semaine précédente. On peut prouver le résultat, à savoir que si $n = 2^k + j$ avec $0 \leq j < 2^k$ le dernier survivant portera le numéro $i = 2j + 1$, par une récurrence sur n.

Initialisation. Pour $n = 1 = 2^0 + 0$, on a $j = k = 0$, et $i = 2j + 1 = 1$ est bien le numéro du dernier survivant.

Hérédité. Supposons que le résultat est connu pour un nombre de soldats $< n = 2^k + j$ avec $k > 0$ et $0 \leq j < 2^k$. On distingue deux cas, suivant que n (ou j, ce qui revient au même) est pair ou impair. Dans le cas où $j = 2j'$ est pair (avec donc $0 \leq j' < 2^{k-1}$), après les $\frac{1}{2}n$ premières suppressions, il reste $n' = 2^{k-1} + j'$ soldats portant les numéros i impairs de 1 à $n-1$; si on les renumérote par $i' \in [1, n']$, le nouveau numéro i' est attribué au soldat dont le numéro d'origine était $i = 2i' - 1$; par hypothèse de récurrence, le dernier survivant a le numéro $i' = 2j' + 1$, et avait donc au départ le numéro $i = 2(2j' + 1) - 1 = 4j' + 1 = 2j + 1$. Dans le cas où $j = 2j' + 1$ est impair (avec donc $0 \leq j' < 2^{k-1}$), après les $\frac{1}{2}(n + 1)$ premières suppressions, il reste $n' = 2^{k-1} + j'$ soldats portant les numéros i impairs de 3 à n ; si on les renumérote par $i' \in [1, n']$, le nouveau numéro i' est attribué au soldat dont le numéro d'origine était $i = 2i' + 1$; par hypothèse de récurrence, le dernier survivant a le numéro $i' = 2j' + 1$, et avait donc au départ le numéro $i = 2(2j' + 1) + 1 = 4j' + 3 = 2j + 1$. Cela termine la récurrence. ∎

Un autre participant propose une autre approche (que l'on peut voir comme assez voisine de la preuve précédente). On dispose les uns au-dessus des autres les nombres $i - 1$ écrits en base 2, ce qui donne une disposition du genre

$$\begin{array}{cccccccc}
i-1 & & & & & & & \\
0 & \longrightarrow & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
1 & \longrightarrow & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\
2 & \longrightarrow & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\
3 & \longrightarrow & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
n-1 & \longrightarrow & a' & b' & \ldots & c' & d' \\
n & \longrightarrow & 1 & b & \ldots & c & d
\end{array}$$

la dernière ligne servant seulement de référence, où on observe que les chiffres “ d' ” et “ d ” vérifient $d' = 1 - d$. Quand on supprime les soldats du premier tour, on barre les lignes se terminant par un “1”, et on voit donc que le survivant s'écrira avec une ligne se terminant par un “0”, et on observe de plus que la nouvelle dernière ligne a alors pour avant-dernier chiffre un “ c'' ” valant $c'' = 1 - c$; au deuxième tour, on barrera les lignes ayant le chiffre “ d' ” en avant-dernière position, si bien qu'il ne restera que les lignes ayant le chiffre “ d ” en avant-dernière position, qui sera donc l'avant-dernier chiffre du survivant ; en poursuivant ainsi, on voit que le survivant sera représenté par la ligne $b \quad \ldots \quad c \quad d \quad 0$, c'est-à-dire la ligne n amputée de son “1” initial, et rallongée par un “0” final. Si $n = 2^k + j$ avec $0 \leq j < 2^k$, cela signifie que le numéro du survivant est donné par $i - 1 = 2j$. ∎

On reparle aussi du problème **(5)** du 25 octobre. On présente un cas où l'on sait conclure, mais qui ne dit rien du cas général : *si les boîtes contiennent respectivement a, b et c jetons avec $a < b < c$ et $a|b$ (par exemple si l'une des boîtes ne contient qu'un jeton).* Dans ce cas, en notant $2^k + j$ avec $0 \leq j < 2^k$ l'entier $1 + (b/a)$, on choisit $k+1$ fois les deux premières boîtes, ce qui amène les contenus $(2^k - j)\,a$ et $2\,j\,a$ respectivement dans les boîtes 1 et 2. Or $(2^k - j)\,a \leq (2^k + j)\,a = b + 1 \leq c$, donc si nous choisissons les boîtes 1 et 3, les nouveaux contenus de ces trois boîtes sont $(2^{k+1} - 2\,j)\,a$, $2\,j\,a$, et c'. Pour finir, nous choisissons à nouveau les boîtes 1 et 2 jusqu'à en vider entièrement une ; en effet, les contenus des deux boîtes sont maintenant $p\,a$ et $q\,a$ avec $p + q = 2^{k+1}$, et la puissance maximale de 2 divisant p vaut 2^i avec $i \leq k+1$, et elle divise aussi q puisqu'elle divise $p + q$; en transférant des jetons de l'une à l'autre boîte, on augmente cette puissance maximale à 2^{i+1} dans la boîte la plus petite ... et donc aussi dans la boîte la plus grande ; on va jusqu'à obtenir que l'une des boîtes contient $p\,a$ jetons avec $2^{k+1}|p$, ce qui entraîne que l'une des boîtes contient $2^{k+1}a$ jetons, et l'autre 0.

Un participant mentionne qu'il a essayé beaucoup d'exemples ; sur ces exemples, il y a une procédure permettant de finir dans tous les cas, et qui consiste à choisir les deux boîtes respectivement la plus et la moins pleines. Ce pourrait être une idée pour résoudre le problème.

On revient ensuite sur les intégrales **(8)** du 7 novembre. Pour l'intégrale (a), elle se calcule lorsque l'on modifie l'expression de la fonction à intégrer. Si la question avait été de calculer l'intégrale

$$I \;=\; \int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{x^2+2}}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}\,dx$$

(on a remplacé un (x^2+1) par un (x^2+2) au dénominateur), on aurait eu la primitive et la valeur de l'intégrale suivantes :

$$F(x) \;=\; \frac{x\,\arctan\sqrt{x^2+2}}{2\sqrt{x^2+2}} - \frac{1}{2}\Big(\sqrt{3}\,\arctan\big(\frac{x}{\sqrt{3}}\big) - \sqrt{2}\,\arctan\big(\frac{x}{\sqrt{2}}\big)\Big)$$

$$I \;=\; \frac{9 2^{3/2}\,\arctan\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big) - \sqrt{3}\,\pi}{36} \quad ;$$

mais bien entendu, ce n'était pas la vraie intégrale à calculer, qui elle avait le facteur (x^2+1) et non le facteur (x^2+2) au dénominateur.

Pour l'intégrale (b), qui était l'intégrale

$$\int_0^\infty g\Big(\frac{1}{y^2}\Big)\,dy \qquad \text{où } g = f^{-1} \text{ est réciproque de } f(x) = x\,e^x\ ,$$

on commence par observer que la fonction f est strictement croissante, et donc bijective de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même, ce qui fait que g est bien définie. On fait ensuite le changement de variable

$$y = \frac{e^{-x^2/2}}{x} \quad \text{en sorte que} \quad \frac{1}{y^2} = f(x^2) \quad \text{et que} \quad dy = -\frac{1+x^2}{x^2}\,e^{-x^2/2}\,dx\ .$$

Avec ce changement de variable, notre intégrale devient donc

$$\int_0^\infty g\Big(\frac{1}{y^2}\Big)\,dy = \int_0^\infty x^2\,\frac{1+x^2}{x^2}\,e^{-x^2/2}\,dx\ .$$

Par intégration par partie, l'intégrale $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2/2}\,dx$ est égale à l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx$, et donc on trouve pour résultat $2\int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$. ∎

Pour finir, on se donne rendez-vous pour une reprise en janvier après les examens.

Séance du 19 décembre 2018

Pas de séance en ce jour, en raison de la réunion d'organisation de Math-o-LU.

Activités 2018-2019
deuxième semestre

Séance du 9 janvier 2019

Pas de séance en ce jour, en raison de la première séance de Math-o-LU.

Séance du 16 janvier 2019

On démarre l'année avec trois nouveaux problèmes.

Problème 2018-19(16). *On demande quels rectangles (caractérisés par leurs côtés) on peut paver par un nombre fini de rectangles de tailles variées, mais ayant au moins un côté entier.*

Problème 2018-19(17). *On empile les uns sur les autres des bols (demi-sphères) de rayons décroissants, partie plane en bas et partie arrondie en haut, le rayon du premier bol étant égal à* 1*. Quelle hauteur maximale peut-on atteindre en empilant ainsi quatre-vingts bols par-dessus le premier ?*

Problème 2018-19(18). *Étant donnés deux entiers c et n, quel est le nombre de façons de paver un carré de côté c avec n rectangles de côtés entiers ?*

Après quoi, on propose une solution du problème **(13)** du 28 novembre. Regardant le problème comme l'étude d'une série de fonctions, on pose $u_n(x) = \frac{1}{n}(\cos x)^n \sin(nx)$, et la première chose à faire, c'est de prouver que la série converge. On a la majoration $|u_n(x)| \leq |\cos x|^n$ qui montre que la série converge absolument en tout point $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ puisqu'alors $|\cos x| < 1$; et en un point $x \in \pi\mathbb{Z}$, c'est le facteur $\sin(nx) = 0$ qui assure la convergence (absolue) la série ; la somme $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ vaut donc 0 sur $\pi\mathbb{Z}$, mais aussi sur $\pi\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\pi$ puisqu'en ces derniers points, c'est le facteur $\cos x$ qui vaut 0. Enfin, la fonction $f(x)$ est périodique de période π puisque $\cos(x + \pi) = -\cos x$ et que $\sin(n(x + \pi)) = (-1)^n \sin(nx)$; il suffit donc d'étudier la fonction f sur un intervalle de longueur π, par exemple sur $[0, \pi]$.

La majoration $|u_n(x)| \leq |\cos x|^n$ écrite plus haut montre que la convergence de la série est normale sur tout compact de $]0, \pi[$, et donc la somme f est continue sur cet intervalle ; de plus on calcule que $u_n'(x) = (\cos x)^{n-1}\big(\cos x \cos(nx) - \sin x \sin(nx)\big) = (\cos x)^{n-1}\cos((n+1)x)$, et cette dérivée vérifie à son tour $|u_n'(x)| \leq |\cos x|^{n-1}$ en sorte que la série des dérivées est elle aussi normalement convergente sur les compacts de $]0, \pi[$, d'où l'on déduit que la somme f est de classe C^1 sur $]0, \pi[$ avec pour dérivée

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{Re}\left(e^{2ix}(e^{ix}\cos x)^{n-1}\right) =$$

$$= \mathscr{Re}\left(\frac{e^{2ix}}{1 - e^{ix}\cos x}\right) = \mathscr{Re}\left(\frac{e^{ix}}{e^{-ix} - \cos x}\right) = \mathscr{Re}\left(\frac{i\cos x - \sin x}{\sin x}\right) = -1 \ .$$

Comme $f(\frac{1}{2}\pi) = 0$, on en déduit que $f(x) = \frac{1}{2}\pi - x$ sur $]0, \pi[$, puis par périodicité, que $f(x) = (k + \frac{1}{2})\pi - x$ sur $]k\pi, (k+1)\pi[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

On aura remarqué que bien que les fonctions u_n soient de classe C^∞ (et même analytiques), la somme f est ici discontinue en tout point de $\pi\mathbb{Z}$. ∎

Et on revient aussi au problème **(15)** des pirates, du 12 décembre. Si les trois premières propositions ont été rejetées, les pirates numéros 5, 4 et 3 ont été massacrés, et le pirate 1 est suffisamment nombreux à lui tout seul pour rejeter n'importe quelle proposition du pirate 2, et c'est cela qu'il a intérêt à faire puisqu'il triomphe alors sur tous les tableaux : il reste en vie, il récupère les mille pièces, et il a mis à mort tous ses concurrents. Dans ce cas, le pirate 2 ne peut s'opposer à cette stratégie, et c'est ainsi que se termine le jeu : le numéro 1 est seul survivant et obtient toutes les pièces.

Remontons d'un cran : si les deux premières propositions ont été rejetées, le pirate numéro 2 a intérêt à accepter la troisième proposition, quelle qu'elle soit, puisque cela lui assure de rester en vie, alors que sinon — on l'a vu plus haut — il sera massacré. Le pirate numéro 3 qui sait cela, ne risque rien pour sa vie, et donc il peut proposer une répartition de mille pièces d'or pour lui-même, et rien pour les deux autres : si c'est accepté, et cela le sera, il gagne sur tous les tableaux puisqu'il reste en vie, qu'il récupère les mille pièces et que le maximum possible de ses concurrents — mais seuls les numéro 4 et 5 — auront pu être mis à mort. Les deux autres (numéros 2 et 1) s'en tirent avec la vie sauve, mais aucune pièce d'or.

Remontons encore d'un cran : quoi que propose le numéro 4, le numéro 3 votera contre car on l'a vu ci-dessus, si la proposition de 4 est rejetée, le numéro 3 gagnera sur tous les tableaux. Pour que sa proposition soit acceptée, le numéro 4 doit obtenir l'approbation des numéros 2 et 1 ; ceux-ci doivent donc préférer la proposition de 4 à celle de 3. Si on ne leur donne aucune pièce d'or, il préféreront massacrer un pirate de plus pour le même gain (leur vie n'est pas en danger) ; donc le numéro 2 devra proposer neuf-cent-quatre-vingt-dix-huit pièces pour lui-même, et une pièce pour chacun des deux pirates numéros 1 et 2.

Que peut donc maintenant proposer le numéro 5 ? Il aura le numéro 4 contre lui sauf s'il lui offrait neuf-cent-quatre-vingt-dix-neuf pièces, et il est facile de s'en tirer pour beaucoup moins cher. Il faut donc qu'il obtienne l'approbation de deux des pirates parmi les numéros 3, 2 et 1 ; or quel est l'intérêt de ces derniers ? Qu'ils acceptent ou qu'il refusent, ils auront la vie sauve — on l'a vu plus haut —, et s'ils refusent, 3 n'obtiendra rien, et 2 et 1 obtiendront chacun une pièce ; pour qu'ils acceptent, il faut donc offrir une pièce au numéro 3, deux pièces au numéro 2, et/ou deux pièces au numéro 1 ; ainsi, le numéro 5 devra proposer une pièce au numéro 3, et deux pièces soit au numéro 2, soit au numéro 1.

En conclusion, le numéro 5 doit donc proposer la répartition suivante : neuf-cent-quatre-vingt-dix-sept pièces pour lui-même, zéro pièce pour le numéro 4, une pièce pour le 3, et deux pièces soit pour le 2, soit pour le 1, et le jeu s'arrêtera avec cette répartition. ∎

Un participant demande alors : comment continuer s'il y a six pirates ? Cela devient compliqué car le pirate 5 n'avait pas une seule stratégie possible ; mais en supposant que les pirates considèrent maintenant l'*espérance* de leurs gains, on peut voir que le pirate numéro 6 aura toujours le numéro 5 contre lui, et qu'il lui faut donc l'approbation de trois des pirates numéros 1 à 4 ; or il suffit de promettre une pièce au pirate 4 pour obtenir sa voix, et les trois autres ayant une espérance d'une pièce au tour suivant, il faudra leur en promettre deux. Le numéro 6 doit donc proposer neuf-cent-quatre-vingt-quinze pièces pour lui-même, zéro pour le numéro 5, une pour le 4, et deux pièces pour deux des pirates numéros 1, 2 ou 3.

Et si on a n pirates ? On essaie de formuler des conjectures . . . dont les preuves restent à établir ultérieurement !

Séance du 23 janvier 2019

Pas de séance en ce jour, en raison de la deuxième séance de Math-o-LU.

Séance du 30 janvier 2019

On reparle du problème **(18)** du 16 janvier. Le nombre c étant donné, on traite les cas faciles $n = 1$ ou $n = c^2$: il n'y a dans ce cas qu'une seule façon de paver le carré. Avec $n = c^2 - 1$, c'est le nombre de façon de placer un domino 2×1 dans le carré, soit $2\,c\,(c-1)$. Et pour les petites valeurs de n, on trouve : pour $n = 2$, il y a $2c - 2$ façons de paver (il faut en effet partager le carré en deux rectangles en choisissant une ligne verticale parmi $c - 1$ ou une horizontale toujours parmi $c - 1$), pour $n = 3$, on trouve $5\,c^2 - 11\,c + 6$ façons de paver car : ou bien on partage avec deux lignes verticales ou deux lignes horizontales, et il y a $(c-1)(c-2)$ façons de le faire ; ou bien on effectue un premier partage avec une ligne verticale puis on recoupe horizontalement une des deux moitiés, et il y a aussi la même chose en commençant par un partage horizontal, et on obtient ainsi $2\,(c-1) \times 2\,(c-1)$ façons de paver. On essaie aussi de le faire pour $n = 4$, mais on s'embrouille. Avec tout cela, il semble bien difficile de formuler une conjecture !

L'un des participants signale le livre *Concrete mathematics*, de Graham, Knuth et Patashwik (orthographe non garantie), qui contient plein de choses dans ce genre.

Et voici, toujours dans le genre pavage, un nouveau problème.

Problème 2018-19(19). *Étant donnés deux entiers $p > 0$ et $q > 0$, combien y a-t-il de façons de paver le rectangle de taille $p \times q$ par des dominos de taille 2×1 ?*

Bien entendu, si p et q sont impairs, il y a 0 façons de le faire !

Un participant nous propose alors une solution du problème **(17)** du 16 janvier. On introduit n variables, qui sont les rayons $r_1, \ldots, r_n$ des bols que l'on empile sur le premier (qui est de rayon $r_0 = 1$), et on observe qu'entre la base du $k^{\text{ième}}$ bol et celle du $(k+1)^{\text{ième}}$ bol, la différence de niveau vaut $(r_k^2 - r_{k+1}^2)^{1/2}$ (par le théorème de Pythagore). Il s'agit donc de maximiser la fonction

$$h(r_1, \ldots, r_n) = r_n + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{r_k^2 - r_{k+1}^2} \right) + \sqrt{1 - r_1^2}.$$

On cherche donc un point critique pour cette fonction en dérivant :

$$\frac{\partial h}{\partial r_1} = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 - r_2^2}} - \frac{r_1}{\sqrt{1 - r_1^2}} \ ,$$

$$\frac{\partial h}{\partial r_k} = \frac{r_k}{\sqrt{r_k^2 - r_{k+1}^2}} - \frac{r_k}{\sqrt{r_{k-1}^2 - r_k^2}} \qquad \text{pour } 1 < k < n,$$

$$\frac{\partial h}{\partial r_n} = 1 - \frac{r_n}{\sqrt{r_{n-1}^2 - r_n^2}} \ .$$

Demander que toutes ces dérivées partielles s'annulent revient à écrire

$$\sqrt{1 - r_1^2} = \sqrt{r_1^2 - r_2^2} = \ \ldots \ = \sqrt{r_{n-1}^2 - r_n^2} = r_n \ ,$$

et en mettant tout cela au carré, $1 - r_1^2 = r_1^2 - r_2^2 = \ldots = r_{n-1}^2 - r_n^2 = r_n^2$, d'où $r_n^2 = r_k^2 - r_{k+1}^2 = 1 - r_1^2 = \frac{1}{n+1}$, d'où une hauteur maximale égale à $h = (n+1) \times (n+1)^{-1/2} = \sqrt{n+1}$. Si donc on peut empiler $n = 80$ bols sur le premier, on peut atteindre une hauteur totale de 9 fois le rayon du premier bol. ∎

Un participant propose alors une variante de cette solution : à la place des variables r_k, on utilise maintenant les $n+1$ variables $x_0 = (1-r_1^2)^{1/2}$, $x_k = (r_k^2 - r_{k+1}^2)^{1/2}$ pour $0 < k < n$, et $x_n = r_n$; il nous faut alors maximiser la fonction $h(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^n x_k$ sous la contrainte $\sum_{k=0}^n x_k^2 = 1$; la condition de Lagrange affirme que ce maximum est atteint lorsque $x_0 = x_1 = \ldots = x_n$, et à cause de la contrainte, c'est lorsque $x_0^2 = x_1^2 = \ldots = x_n^2 = \frac{1}{n+1}$, et on retrouve ainsi la solution précédente. ■

On reparle pour finir du problème **(16)** du 16 janvier. La conjecture étant que les seuls rectangles pavables par des rectangles dont l'un des côtés au moins est un entier sont les rectangles qui sont eux-mêmes de ce type, on remarque qu'il suffit pour prouver cette conjecture de trouver une fonction de deux variables dont l'intégrale sur un rectangle s'annule si et seulement si l'un des deux côtés est un entier : en effet, si le grand rectangle est pavé par des petits rectangles à un côté entier, l'intégrale de cette fonction sur le grand rectangle sera la somme des intégrales sur les petits rectangles, donc vaudra 0, ce qui prouvera que le grand rectangle a aussi un côté entier.

Séance du 6 février 2019

Pas de séance en ce jour, en raison de la troisième séance de Math-o-LU.

Séance du 13 février 2019

On inaugure la séance par de nouveaux problèmes.

Problème 2018-19(20). *À un arrêt de bus, n personnes attendent avec des billets correspondant à des places numérotées. Hélas, la personne (possédant le billet) numéro* 1 *prend, au lieu de sa place numéro* 1*, une place au hasard. Les autres voyageurs, qui sont plus disciplinés, s'installent dans leur place réservée, sauf si celle-ci est déjà occupée auquel cas ils prennent une place au hasard. On demande quelle est la probabilité pour que la personne numéro n se retrouve à la place numéro n ? Dans les phrases précédentes, "au hasard" signifie que l'on choisit l'une des places encore libres avec équiprobabilité.*

Problème 2018-19(21). *Fabien a caché cinq entiers distincts, et ne révèle que l'ensemble de leurs sommes deux à deux. Cet ensemble est*

$$S = \{17, 20, 28, 14, 42, 36, 28, 39, 25, 31\}.$$

On demande de retrouver les cinq entiers cachés.

Problème 2018-19(22). *Un congrès rassemble* 281 *participants provenant de sept pays différents. Sachant qu'à chaque fois que l'on sélectionne six participants, il y en a toujours au moins deux qui ont le même âge, montrer qu'il existe un groupe de cinq participants qui ont tous le même âge, la même nationalité et le même sexe.*

Puis on reparle encore des problèmes **(16)** et **(18)** du 16 janvier. Pour le problème **(16)**, on rappelle qu'il suffit de trouver une fonction $f(x, y)$ dont l'intégrale sur un rectangle s'annule si et seulement si l'un des côtés est entier. Sur le problème **(18)**, on suggère de distinguer les pavages obtenus en recoupant successivement par un segment les morceaux déjà découpés des pavages plus généraux ne pouvant être obtenus ainsi (comme quatre dominos

1×2 entourant un carré 1×1 pour paver le carré 3×3) : les premiers seraient peut-être plus susceptibles d'être dénombrés grâce à une série génératrice (?).

On donne aussi une indication pour le problème **(5)** du 24 octobre sur les trois boîtes contenant des jetons : il pourrait être intéressant d'utiliser la division euclidienne du nombre total de jetons par le nombre de jetons présents dans la boîte qui en contient le plus.

Puis on propose une solution à un problème posé au LU la semaine dernière.

> **Problème 2018-19(23).** *(posé au LU) On se donne le mot LI, puis des règles pour former d'autres mots :* (i) *À tout mot commençant par L et se terminant par I on peut rajouter un U à la fin ;* (ii) *À tout mot écrit Lx où x désigne un bloc de lettres, on peut rajouter à la fin un deuxième bloc x pour obtenir un mot du type Lxx ;* (iii) *Quand trois "I" apparaissent à la suite dans un mot, on peut remplacer ce bloc par un unique U pour former un nouveau mot ;* (iv) *Quand deux "U" apparaissent à la suite dans un mot, on peut les supprimer toujours pour former un nouveau mot. Question : comment obtenir le mot LU ?*

Solution. On rajoute la règle (iii)-bis qui autorise la transformation inverse de "U" en "III", ce qui permet de se débarrasser de tous les U, et il suffit alors de montrer que même avec cette règle supplémentaire, on ne peut obtenir le mot $LIII$; et pour cela, on montre que le nombre de I n'est jamais congru à 0 modulo 3, ce qui est clair sur les cinq règles que l'on s'est données. Un participant fait remarquer que l'on n'a même pas besoin de rajouter une règle, et que l'on peut démontrer (de la même façon) que le nombre de "I" dans tous les mots formés n'est jamais congru à 0 modulo 3, et qu'il n'y a donc pas de mot sans "I". ∎

> **Problème 2018-19(24).** *On se donne un engrenage formé de* 127 *roues dentées, la numéro* 1 *étant associée à la* 2*, la* 2 *à la* 3*, et ainsi de suite [...] la* 126 *à la* 127*, et la* 127 *à la* 1*. Question : le système peut-il tourner ?*

Réponse : non, car le nombre de roues dentées est impair ; pour tourner, chaque roue devrait tourner dans le sens inverse de ses deux voisines, et donc il y a un problème au moment où cela se referme. ∎

> **Problème 2018-19(25).** *On se donne n bougies identiques. On en fait brûler une pendant une heure le premier jour, puis deux pendant une heure le deuxième jour, puis trois pendant une heure le troisième jour, etc., et enfin n pendant une heure le n-ième jour. À la fin de ce dernier jour, toutes les bougies sont entièrement consumées. Quelle contrainte cela impose-t-il sur n ?*

Solution. Le nombre total d'heures de combustion est de $\frac{1}{2}n(n+1)$, et ce doit être réparti de façon égale entre les bougies, donc il faut que $\frac{1}{2}(n+1)$ soit entier, soit n impair. Est-ce la seule contrainte ? Oui, car si on dispose les bougies en cercle, on commence par en faire brûler une, puis les deux suivantes dans le cercle en tournant dans le sens direct, puis les trois suivantes et ainsi de suite : cela permet d'user les bougies de façon homogène, la différence de combustion entre deux bougies ne dépassant jamais une heure. ∎

Pour terminer, nous résolvons collectivement le problème **(22)** posé ce jour. On commence par observer qu'il ne peut y avoir au total que cinq âges différents car sinon on pourrait trouver six personnes toutes d'âges différents. On trie alors les participants en groupes de personnes ayant mêmes âge, nationalité et sexe : ces groupes sont au plus au nombre de $5 \times 7 \times 2 = 70$; s'il n'y avait jamais plus de quatre personnes dans tous ces groupes, le nombre de participants serait $\leq 4 \times 70 = 280$. Comme on sait qu'il y a 281 participants, c'est que l'un au moins de ces groupes compte au moins cinq individus. ∎

Séance du 27 février 2019

Pas de séance en ce jour, en raison de la quatrième séance de Math-o-LU.

Séance du 6 mars 2019

On commence par donner des solutions du problème **(21)** du 13 février. Vu que parmi les sommes données il y en a quatre qui sont impaires, c'est que tous les nombres à trouver ont même parité sauf l'un d'entre eux ; la somme des deux plus petits vaut 14, la somme des deux plus grands vaut 42, et c'est donc celui du milieu qui a une parité différente ; les quatre sommes impaires étant $17 < 25 < 31 < 39$, elles représentent le nombre du milieu plus chacun des quatre autres nombres ; ainsi $17+25 = 14+$(2 fois le nombre du milieu), et donc le nombre du milieu vaut $\frac{1}{2}28 = 14$; les quatre autres nombres sont donc $17-14 = 3$, $25-14 = 11$, $31-14 = 17$ et $39-14 = 25$. ∎

Autre solution proposée. Notons $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ les cinq nombres à découvrir. Les deux plus petites sommes sont $a_1 + a_2 = 14$ et $a_1 + a_3 = 17$, et les deux plus grandes sommes sont $a_5+a_4 = 42$ et $a_5+a_3 = 39$; par ailleurs, chacun de ces nombres apparaît quatre fois dans les sommes, si bien que l'on a aussi $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = \frac{1}{4}\sum_{s\in S} s = \frac{1}{4}\,280 = 70$. Il ne reste plus qu'à écrire :

$$a_3 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) - (a_1 + a_2) - (a_5 + a_4) = 70 - 14 - 42 = 14,$$
$$a_1 = (a_1 + a_3) - a_3 = 3,\ a_2 = (a_1 + a_2) - a_1 = 11,$$
$$a_5 = (a_5 + a_3) - a_3 = 25, \text{ et } a_4 = (a_5 + a_4) - a_5 = 17,$$

si bien que les cinq nombres sont : $3 < 11 < 14 < 17 < 25$. ∎

Nous donnons ensuite (enfin !) la solution du problème **(5)** du 25 octobre sur les trois boîtes contenant des jetons. Les nombres des jetons dans les trois boîtes étant notés $a < b < c$, on va montrer comment faire baisser le plus petit de ces trois nombres, et comme ce sont des entiers, cela prouvera qu'on arrive à 0 en un temps fini. Pour cela, on effectue la division euclidienne de b par a : $b = a\,q + r$ avec $0 \le r < a$, et on va montrer comment laisser seulement r jetons dans la boîte qui en contient initialement b. Pour cela, on écrit q en base 2, en sorte que $b = r + \sum_{k=0}^{n} q_k\, 2^k a$ avec $q_k \in \{0, 1\}$ et $q_n = 1$, on note A, B et C les boîtes contenant initialement a, b et c jetons, puis on choisit soit A et B, soit A et C pour doubler n fois de suite l'effectif de A en vidant $2^k a$ jetons de B pour les k tels que $q_k = 1$ et en vidant $2^k a$ jetons de C pour les k tels que $q_k = 0$; puisque $c > b$, il y a suffisamment de jetons dans C pour continuer jusqu'au bout, et alors B ne contient plus que $r < a$ jetons. Le plus petit des trois effectifs est alors $\le r < a$. ∎

On résout ensuite le problème **(20)** du 13 février. En passant au complémentaire, la probabilité α_k que le numéro k trouve sa place occupée vérifie la relation de récurrence $\alpha_{k+1} = \frac{1}{n} + \frac{\alpha_2}{n-1} + \ldots + \frac{\alpha_k}{n-k+1}$; on en déduit que $\alpha_n = \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n-2}\left(\frac{1}{n-k}+1\right) = \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n-2}\frac{n-k+1}{n-k} = \frac{1}{2}$, d'où $1 - \alpha_n = \frac{1}{2}$. ∎

Autre solution proposée. Appelons p_n la probabilité pour que la personne numéro n se retrouve à la place numéro n (on a clairement $p_1 = 1$ et $p_2 = \frac{1}{2}$ par exemple). La personne numéro 1 choisit la place numéro k avec la probabilité $\frac{1}{n}$; si $k = 1$, l'issue est favorable car tous les autres voyageurs vont se mettre à leur place prévue, tandis que si $k = n$, l'issue est défavorable car de toutes façons, la place numéro n sera occupée à la fin ; et si $1 < k < n$, les voyageurs, jusqu'au numéro k exclu, vont s'installer à leur place prévue, tandis que le voyageur numéro k va se comporter comme un voyageur numéro 1 du même problème avec les $n-k+1$ voyageurs restants ; cela donne la relation de récurrence : $p_n = \frac{1}{n}\left(1+\sum_{k=2}^{n-1} p_{n-k+1}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} p_k$. On montre alors facilement par récurrence que $p_1 = 1$, puis $p_n = \frac{1}{2}$ pour tout $n > 1$. ■

On nous propose alors un nouveau problème.

Problème 2018-19(26). *L'entier $n > 0$ étant écrit $n_k n_{k-1} \ldots n_1 n_0$ en base 10, soit $n = \sum_{j=0}^{k} n_j 10^j$ avec $n_j \in [\![0, 9]\!]$, on pose $f(n) = \sum_{j=0}^{k} n_j^2$. Question : étudier les itérées de la fonction f, c'est-à-dire que devient $f^m(n)$ quand m augmente indéfiniment ?*

On termine la séance avec une solution du problème **(16)** du 16 janvier que l'on avait presque résolu les 30 janvier et 13 février : il suffisait de trouver une fonction $f(x, y)$ dont l'intégrale sur un rectangle s'annule si et seulement si l'un des côtés est entier. Or la fonction $f(x, y) = e^{2i\pi(x+y)}$ possède cette propriété puisque

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = e^{2i\pi(a+c)}\left(e^{2i\pi(b-a)}-1\right)\left(e^{2i\pi(d-c)}-1\right)$$

et que le premier facteur ne s'annule jamais, tandis que le deuxième s'annule si et seulement si $b - a \in \mathbb{N}$ et que le troisième s'annule si et seulement si $d - c \in \mathbb{N}$. ■

Séance du 13 mars 2019

On commence par énoncer de nouveaux problèmes.

Problème 2018-19(27). *Prouver que parmi cinq réels ≥ 0, on peut toujours en trouver deux, notés a et b, tels que $0 \leq \frac{a}{1+a^2} - \frac{b}{1+b^2} \leq \frac{1}{8}$.*

Problème 2018-19(28). *L'ensemble $[\![1, 3n]\!]$ est partitionné en trois parties A, B et C qui sont chacune de cardinal n. Est-il toujours possible de choisir un nombre dans chacun de ces ensembles de sorte que l'un d'entre eux soit égal à la somme des deux autres ?*

Problème 2018-19(29). *Quinze équipes participent à une compétition. Chaque équipe affronte exactement une fois chacune des autres. À l'issue de chaque match chaque équipe reçoit : 3 points si elle a gagné, 2 points si elle a obtenu un nul, et 1 point si elle a perdu. Sachant qu'après la compétition tous les scores sont différents les uns des autres et ≥ 21, montrer que le gagnant a fait au moins un match nul.*

Problème 2018-19(30). *On considère l'assemblage de neuf carrés dessiné à la page suivante. Sachant que le plus petit des carrés, dont le nom* **A** *n'apparaît pas sur la figure, a pour côté $a = 1$, déterminer toutes les longueurs de la figure.*

On poursuit la séance en résolvant le problème **(26)** du 6 mars. Pour $k > 3$ et $10^{k-1} \leq n < 10^k$, on a les inégalités $f(n) \leq 81\,k < \frac{1}{4}\,10^{k-1} \leq \frac{1}{4}\,n$, et donc la suite $(f^m(n))_m$ est décroissante tant qu'elle reste $\geq 10^3$; pour $n < 10^3$, $f(n) \leq f(999) = 243$, et donc pour m assez grand, la suite $(f^m(n))_m$ reste inférieure à 243 et donc bornée. Elle finit donc par être périodique, et on peut chercher quels sont les cycles limites.

Pour cela, on commence par observer que pour $n \leq 243$, on a $f(n) \leq f(199) = 163$, et donc que les itérées restent ≤ 163 ; pour $100 \leq n \leq 163$, on a $f(n) \leq f(159) = 107$, et pour $100 \leq n \leq 107$, on a $f(n) \leq 50$, si bien que, quel que soit le nombre n de départ, l'un des itérés $f^m(n)$ tombe en-dessous de 99. Il suffit donc d'examiner les itérés de $f(n)$ pour $1 \leq n \leq 99$, qui sont les nombres à un ou deux chiffres, ce qui se fait rapidement : on trouve deux cycles limites possibles, le cycle $1 \to 1$ (de période 1), et le cycle $4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4$ (de période 8). ∎

Quelle proportion de nombres initiaux fournit une suite convergeant vers 1 ? Python permet de calculer cela pour les petites valeurs initiales : parmi les valeurs initiales entre 1 et 100, 20 vont converger vers 1 ; parmi celles entre 1 et 1 000, il y en a 143 ; parmi celles entre 1 et 10 000, il y en a 1 442 ; parmi celles entre 1 et 100 000, il y en a 14 377 ; et parmi celles entre 1 et 1 000 000, il y en a 143 071. Cette proportion converge-t-elle vers une limite ?

Et pour prolonger dans une autre direction : peut-on dire quelque chose de $f^n(n)$?

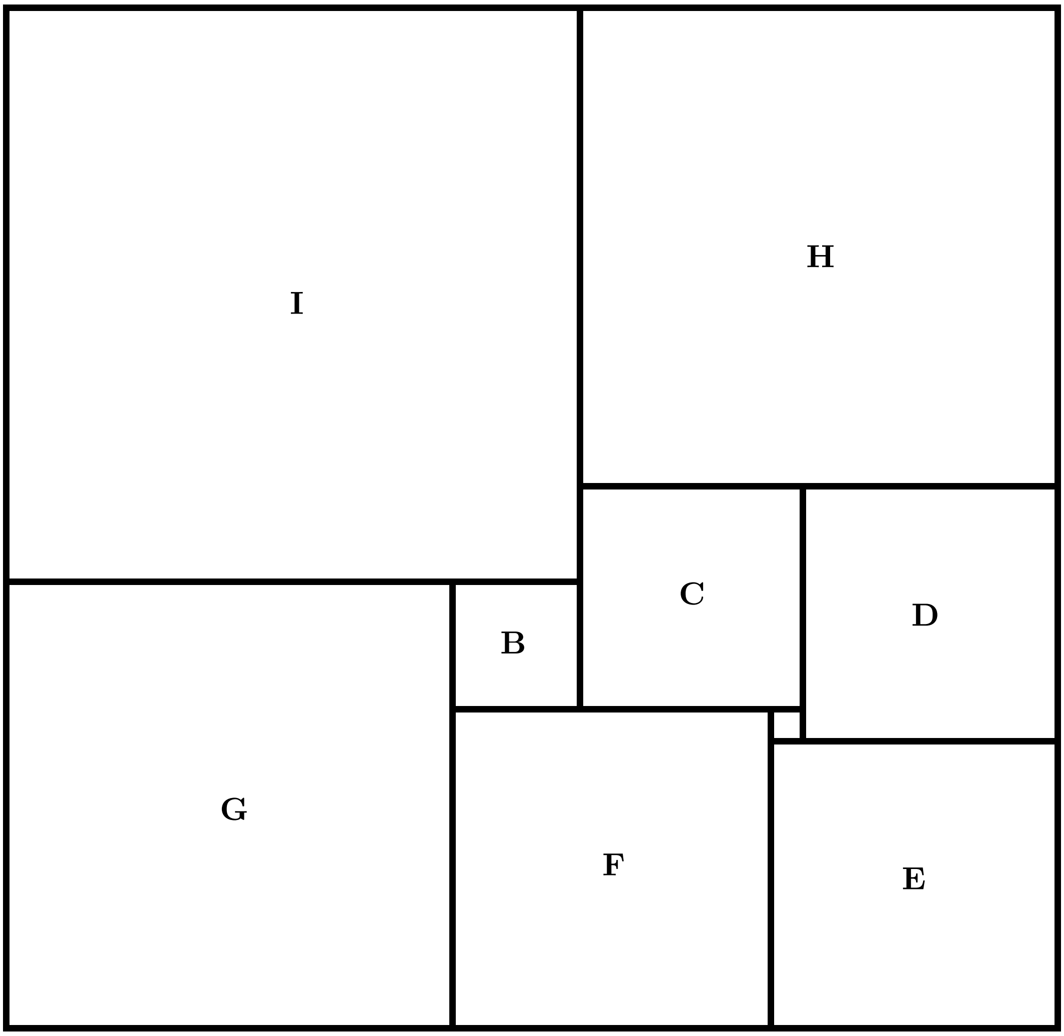

Figure pour le problème **(30)** de la page précédente.

Nous revenons ensuite à un très vieux problème : le problème **(2^bis)** du 21 novembre. Il s'agit de calculer le cardinal S_n^d de l'ensemble $A_n^d = \{\, (x_1, \ldots, x_d) \in (\mathbb{N}^*)^d \,;\, x_1 + \ldots + x_d < n \,\}$. On peut déjà observer trois choses : c'est que si $d \geq n$, $A_n^d = \emptyset$ et $S_n^d = 0$; d'autre part que pour $d = 1$, les élements de A_n^1 sont les entiers $0 < k < n$ qui sont au nombre de $S_n^1 = n - 1$; et enfin, que si $d = n$, l'ensemble A_{n+1}^n contient le seul élément $(1, \ldots, 1, 1)$, d'où $S_{n+1}^n = 1$.

Ensuite, pour $n \geq d > 1$, on écrit que A^d_{n+1} est la réunion disjointe de A^d_n et de $B^d_n = \{(x_1, \ldots, x_d) \in (\mathbb{N}^*)^d \,;\, x_1 + \ldots + x_d = n\}$; or B^d_n est en bijection avec A^{d-1}_n par l'application $(x_1, \ldots, x_d) \mapsto (x_1, \ldots, x_{d-1})$; il en résulte que $S^d_{n+1} = S^d_n + S^{d-1}_n$, ce qui est la relation de récurrence des coefficients du binôme ; on peut donc conclure par récurrence que $S^d_n = \binom{n-1}{d}$ pour tous $n > d > 0$. ∎

Une autre solution est alors proposée : à chaque d-uplet $(x_1, \ldots, x_d)$ d'entiers > 0, on associe la suite $(y_1, \ldots, y_d)$ définie par $y_k = \sum_{j=1}^k x_j$, et on voit ainsi que les solutions de notre problème sont en bijection avec les suites strictement croissantes de nombres pris dans $[\![1, n-1]\!]$; or ces dernières correspondent aux parties à d éléments pris dans $[\![1, n-1]\!]$ qui en a $n-1$, d'où à nouveau $S^d_n = \binom{n-1}{d}$. ∎

On termine la séance par l'énoncé d'un autre problème encore.

Problème 2018-19(31). *Pour quelles valeurs de l'entier $n \in \mathbb{N}$ le nombre $p = 4^n + n^4$ est-il premier ?*

Séance du 20 mars 2019

Pas de séance en ce jour, en raison de la cinquième séance de Math-o-LU.

Séance du 27 mars 2019

Pas de séance en ce jour, en raison de la sixième séance de Math-o-LU.

Séance du 3 avril 2019

Pas de séance en ce jour, en raison de la septième séance de Math-o-LU.

Séance du 10 avril 2019

La séance débute par la solution du problème **(27)** du 13 mars. Une étude rapide de la fonction $f : x \mapsto f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$ montre qu'elle est positive et atteint son maximum en $x = 1$ où elle prend la valeur $\frac{1}{2}$. On recouvre l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ par les quatre intervalles $[0, \frac{1}{8}]$, $[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}]$, et $[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}]$ de longueur $\frac{1}{8}$. Les cinq réels ≥ 0 étant notés a, b, c, d et e, leurs images par f sont dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$, et il y en a au moins deux dans le même sous-intervalle de longueur $\frac{1}{8}$ (par le principe des tiroirs), d'où le résultat. ∎

C'est ensuite le problème **(30)** du 13 mars qui est résolu. On note $a = 1$, b, c, d, e, f, g, h, et i les côtés des neuf carrés. En tournant autour du carré $\mathbf{A}$, on voit que $d = c + 1$, $e = d + 1 = c + 2$, $f = e + 1 = c + 3$, et $b + c = f + 1 = c + 4$, d'où $b = 4$. On tourne maintenant autour de $\mathbf{B}$: $g = f + 4 = c + 7$, $i = g + 4 = c + 11$, $h + c = i + 4 = c + 15$, d'où $h = 15$. Enfin, en comparant les deux bords horizontaux, on voit que $i + h = g + f + e$, soit $(c + 11) + 15 = (c + 7) + (c + 3) + (c + 2)$ ou encore $2\,c = 14$, ce qui permet de trouver $c = 7$ puis :

$$a = 1, \quad b = 4, \quad c = 7, \quad d = 8, \quad e = 9, \quad f = 10, \quad g = 14, \quad h = 15 \quad \text{et} \quad i = 18.$$

Les dimensions du rectangle étaient donc : 32×33. ∎

On nous propose de nouveaux problèmes.

Problème 2018-19(32). *Soit P un polynôme à coefficients réels et de degré $2n+1$ pour un $n \in \mathbb{N}$. Il s'agit de montrer la formule*

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad = \quad \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} P\Big(\cos\Big(\frac{2k-1}{n}\,\pi\Big)\Big)\,.$$

Problème 2018-19(33). *Soient A et B deux compacts de $\mathbb{R}^2$ dont on note $|A|$ et $|B|$ les aires. On note aussi $A+B$ l'ensemble des points $x+y$ avec $x \in A$ et $y \in B$. Il s'agit de démontrer l'*inégalité de Brun-Minkowski *: $|A+B|^{1/2} \geq |A|^{1/2} + |B|^{1/2}$.*

Pour le démontrer, il faut procéder en plusieurs étapes : on commence par le cas où A et B sont des rectangles (ou même des carrés ?) à bords parallèles aux axes ; puis par un procédé de récurrence, on le prouve pour des unions finies de rectangles ; et enfin il faut passer au cas général par un passage à la limite. Cette inégalité permet notamment d'accéder à l'inégalité isopérimétrique.

On parle ensuite des champs de gradient qui sont à rotationnel nul ; après avoir remarqué que dans un ouvert simplement connexe, tout champ à rotationnel nul est un champ de gradient, on demande si c'est une propriété caractéristique des ouverts simplement connexes : un ouvert où tout champ à rotationnel nul est nécessairement un champ de gradient est-il toujours simplement connexe ? La réponse, paraît-il, est négative ! Le contre-exemple est le complémentaire de la *sphère cornue d'Alexander*, une horreur imaginée par les topologues algébristes !

Séance du 24 avril 2019

Cette dernière séance de la saison 2018-19 a été entièrement consacrée à l'exposé d'un participant sur le théorème suivant.

Théorème de séparation de Jordan. *Soit $J \subset \mathbb{R}^2$ une* courbe de Jordan, *c'est-à-dire l'image du cercle $\mathbb{S}^1$ par une application continue injective de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}^2$. Alors l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus J$ possède exactement deux composantes connexes, l'une bornée et l'autre non, et ayant toutes deux J pour frontière.*

Pour démontrer ce théorème intuitivement bien clair mais difficile à justifier proprement, l'orateur nous propose d'établir d'abord trois résultats préliminaires : le lemme combinatoire de Sperner, le théorème du point fixe de Brouwer, et le lemme topologique du croisement des chemins.

Pour le lemme de Sperner, on commence par des définitions. Dans l'espace affine $\mathbb{R}^d$, on appelle *simplexe de dimension n* ($n \leq d$) l'enveloppe convexe de $n+1$ points affinement indépendants appelés *sommets* du simplexe ; si les sommets sont les points $(a_i)_{i\in I}$, on notera $T = \mathrm{Conv}\{\, a_i \,;\, i \in I \,\}$ le simplexe. Étant donné un tel simplexe $T = \mathrm{Conv}\{\, a_i \,;\, i \in I \,\}$ de dimension n : on appelle *faces de T* tous les sous-simplexes de la forme $T_J = \mathrm{Conv}\{\, a_i \,;\, i \in J \,\}$ pour un $J \subset I$; on appelle *triangulation de T* toute famille finie $\mathscr{T}$ de simplexes de dimension n (appelés *mailles* de la triangulation) telle que $\cup_{\tau\in\mathscr{T}}\tau = T$ et que $\forall \tau, \tau' \in \mathscr{T}$, $\tau \cap \tau' \neq \emptyset \;\Rightarrow\; \tau \cap \tau'$ est une face commune de τ et de τ' ; et si $S \subset T$, on appelle *coloriage de Sperner sur S* toute application $c : S \to I$ vérifiant $c(S \cap T_J) \subset J$ pour tout $J \subset I$. Le lemme s'énonce alors comme suit.

Lemme combinatoire de Sperner. *Soit T un simplexe de dimension n. On se donne une triangulation $\mathscr{T}$ de T, et un coloriage de Sperner c sur l'ensemble S de tous les sommets des mailles de $\mathscr{T}$. Alors le nombre de mailles* multicolores*, c'est-à-dire dont tous les sommets sont de couleurs différentes, est impair (et en particulier $\neq 0$).*

La démonstration se fait par récurrence sur la dimension n du simplexe : pour l'initialisation à $n = 1$ (cas d'un segment), c'est une simple utilisation de la signature d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_2$; et on démontre l'hérédité en passant par la théorie des graphes et le lemme des poignées de mains. ∎

Du lemme de Sperner on déduit maintenant le théorème suivant.

Théorème du point fixe de Brouwer. *Soient K une partie convexe et compacte de $\mathbb{R}^d$, et $f : K \to K$ une application continue. Alors il existe au moins un point $x \in K$ tel que $f(x) = x$.*

La preuve se fait en trois étapes. Première étape : si $K = \{x \in (\mathbb{R}_+)^{d+1} ; x_1 + \ldots + x_{d+1} = 1\}$ est le simplexe de dimension d dont les sommets sont les points $(a_i)_{1 \leq i \leq d+1}$ (où $a_i \in K$ est le point de i-ème coordonnée 1), on raisonne par l'absurde en supposant que f n'a pas de point fixe, ce qui permet de définir un coloriage de Sperner sur K en posant $c(x) = \min\{\, i \in [\![1, n+1]\!] ; c(x)_i < x_i \,\}$; on prend ensuite une suite $(\mathscr{T}_\nu)$ de triangulations de K dont la taille des mailles tend vers 0 quand $\nu \to \infty$, et comme chaque $\mathscr{T}_\nu$ contient une maille multicolore et que K est compact, on peut extraire de cette suite de mailles multicolores une sous-suite convergente dont la limite est un point fixe de f, ce qui contredit l'hypothèse faite. Deuxième étape : si K est un simplexe quelconque de dimension d, on se ramène au premier cas par une transformation affine. Troisième étape : dans le cas général d'un convexe compact K, celui-ci est contenu dans un simplexe T, et une fonction continue $f : K \to K$ se prolonge alors en une fonction continue $\widetilde{f} : T \to K \subset T$; d'après la deuxième étape, $\widetilde{f}$ possède un point fixe, et c'est aussi un point fixe de f. ∎

On passe alors au troisième résultat préliminaire.

Lemme topologique du croisement des chemins. *Dans un rectangle de $\mathbb{R}^2$, on se donne un premier chemin continu reliant l'un à l'autre les deux côtés verticaux du rectangle, et un deuxième chemin continu reliant l'un à l'autre ses deux côtés horizontaux. Alors ces deux chemins se coupent en au moins un point.*

Comme pour le théorème de Jordan, c'est un résultat intuitivement bien clair mais difficile à justifier proprement. Ici la preuve consiste à montrer que si ces chemins ne se croisaient pas, on pourrait construire à l'aide des fonctions coordonnées de ces chemins une fonction continue $f : [-1,1]^2 \to [-1,1]^2$ sans point fixe, ce qui contredirait le théorème de Brouwer. ∎

Démonstration du théorème de Jordan (voir énoncé en début de séance). Il est d'abord facile de voir que par compacité de J (image continue du compact $\mathbb{S}^1$), les composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus J$ sont des ouverts connexes par arcs de $\mathbb{R}^2$ (car $\mathbb{R}^2$ est localement connexe par arcs), et $\mathbb{R}^2 \setminus J$ possède une unique composante connexe non-bornée.

On montre ensuite que si $\mathbb{R}^2 \setminus J$ a plusieurs composantes connexes, celles-ci ont toutes J pour frontière. Il est en effet clair que la frontière d'une composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus J$ n'est pas vide (puisque $\mathbb{R}^2 \setminus J$ n'est ni $\emptyset$ ni $\mathbb{R}^2$) et qu'elle est contenue dans J ; comme elle est aussi fermée, si cette frontière n'était pas égale à J tout entier, elle serait contenue dans un arc $A \subset J$ homéomorphe à $[0,1]$; grâce au théorème d'extension de Tietze, la fonction $x \mapsto x$ sur A s'étendrait en une fonction continue définie sur un grand disque fermé $K \supset J$ et toujours à valeurs dans A, et avec cela on pourrait construire une application continue $f : K \to K$ sans point fixe, ce qui contredirait le théorème de Brouwer.

Reste à montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus J$ possède une et une seule composante connexe bornée. Pour cela, on inclut J dans un rectangle en sorte que chacun des deux côtés verticaux contienne un point de J, ce qui permet de partager la courbe de Jordan J en deux chemins continus J_+ et J_- reliant l'un à l'autre ces deux côtés verticaux. À l'aide de la médiane verticale du rectangle et du lemme du croisement des chemins, on construit alors un point de $\mathbb{R}^2 \setminus J$ qui n'est pas dans la composante connexe non bornée, ce qui prouve l'existence d'une composante connexe bornée. Puis on termine la preuve en montrant que cette composante connexe bornée est unique à nouveau grâce au lemme du croisement des chemins. ∎

Compléments. Pour terminer, on se pose encore la question de savoir si ce théorème de Jordan reste vrai sur d'autres surfaces $\mathscr{S}$ que le plan : il est vrai sur la sphère $\mathscr{S} = \mathbb{S}^2$ comme on peut le montrer en se ramenant au cas du plan par la projection stéréographique, mais il est faux sur le ruban de Möbius ou sur le tore, car dans ces deux cas il existe des courbes de Jordan $J \subset \mathscr{S}$ telles que $\mathscr{S} \setminus J$ ne possède qu'une seule composante connexe.

Séances des 1er et 8 mai 2019

Pas de séance pour raison de jour férié.

Séances des 15 et 22 mai 2019

Pas de séance en ces jours, en raison des huitième et neuvième séances de Math-o-LU.

*

*   *   *   *

*

Bilan des activités 2018-2019
problèmes résolus et problèmes en suspens

Le problème **(1)** du 26 septembre 2018 a été résolu pour moitié le 24 octobre 2018, et pour moitié le 7 novembre 2018.

Le problème **(2)** du 26 septembre 2018 a été résolu le 10 octobre 2018.

Le problème **(3)** du 3 octobre 2018 a été résolu le 10 octobre 2018.

Le problème **($\mathbf{3^{bis}}$)** du 3 octobre 2018 a été résolu le 7 novembre 2018.

Le problème **(4)** du 10 octobre 2018 a été résolu : (a) le 7 novembre 2018 ; (b) le 21 novembre 2018 ; (c) le 7 novembre 2018 ; (d) le 21 novembre 2018.

Le problème **(5)** du 24 octobre 2018 a été résolu le 6 mars 2019.

Le problème **(6)** du 24 octobre 2018 a été résolu le 7 novembre 2018.

Le problème **(7)** du 7 novembre 2018 a été résolu le 21 novembre 2018.

Le problème **(8)** du 7 novembre 2018 n'a pas été entièrement résolu : si l'intégrale (b) a été calculée le 12 décembre 2018, l'intégrale (a), qui était

$$\int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{x^2+2}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}\,dx$$

n'a jamais été calculée.

Le problème **($\mathbf{1^{bis}}$)** du 7 novembre 2018 dont l'énoncé était

> **Problème 2018-19($\mathbf{1^{bis}}$).** *Étant donnée une famille $(E_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ à deux indices de parties d'un ensemble, exprimer $\cup_{i\in I}\big(\cap_{j\in J} E_{ij}\big)$ sous la forme d'une intersection de réunions.*

n'a jamais été résolu, mais en voici rapidement une solution. Notant J^I l'ensemble des fonctions $\varphi : I \to J$ définies sur I et à valeurs dans J, on se propose de prouver que

$$\cup_{i\in I}\big(\cap_{j\in J} E_{ij}\big) \ = \ \cap_{\varphi\in J^I}\big(\cup_{i\in I} E_{i\varphi(i)}\big)\ .$$

Et en effet, si $x \in \cup_{i\in I}\big(\cap_{j\in J} E_{ij}\big)$, cela signifie que : $\exists i_0 \in I : \forall j \in J,\ x \in E_{i_0 j}$, ce qui entraîne que $\forall \varphi \in J^I,\ x \in E_{i_0\varphi(i_0)}$ et donc que $\forall\varphi \in J^I,\ x \in \cup_{i\in I} E_{i\varphi(i)}$; et cela s'écrit aussi $x \in \cap_{\varphi\in J^I}\big(\cup_{i\in I} E_{i\varphi(i)}\big)$.

Réciproquement, si $x \notin \cup_{i\in I}\big(\cap_{j\in J} E_{ij}\big)$, cela signifie que : $\forall i \in I, \exists j \in J : x \notin E_{ij}$; pour chaque $i \in I$ notons alors $\varphi(i) = j$ l'un des $j \in J$ tels que $x \notin E_{ij}$: cela définit une fonction $\varphi \in J^I$ pour laquelle on a donc $x \notin \cup_{i\in I} E_{i\varphi(i)}$, ce qui entraîne que $x \notin \cap_{\varphi\in J^I}\big(\cup_{i\in I} E_{i\varphi(i)}\big)$. ∎

Le problème **($\mathbf{2^{bis}}$)** du 21 novembre 2018 a été résolu le 13 mars 2019.

Le problème **(9)** du 21 novembre 2018 a été résolu le 28 novembre 2018.

Les problèmes **(10)** et **(11)** du 21 novembre 2018, d'énoncés

> **Problème 2018-19(10).** *Pour une suite réelle (a_n) bornée, on considère la série entière $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, a_k\, x^k$ qui est de rayon de convergence infini. Montrer que si $\lim_{x\to+\infty} e^x f(x) = c \in \mathbb{R}$, alors $a_k = (-1)^k c$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

> **Problème 2018-19(11).** *On dit que la série numérique $\sum a_k$ est* Abel-sommable *si la série $s(x) = \sum a_k\, x^k$ converge pour $x \in [0,1[$ et si $\lim_{x\to 1^-} s(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour toute série $\sum a_k$ Abel-sommable, la série $\sum f(a_k)$ soit aussi Abel-sommable.*

n'ont jamais été résolus.

Le problème **(12)** du 28 novembre 2018 a été résolu le 12 décembre 2018.

Le problème **(13)** du 28 novembre 2018 a été résolu le 16 janvier 2019.

Le problème **(14)** du 5 décembre 2018 a été résolu le jour même, 5 décembre 2018.

Le problème **(15)** du 12 décembre 2018 a été résolu le 16 janvier 2019.

Le problème **(16)** du 16 janvier 2019 a été résolu le 6 mars 2019.

Le problème **(17)** du 16 janvier 2019 a été résolu le 30 janvier 2019.

Les problèmes de pavages **(18)** du 16 janvier 2019 et **(19)** du 30 janvier 2019, d'énoncés

> **Problème 2018-19(18).** *Étant donnés deux entiers c et n, quel est le nombre de façons de paver un carré de côté c avec n rectangles de côtés entiers ?*

> **Problème 2018-19(19).** *Étant donnés deux entiers $p > 0$ et $q > 0$, combien y a-t-il de façons de paver le rectangle de taille $p \times q$ par des dominos de taille 2×1 ?*

n'ont jamais été résolus.

Le problème **(20)** du 13 février 2019 a été résolu le 6 mars 2019.

Le problème **(21)** du 13 février 2019 a été résolu le 6 mars 2019.

Le problème **(22)** du 13 février 2019 a été résolu le jour même, 13 février 2019.

Le problème **(23)** du 13 février 2019 a été résolu le jour même, 13 février 2019.

Le problème **(24)** du 13 février 2019 a été résolu le jour même, 13 février 2019.

Le problème **(25)** du 13 février 2019 a été résolu le jour même, 13 février 2019.

Le problème **(26)** du 6 mars 2019 a été résolu le 13 mars 2019.

Le problème **(27)** du 13 mars 2019 a été résolu le 10 avril 2019.

Le problème **(28)** du 13 mars 2019 dont l'énoncé était

> **Problème 2018-19(28).** *L'ensemble $[\![1, 3n]\!]$ est partitionné en trois parties A, B et C qui sont chacune de cardinal n. Est-il toujours possible de choisir un nombre dans chacun de ces ensembles de sorte que l'un d'entre eux soit égal à la somme des deux autres ?*

n'a jamais été résolu.

Le problème **(29)** du 13 mars 2019 dont l'énoncé était

> **Problème 2018-19(29).** *Quinze équipes participent à une compétition. Chaque équipe affronte exactement une fois chacune des autres. À l'issue de chaque match chaque équipe reçoit : 3 points si elle a gagné, 2 points si elle a obtenu un nul, et 1 point si elle a perdu. Sachant qu'après la compétition tous les scores sont différents les uns des autres et ≥ 21, montrer que le gagnant a fait au moins un match nul.*

n'a jamais été résolu, mais en voici rapidement une solution. Le nombre total de matchs est $\binom{15}{2}$, et à chaque match 4 points sont distribués, soit en tout $4 \times \binom{15}{2} = 420$ points. D'après l'énoncé, les équipes non gagnantes ont totalisé au moins $21 + 22 + \ldots + 34$ points, soit $\frac{(21+34)\,14}{2} = 385$ points, et donc l'équipe gagnante en a totalisé au plus $420 - 385 = 35$ points en quatorze matchs, et donc exactement 35 points puisqu'elle a obtenu le meilleur score. Enfin, les victoires ou les défaites rapportent un nombre impair de points tandis que les matchs nuls rapportent un nombre pair de points, si bien que le nombre cumulé des victoires et des défaites de l'équipe gagnante doit être impair, et donc celui des matchs nuls aussi puisque cette équipe a disputé quatorze matchs ; il y a donc eu au moins un match nul. ■

Le problème **(30)** du 13 mars 2019 a été résolu le 10 avril 2019.

Les trois derniers problèmes de la saison, le **(31)** du 13 mars 2019, le **(32)** du 10 avril 2019, et le **(33)** du 10 avril 2019, d'énoncés

> **Problème 2018-19(31).** *Pour quelles valeurs de l'entier $n \in \mathbb{N}$ le nombre $p = 4^n + n^4$ est-il premier ?*
>
> **Problème 2018-19(32).** *Soit P un polynôme à coefficients réels et de degré $2n+1$ pour un $n \in \mathbb{N}$. Il s'agit de montrer la formule*
>
> $$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad = \quad \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} P\Big(\cos\Big(\frac{2k-1}{n}\,\pi\Big)\Big)\,.$$
>
> **Problème 2018-19(33).** *Soient A et B deux compacts de $\mathbb{R}^2$ dont on note $|A|$ et $|B|$ les aires. On note aussi $A+B$ l'ensemble des points $x+y$ avec $x \in A$ et $y \in B$. Il s'agit de démontrer l'*inégalité de Brun-Minkowski *: $|A+B|^{1/2} \geq |A|^{1/2} + |B|^{1/2}$.*

n'ont jamais été résolus. Il faut cependant noter que la formule proposée au problème **(32)** est incorrecte : si l'on prend $n = 1$ et $P(x) = x^3$, l'intégrale est nulle par imparité de l'intégrand, tandis que l'expression du membre de droite vaut $-\pi$, ce qui est non nul ! On peut aussi remarquer que dans l'intégrale, on peut remplacer P par sa partie paire, qui s'écrit $Q(x^2)$ pour un polynôme Q de degré $\leq n$; pour retrouver la formule correcte, il s'agit donc, de remplacer la somme du membre de droite par une somme qui s'annule pour les monômes de degrés impairs, et qui redonne l'intégrale pour les monômes de la forme $P(x) = x^{2k}$ avec $k \leq n$.

*

* * * *

*